УДК 512.64

В. М. Прокіп, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів),
М. І. Худий, канд. фіз.-мат. наук (Львів. політехн. ін-т)

ПРО ОДИН МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ СПІЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ДІЛЬНИКА МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ НАД ДОВІЛЬНИМ ПОЛЕМ

Conditions are found for existence of a common linear unital divisor with a given characteristic polynomial of regular matrix polynomials over an arbitrary field. The result obtained is also applied to finding a common solution of matrix polynomial equations.

Встановлено умови існування спільного лінійного унітального дільника з заданим характеристичним многочленом регулярних матричних многочленів над довільним полем. Указано також застосування здобутого результату до знаходження спільного розв'язку матричних многочленних рівнянь.

Нехай $\mathcal{P}$ — довільне поле, $\mathcal{P}[x]$ — кільце многочленів над $\mathcal{P}$. Позначимо через $\mathcal{P}_n$ і $\mathcal{P}_n[x]$ кільця $n\times n$-матриць над $\mathcal{P}$ і $\mathcal{P}[x]$ відповідно. Нахай, далі, $A(x) \in \mathcal{P}_n[x]$ — многочленна матриця, яку запишемо у вигляді матричного многочлена над полем $\mathcal{P}$:

$$A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s, \ \ A_i \in \mathcal{P}_n, \ i = 0, 1, \ldots, s.$$

Відомо, що матричний многочлен $A(x)$ називається неособливим, якщо його характеристичний многочлен $\det A(x) = a(x) \not\equiv 0$; регулярним, якщо $\det A_0 \neq$; і унітальним, якщо $A_0 = I$ — одинична матриця із $\mathcal{P}_n$.

Розглянемо регулярні матричні многочлени

$$A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s, \ \ \det A_0 \neq 0,$$

$$B(x) = B_0x^r + B_1x^{r-1} + \ldots + B_r, \ \ \det B_0 \neq 0,$$

$$A_i, B_j \in \mathcal{P}_n, \ \ i = 0, 1, \ldots s, \ \ j = 0, 1, \ldots r.$$

Кажуть, що матричні многочлени $A(x)$ і $B(x)$ мають спільний лівий дільник, якщо $A(x) = D(x)F(x)$, $B(x) = D(x)G(x)$, де $D(x) \in \mathcal{P}_n[x]$ і $\deg \det D(x) \geq 1$.

Мета даної роботи — встановити умови, за яких регулярні матричні многочлени $A(x)$ і $B(x)$ мають спільний лівий унітальний дільник $D(x) = Ix - D$ із заданим характеристичним многочленом $\det D(x) = d(x) = x^n + d_1x^{n-1} + \ldots + d_n$. Очевидно, якщо $A(x)$ і $B(x)$ мають спільний дільник $D(x)$, $\det D(x) = d(x)$, то їхні характеристичні многочлени $a(x)$ і $b(x)$ мають спільний дільник $d(x)$. Тому надалі будемо припускати, що характеристичні многочлени регулярних матричних многочленів $A(x)$ і $B(x)$ допускають факторизації $a(x) = d(x)f(x)$, $b(x) = d(x)g(x)$, де $d(x) = x^n + d_1x^{n-1} + \ldots + d_n$, $d(x) \in \mathcal{P}_n[x]$. Оскільки $A(x)$ і $B(x)$ регулярні, то, очевидно, $\deg a(x) = ns$, $\deg b(x) = nr$, а $\deg f(x) = n(s-1)$ і $\deg g(x) = n(r-1)$.

Утворимо матриці $I\cdot f(x)$ і $I\cdot g(x)$, які розділимо зліва на $A(x)$ і $B(x)$ відповідно:

$$I\cdot f(x) = A(x)S(x) + R(x), \tag{1}$$

$$I\cdot g(x) = B(x)T(x) + Q(x), \tag{2}$$

де

$$R(x) = R_0x^{s-1} + R_1x^{s-2} + \ldots + R_{s-1},$$

$$Q(x) = Q_0x^{r-1} + Q_1x^{r-2} + \ldots + Q_{r-1},$$

$$R_i, Q_j \in \mathcal{P}_n, \ i = 0, 1, \ldots, s-1, \ j = 0, 1, \ldots r-1.$$

Якщо $\det R(x) \neq 0$ і $\det Q(x) \neq 0$, то з урахуванням [1] матричні многочлени $A(x)$ і $B(x)$ допускають факторизації

$$A(x) = (U_0x - U_1)R(x), \ \det U_0 \neq 0, \tag{3}$$

$$B(x) = (V_0x - V_1)Q(x), \ \det V_0 \neq 0, \tag{4}$$

і $\det(U_0x - U_1) = r_1d(x)$, $\det(V_0x - V_1) = r_2d(x)$, $r_1, r_2 \in \mathcal{P}$.

Теорема. *Нехай характеристичні многочлени регулярних матричних многочленів $A(x)$ і $B(x)$ мають спільний дільник $d(x) = x^n + d_1x^{n-1} + \ldots + d_n$. Нехай, далі, при згаданих вище умовах $A(x)$ і $B(x)$ допускають факторизації* (3) *і* (4) *відповідно. Якщо*

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} U_0 & V_0 \\ U_1 & V_1 \end{Vmatrix} = n, \tag{5}$$

то матричні многочлени $A(x)$ і $B(x)$ мають спільний лівий дільник $D(x) = Ix - D$ з характеристичним многочленом $\det D(x) = d(x)$, *єдиний із заданим $d(x)$.*

Для доведення теореми нам потрібна така лема.

Лема. *Нехай матричні многочлени $A(x)$ і $B(x)$ допускають факторизації $A(x) = D_1(x)F(x)$, $B(x) = D_2(x)G(x)$, $D_i(x) \in \mathcal{P}_n[x]$,* $\deg \det D_i(x) \geq 1$, $i = 1, 2$. *Якщо $D_1(x)$ і $D_2(x)$ правоеквівалентні, то $A(x)$ і $B(x)$ мають спільний лівий дільник.*

Доведення леми. Нехай $D_1(x)$ і $D_2(x)$ правоеквівалентні, тобто $D_1(x) = D_2(x)W(x)$, $W(x) \in GL(n, \mathcal{P}[x])$. Тоді $B(x) = D_2(x)G(x) = D_2(x)W(x)W^{-1}(x)G(x) = D_1(x)W^{-1}(x)G(x)$. Отже, $A(x) = D_1(x)F(x)$, $B(x) = D_1(x)W^{-1}(x)G(x)$, тобто $D_1(x)$ — спільний лівий дільник $A(x)$ і $B(x)$. Лема доведена.

Доведення теореми. Оскільки U_0 і V_0 неособливі, то, очевидно, $\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} U_0 \\ U_1 \end{Vmatrix} = \operatorname{rang}\begin{Vmatrix} V_0 \\ V_1 \end{Vmatrix} = n.$ Враховуючи (5), маємо

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} U_0 & V_0 \\ U_1 & V_1 \end{Vmatrix} = \operatorname{rang}\begin{Vmatrix} U_0 \\ U_1 \end{Vmatrix} = n.$$

З останньої рівності випливає, що рівняння $\begin{Vmatrix} U_0 \\ U_1 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} V_0 \\ V_1 \end{Vmatrix}$ розв'язне і має єдиний розв'язок. Нехай $X \in \mathcal{P}_n$ — розв'язок цього рівняння. Легко бачити, що $U_0X_0 = V_0$, $U_1X_0 = V_1$ і $\det X_0 \neq 0$. Враховуючи останні співвідношення, одержуємо $(U_0x - U_1)X_0 = V_0x - V_1$, тобто $U(x) = U_0x - U_1$ і $V(x) = V_0x - V_1$ правоеквівалентні. На основі леми $A(x)$ і $B(x)$ мають спільний лівий дільник $V(x) = V_0x - V_1$, тобто $A(x) = (V_0x - V_1)F(x)$, $B(x) = (V_0x - V_1)Q(x)$. Оскільки $\det V_0 \neq 0$, то $D(x) = Ix - V_1V_0^{-1}$ — спільний лівий унітальний дільник $A(x)$ і

$B(x)$. І тому що $\det V(x) = r_2 d(x)$, то, очевидно, $\det D(x) = d(x)$. Єдиність спільного дільника $D(x)$ випливає з однозначності знаходження $R(x)$ і $Q(x)$ [2]. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Нехай характеристичні многочлени $a(x)$ і $b(x)$ унітальних матричних многочленів*

$$A(x) = Ix^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s, \quad A_i \in \mathcal{P}_n,$$

$$B(x) = Ix^r + B_1 x^{r-1} + \ldots + B_r, \quad B_j \in \mathcal{P}_n$$

мають спільний дільник $d(x) = x^n + d_1 x^{n-1} + \ldots + d_n$. Нехай, далі, матриці $R(x)$ і $Q(x)$ у співвідношеннях (1) *і* (2) *відповідно неособливі. Якщо $R_0^{-1} R_1 - A_1 = Q_0^{-1} Q_1 - B_1 = D$, то матричні многочлени $A(x)$ і $B(x)$ мають спільний лівий дільник $D(x) = Ix - D$ з характеристичним многочленом $\det D(x) = d(x)$, єдиний з заданим характеристичним многочленом.*

Доведення. Оскільки $R(x)$ і $Q(x)$ у співвідношеннях (1) і (2) неособливі, то, як показано у [1], вони регулярні, а отже,

$$A(x) = (U_0 x - U_1) R(x), \tag{6}$$

$$B(x) = (V_0 x - V_1) Q(x). \tag{7}$$

Перемноживши праві частини рівностей (6) і (7) і врахувавши унітальність $A(x)$ і $B(x)$, маємо, що $U_0 R_0 = I$ і $V_0 Q_0 = I$. Рівності (6) та (7) тепер запишемо так:

$$A(x) = (Ix - U_1 U_0^{-1}) U_0 (R_0 x^{s-1} + R_1 x^{s-2} + \ldots + R_{s-1}),$$

$$B(x) = (Ix - V_1 V_0^{-1}) V_0 (Q_0 x^{r-1} + Q_1 x^{r-2} + \ldots + Q_{r-1}).$$

З останніх рівностей випливає, що $A_1 = U_0 R_1 - U_1 U_0^{-1} = R_0^{-1} R_1 - U_1 U_0^{-1}$, $B_1 = V_0 Q_1 - V_1 V_0^{-1} = Q_0^{-1} Q_1 - V_1 V_0^{-1}$. Звідси одержуємо, що $U_1 U_0^{-1} = R_0^{-1} R_1 - A_1$ і $V_1 V_0^{-1} = Q_0^{-1} Q_1 - B_1$. Оскільки праві частини останніх двох рівностей співпадають, то $U_1 U_0^{-1} = V_1 V_0^{-1} = D$. Отже, $A(x)$ і $B(x)$ мають спільний лівий дільник $D(x) = Ix - D$ з заданим характеристичним многочленом $d(x)$, до того ж єдиний. Наслідок доведено.

Наслідок 2. *Якщо при умовах теореми регулярні матричні многочлени $A(x)$ і $B(x)$ мають спільний лівий дільник $D(x) = Ix - D$* $(\det D(x) = d(x))$, *то матричні многочленні рівняння*

$$X^s A_0 + X^{s-1} A_1 + \ldots + X A_{s-1} + A_s = O,$$

$$X^r B_0 + X^{r-1} B_1 + \ldots + X B_{r-1} + B_r = O$$

мають спільний розв'язок $X_0 = D$ із заданим характеристичним многочленом $d(x)$.

1. *Казімірський П. С., Худий М. І.* Про один метод виділення лінійного множника з матричного многочлена // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 5. – С. 394 – 395.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

Одержано 24.06.92