УДК 517.911

Й. Диблик

О существовании решений одной вещественной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, входящих в особую точку

1. Введение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$g_i(x, y_i)\, y_i' = \alpha_i(x, y_i)\,[1 + f_i(x, y_1, \ldots, y_n)], \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

с начальными условиями, заданными в особой точке

$$y_i(+0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Для удобства рассуждений система (1) рассматривается только в области вида $D = (0, x_0] \times \prod_{i=1}^{n} (0, y_{0i}]$, где $y_{0i} = y_0$, $i = 1, \ldots, n$; $0 < x_0$, $y_0 = \mathrm{const}$.

Если для отдельно взятого i-го уравнения системы (1) (в котором считаем, что переменные y_k, $k = 1, \ldots, i-1$, $i+1, \ldots, n$, принадлежат некоторому подмножеству области D) можно указать некоторую кривую без контакта $y_i = \varphi_i(x) \in C^1(0, x_0]$, $i = 1, \ldots, n$ (значения производных в граничных точках считаем везде в работе доопределенными по непрерывности), $\varphi_i(+0) = 0$, такую, что $(x, \varphi_i(x)) \in D_0 = (0, x_0] \times (0, y_0]$, то по ее виду указывается вторая кривая $y_{\varphi_i}(x) \in C^1$, непересекающая ее, входящая в начало координат и бесконтактная для этого уравнения, такая, что $(x, y_{\varphi_i}(x)) \in D_0$ если $x \to +0$. Из кривых $\varphi_i(x)$, $y_{\varphi_i}(x)$, $i = 1, \ldots, n$, образовано некоторое (u, v)-подмножество в D (см. [1, с. 335]) относительно системы (1), в котором доказывается существование решений задачи (1), (2).

Проведенное исследование примыкает к исследованиям по разрешимости сингулярных задач Коши (см., например, [2—9]). В работе [7] доказано существование пучка решений в случае скалярного уравнения. По сравнению с работой [8] система (1) с $f_i \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$, не распадается на уравнения с разделяющимися переменными.

2. Вспомогательные утверждения. Обозначим через $M(x_0)$ класс функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих на $(0, x_0]$ условиям $\varphi(x) \in C^1$, $0 < \varphi^{(i)}(x)$; $i = 0, 1$, $\varphi(+0) = 0$, $\varphi(x_0) < y_0$.

Введем вспомогательную функцию $G(x, \varphi(x)) \equiv -\varphi'(x)\, g(x, \varphi(x)) + \alpha(x, \varphi(x))$.

Лемма 1. *Пусть в области* D_0 $\omega(x, y) \in C^1$, $\omega(+0, +0) = 0$, $\omega(+0, y)\,\omega(x, +0) < 0$ *и* $\omega'_x(x, y)\,\omega'_y(x, y) < 0$. *Тогда уравнение* $\omega(x, y) = 0$ *определяет на некотором интервале* $(0, x_{00}]$, $0 < x_{00} \leqslant x_0$, $x_{00} = \mathrm{const}$ *единственную неявную функцию* $y = y(x) \in M(x_{00})$.

Доказательство леммы аналогично доказательствам известных теорем о неявных функциях.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha(x, y)$, $g(x, y) \in C(D_0)$; *для некоторой функции* $\varphi(x) \in M(x_0)$ *на* $(0, x_0]$ *справедливо* $G(x, \varphi(x)) > 0$, $0 < g(x, \varphi(x))$, $0 < \alpha(x, \varphi(x))$ *и, кроме того,*

$$\int_{+0} g(x, \varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int_{+0} \alpha(x, \varphi(x))\, dx = +\infty. \tag{3_φ}$$

Тогда уравнение $U(x, y) = 0$, *где*

$$U(x, y) = \int_{y_1}^{y} g(\varphi^{-1}(t), t)\, dt - \int_{x_0}^{x} \alpha(t, \varphi(t))\, dt, \tag{4}$$

$\varphi^{-1}(t)$ — *функция, обратная к* $\varphi(t)$, $0 < y_1 < \varphi(x_0)$, $y_1 = \mathrm{const}$, *определяет на интервале* $(0, x_0]$ *единственную неявную функцию* $y = y_\varphi(x) \in M(x_0)$ *такую, что* $y_\psi(x) < \varphi(x)$.

Доказательство. Существование единственной неявной функции $y = y_\varphi(x) \in M(x_{00})$ на некотором интервале $(0, x_{00}]$, $x_{00} \leqslant x_0$, вытекает из леммы 1, если в ее формулировке положить

$$\omega(x, y) \equiv U_1(x, y) = \Big[\int_{y_1}^{y} g(\varphi^{-1}(t), t)\, dt\Big]^{-1} - \Big[\int_{x_0}^{x} \alpha(t, \varphi(t))\, dt\Big]^{-1},$$

так как уравнение $U_1(x, y) = 0$ эквивалентно уравнению $U(x, y) = 0$. Рассмотрим взаимное расположение кривых $\varphi(x)$, $y_\varphi(x)$. Заметим, что $U(x, +0) = -\infty$, если $x \in (0, x_0]$. Дальше после несложных преобразований получаем

$$U(x, \varphi(x)) = -\int_{x_0}^{x} G(t, \varphi(t))\, dt + \int_{x_1}^{x_0} g(t, \varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt,$$

где $x_1 = \varphi^{-1}(y_1)$. Так как $G(x, \varphi(x)) > 0$ на $(0, x_0]$ и $x_1 < x_0$, то $U(x, \varphi(x)) > 0$ на $(0, x_0]$. Следовательно, учитывая непрерывность функций $\alpha(x, y)$, $g(x, y)$, можно заключить, что $y_\varphi(x) < \varphi(x)$ и $x_{00} = x_0$.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha(x, y)$, $g(x, y) \in C(D_0)$, *для некоторой функции* $\varphi(x) \in M(x_1)$, $x_0 < x_1 = \mathrm{const}$ *на* $(0, x_1]$ *справедливо* $G(x, \varphi(x)) < 0$, $0 < g(x, \varphi(x))$, $0 < \alpha(x, \varphi(x))$ *и справедливы соотношения* (3_φ). *Тогда уравнение* $U(x, y) = 0$, *где функция* U *определена формулой* (4), *в которой* $\varphi(x_0) < y_1 < y_0$, $y_1 = \varphi(x_1)$, *определяет на интервале* $(0, x_0]$ *единственную неявную функцию* $y = y_\varphi(x) \in M(x_0)$ *такую, что* $y(x) < \varphi_\varphi(x)$.

Лемма 4. *Пусть* $\alpha(x, y)$, $g(x, y) \in C(D_0)$, *для некоторой функции* $\varphi(x) \in M(x_0)$ *на* $(0, x_0]$ *справедливо* $G(x, \varphi(x)) < 0$, $0 < g(x, \varphi(x))$, $0 < \alpha(x, \varphi(x))$ *и, кроме того,*

$$\int_{+0} g(x, \varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx < +\infty, \quad \int_{+0} \alpha(x, \varphi(x))\, dx < +\infty. \tag{5_φ}$$

Тогда уравнение $U(x, y) = 0$, *где*

$$U(x, y) \equiv \int_{+0}^{y} g(\varphi^{-1}(t), t)\, dt - \int_{+0}^{x} \alpha(t, \varphi(t))\, dt, \tag{6}$$

определяет на интервале $(0, x_0]$ *единственную неявную функцию* $y = y_\varphi(x) \in M(x_0)$ *такую, что* $y_\varphi(x) < \varphi(x)$.

Доказательство. Существование единственной неявной функции $y = y_\varphi(x) \in M(x_{00})$ на некотором интервале $(0, x_{00}]$, $x_{00} \leqslant x_0$, вытекает из леммы 1, если в ее формулировке положить $\omega(x, y) \equiv U(x, y)$. Рассмотрим взаимное расположение кривых $\varphi(x)$ и $y_\varphi(x)$. Так как $U(x, +0) < 0$ на $(0, x_0]$ и здесь же $U(x, \varphi(x)) = -\int_{+0}^{x} G(t, \varphi(t))\, dt > 0$, то отсюда с учетом непрерывности функций $\alpha(x, y)$, $g(x, y)$ вытекает, что указанное в утверждении леммы неравенство справедливо, причем неявную функцию можно продолжить вплоть до значения $x = x_0$ и положить $x_{00} = x_0$.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть* $\alpha(x, y)$, $g(x, y) \in C(D_0)$, *для некоторой функции* $\varphi(x) \in M(x_0)$ *на* $(0, x_0]$ *справедливо* $G(x, \varphi(x)) > 0$, $0 < g(x, \varphi(x))$, $0 < \alpha(x, \varphi(x))$ *и, кроме того, справедливы неравенства* (5_φ). *Тогда уравнение* $U(x, y) = 0$, *где функция* U *задана соотношением* (6), *определяет на некотором интервале* $(0, x_{00}]$, $x_{00} \leqslant x_0$, *единственную неявную функцию* $y = y_\varphi(x) \in M(x_{00})$ *такую, что* $\varphi(x) < y_\varphi(x)$.

3. Основные результаты. Дальше будем использовать обозначения

$$G_i(x, y, \varphi_i(x)) \equiv -\varphi_i'(x)\, g_i(x, \varphi_i(x)) + \alpha_i(x, \varphi_i(x))\, [1 + f_i(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, \varphi_i(x), y_{i+1}, \ldots, y_n)]; \qquad \Omega_i(x, y_i, \varphi_i(x)) \equiv \alpha_i(x, y_i)\, g_i(\varphi_i^{-1}(y_i), y_i) \times$$
$$\times [\alpha_i(x, \varphi_i(x))\, g_i(x, y_i)]^{-1} - 1,$$

где φ_i^{-1} — функция, обратная к функции φ_i;

$$N_{\varphi_i} = \{(x, y_i) \in D_0,\ y_i < \varphi_i(x)\}; \qquad N^{\varphi_i} = \{(x, y_i) \in D_0,\ \varphi_i(x) < y_i < \varphi_i(x_0)\};$$

$$N = \Big(\prod_{1}^{n_1} N_{\varphi_i}\Big) \times \Big(\prod_{n_1+1}^{n_1+n_2} N^{\varphi_i}\Big) \times \Big(\prod_{n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} N_{\varphi_i}\Big) \times \Big(\prod_{n_1+n_2+n_3+1}^{n} N^{\varphi_i}\Big);$$

$$U_i(x, y_i) \equiv \int_{y_0}^{y_i} g_i(\varphi_i^{-1}(t), t)\, dt - [1 + (-1)^k \delta] \int_{x_0}^{x} \alpha_i(t, \varphi_i(t))\, dt, \tag{7_i}$$

где $k = 0$, если $i = 1, \dots, n_1$, и $k = 1$, если $i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$;

$$U_i(x, y_i) \equiv \int\limits_{+0}^{y_i} g_i(\varphi_i^{-1}(t), t)\, dt - [1 + (-1)^k\delta] \int\limits_{+0}^{x} \alpha_i(t, \varphi_i(t))\, dt, \qquad (8_i)$$

где $k = 0$, если $i = n_1 + n_2 + n_3 + 1, \dots, n$, и $k = 1$, если $i = n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3$.

Теорема 1. *Предположим, что*

I) $\alpha_i(x, y_i)$, $g_i(x, y_i) \in C(D_0)$, $0 < g_i(x, y_i)$ *для* $(x, y_i) \in D_0$, $f_i(x, y_1, \dots, y_n) \in C(D)$, $i = 1, \dots, n$;

II) *для функций* $\varphi_i(x) \in M(x_0)$ *справедливо* $0 < \alpha_i(x, \varphi_i(x))$ *на* $(0, x_0]$, $i = 1, \dots, n$ *и, кроме того,*

а) *для* $i = 1, \dots, n_1$ $G_i(x, y, \varphi_i(x)) > 0$, *если* $(x, y) \in D$, $\Omega_i(x, y_i, \varphi_i(x)) < 0$, *если* $(x, y_i) \in N_{\varphi_i}$ *и имеют место соотношения* (3_{φ_i});

б) *для* $i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ $G_i(x, y, \varphi_i(x)) < 0$, *если* $(x, y) \in D$, $\Omega_i(x, y_i, \varphi_i(x)) > 0$, *если* $(x, y_i) \in N^{\varphi_i}$ *и имеют место соотношения* (3_{φ_i});

в) *для* $i = n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3$ $G_i(x, y, \varphi_i(x)) < 0$, *если* $(x, y) \in D$, $\Omega_i(x, y_i, \varphi_i(x)) > 0$, *если* $(x, y_i) \in N_{\varphi_i}$ *и имеют место неравенства* (5_{φ_i});

г) *для* $i = n_1 + n_2 + n_3 + 1, \dots, n$ $G_i(x, y, \varphi_i(x)) > 0$, *если* $(x, y) \in D$, $\Omega_i(x, y_i, \varphi_i(x)) < 0$, *если* $(x, y_i) \in N^{\varphi_i}$ *и имеют место неравенства* (5_{φ_i});

III) $|f_i(x, y_1, \dots, y_n)| \leqslant \delta < 1$, $0 < \delta = \mathrm{const}$, *если* $(x, y_1, \dots, y_n) \in N$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда задача (1), (2) *имеет по крайней мере* $n_1 + n_2$*-параметрическое семейство решений* $y(x) = (y_1(x), \dots y_n(x))$ *таких, что* $(x, y(x)) \in N \subset D$, *если* $x \to +0$. *Более того, уравнения* $U_i(x, y_i) = 0$, *где функции* U_i *заданы по формулам* (7_i), *если* $i = 1, \dots, n_1 + n_2$, *и по формулам* (8_i), *если* $i = n_1 + n_2 + 1, \dots, n$, *определяют единственным образом неявные функции* $y_i = \psi_i(x) \in M(\tilde{x})$ *для некоторого* $\tilde{x} \in (0, x_0]$ *такие, что справедливы неравенства* $\psi_i(x) < y_i(x) < \varphi_i(x)$, *если* $i \in \{1, \dots, n_1\} \cup \{n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3\}$, $\varphi_i(x) < y_i(x) < \psi_i(x)$, *если* $i \in \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\} \cup \{n_1 + n_2 + n_3 + 1, \dots, n\}$.

Доказательство. Докажем сначала, что уравнения $U_i(x, y_i) = 0$, где функции U_i заданы по формулам (7_i) для $i = 1, \dots, n_1 + n_2$ и по формулам (8_i), если $i = n_1 + n_2 + 1, \dots, n$ определяют единственным образом неявные функции $y_i = \psi_i(x) \in M(\tilde{x})$, где $\tilde{x}$ — некоторое число из интервала $(0, x_0]$. Это утверждение получим из заключений лемм 2—5, если в их формулировках положим $\varphi \equiv \varphi_i$, $y \equiv y_i$, $g \equiv g_i$, $G(x, \varphi(x)) \equiv G_i(x, \varphi_i(x))$, $U \equiv U_i$ для $i = 1, \dots, n$ соответственно и, кроме того, в формулировке леммы 2 для $i = 1, \dots, n_1$ $\alpha(x, y) \equiv \alpha_i(x, y_i)(1 + \delta)$, леммы 3 для $i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ $\alpha(x, y) \equiv \alpha_i(x, y_i)(1 - \delta)$, леммы 4 для $i = n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3$ $\alpha(x, y) \equiv \alpha_i(x, y_i)(1 - \delta)$ и леммы 5 для $i = n_1 + n_2 + n_3 + 1, \dots, n$ $\alpha(x, y) \equiv \alpha_i(x, y_i)(1 + \delta)$ соответственно. Нетрудно видеть, что $G_i(x, \varphi_i(x)) > 0$, если $i \in \{1, \dots, n_1\} \cup \{n_1 + n_2 + n_3 + 1, \dots, n\}$, и $G_i(x, \varphi_i(x)) < 0$, если $i \in \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3\}$. Тогда справедливы утверждения указанных лемм и, значит, для соответствующих неявных функций $y_i = y_{\varphi_i}(x) \equiv \psi_i(x)$ справедливо $\psi_i(x) \in M(\tilde{x})$, где число $\tilde{x} \in (0, x_0]$ существует. Более того, на интервале $(0, \tilde{x}]$ справедливо $\psi_i(x) < \varphi_i(x)$, если $i \in \{1, \dots, n_1\} \cup \{n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3\}$, $\varphi_i(x) < \psi_i(x)$, если $i \in \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\} \cup \{n_1 + n_2 + n_3 + 1, \dots, n\}$.

Далее применим топологический метод Важевского ([1], гл. X). Введем (u, v)-подмножество в области D относительно системы (1), в определении которого изменим направление оси Ox на противоположное, что приведет к замене функций типа u на функции типа v, множеств U_α на множества V_β, и наоборот. Положим

$$\Omega^0 = \{(x, y):\ u_j(x, y) < 0, v_k(x, y) < 0\},\ \text{где } k = 0, \dots, n_1 + n_2;$$

$$j = n_1 + n_2 + 1, \ldots, n; \; U_\alpha = \{(x, y)\colon u_\alpha(x; y) = 0, \; u_j(x, y) \leqslant 0, \; v_k(x, y) \leqslant 0\},$$

где $k = 0, \ldots, n_1 + n_2$; $j = n_1 + n_2 + 1, \ldots, n$; $n_1 + n_2 + 1 \leqslant \alpha \leqslant n$, $\alpha \neq j$;

$$V_\beta = \{(x, y)\colon v_\beta(x, y) = 0, \; u_j(x, y) \leqslant 0, \; v_k(x, y) \leqslant 0\},$$

где $k = 0, \ldots, n_1 + n_2$; $j = n_1 + n_2 + 1, \ldots, n$; $0 \leqslant \beta \leqslant n_1 + n_2$, $\beta \neq k$, и $u_j(x, y) \equiv u_j(x, y_j) = (y_j - \varphi_j(x))(y_j - \psi_j(x))$, $j = n_1 + n_2 + 1, \ldots, n$, $v_0(x, y) \equiv v_0(x) = x - x^*$, где $x^* \in (0, \tilde{x})$, $x^* = \mathrm{const}$, $v_k(x, y) \equiv v_k(x, y_k) = (y_k - \varphi_k(x)) \times (y_k - \psi_k(x))$, $k = 1, \ldots, n_1 + n_2$.

Из указанных выше свойств функций $\psi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, следует, что множество Ω^0 погружено в область D и при $x \to +0$ стягивается в начало координат.

Вычислим теперь полные производные функций $u_\alpha(x, y)$, $v_\beta(x, y)$ для значений переменных из множеств U_α, V_β в силу системы (1). На множестве U_α либо $y_\alpha = \varphi_\alpha(x)$ либо $y_\alpha = \psi_\alpha(x)$. Если $y_\alpha = \varphi_\alpha(x)$, то после несложных вычислений получаем $\dot{u}_\alpha(x, y) = G_\alpha(x, y, \varphi_\alpha(x)) [g_\alpha(x, \varphi_\alpha(x))]^{-1} \times (\varphi_\alpha(x) - \psi_\alpha(x))$. Если $\alpha \in \{n_1 + n_2 + 1, \ldots, n_1 + n_2 + n_3\}$, то нетрудно видеть, что $\psi_\alpha(x) < \varphi_\alpha(x)$, $G_\alpha(x, y, \varphi_\alpha(x)) < 0$, $g_\alpha(x, \varphi_\alpha(x)) > 0$ и, следовательно, $\dot{u}_\alpha(x, y) < 0$. Если $\alpha \in \{n_1 + n_2 + n_3 + 1, \ldots, n\}$, то $\varphi_\alpha(x) < \psi_\alpha(x)$, $G_\alpha(x, y, \varphi_\alpha(x)) > 0$, $g_\alpha(x, \varphi_\alpha(x)) > 0$ и $\dot{u}_\alpha(x, y) < 0$. Пусть теперь $y_\alpha = \psi_\alpha(x)$. Получаем $\dot{u}_\alpha(x, y) = (\psi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x)) \alpha_\alpha(x, \varphi_\alpha(x)) [g_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(\psi_\alpha(x)), \psi_\alpha(x))]^{-1} \times [(1 + \Omega_\alpha(x, \psi_\alpha(x), \varphi_\alpha(x)))(1 + f_\alpha(x, y_1, \ldots, y_{\alpha-1}, \psi_\alpha(x), y_{\alpha+1}, \ldots, y_n)) - 1 - (-1)^k \delta]$. Если $\alpha \in \{n_1 + n_2 + 1, \ldots, n_1 + n_2 + n_3\}$, то $k = 1$, $\psi_\alpha(x) < \varphi_\alpha(x)$, $\Omega_\alpha(x, \psi_\alpha(x), \varphi_\alpha(x)) > 0$, $|f_\alpha(\ldots)| \leqslant \delta$, выражение в квадратных скобках положительно, $0 < \alpha_\alpha(x, \varphi_\alpha(x))$, $0 < g_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(\psi_\alpha(x)), \psi_\alpha(x))$ и, следовательно $\dot{u}_\alpha(x, y) < 0$. Если $\alpha \in \{n_1 + n_2 + n_3 + 1, \ldots, n\}$, то $k = 0$, $\varphi_\alpha(x) < \psi_\alpha(x)$, $\Omega_\alpha(x, \psi_a(x), \varphi_\alpha(x)) < 0$, $|f_\alpha(\ldots)| \leqslant \delta$, выражение в квадратных скобках отрицательно, $0 < \alpha_a(x, \varphi_\alpha(x))$, $0 < g_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(\psi_\alpha(x)), \psi_\alpha(x))$ и $\dot{u}_\alpha(x, y) < 0$. Таким образом $\dot{u}_\alpha(x, y) < 0$ для всех значений $\alpha \in \{n_1 + n_2 + 1, \ldots, n\}$. Далее очевидно, что $\dot{v}_0(x, y) > 0$. Аналогично получаем, что $\dot{v}_\beta(x, y) > 0$ для $\beta \in \{1, \ldots, n_1 + n_2\}$.

Теперь можем заключить, что все точки строгого выхода Ω^0_{se} из множества Ω^0 образуют при убывании переменной x множество $\Omega^0_{se} = \bigcup\limits_{n_1+n_2+1}^{n} U_\alpha \setminus \bigcup\limits_{0}^{n_1+n_2} V_\beta$. Пусть $S \subset \Omega^0 \cup \Omega^0_{se}$, $S = \{(\tilde{\tilde{x}}, y_1^0, \ldots, y^0_{n_1+n_2}, y_{n_1+n_2+1}, \ldots, y_n)\colon u_j(\tilde{\tilde{x}}, y_j) \leqslant 0, \; v_0(\tilde{\tilde{x}}) < 0, \; v_k(\tilde{\tilde{x}}, y_k^0) < 0\}$, где $\tilde{\tilde{x}} = \mathrm{const}$; $y_k^0 = \mathrm{const}$; $k = 1, \ldots, n_1 + n_2$; $j = n_1 + n_2 + 1, \ldots, n$. Тогда $S \cap \Omega^0_{se} = \{(\tilde{\tilde{x}}, y_1^0, \ldots, y^0_{n_1+n_2}, y_{n_1+n_2+1}, \ldots, y_n)\colon u_\alpha(\tilde{\tilde{x}}, y_\alpha) = 0, \; u_j(\tilde{\tilde{x}}, y_j) \leqslant 0, \; v_k(\tilde{\tilde{x}}, y_k^0) < 0\}$, где $\alpha \neq j$; $\alpha, j = n_1 + n_2 + 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, n_1 + n_2$.

Множество $S \cap \Omega^0_{se}$ образует границу множества S и не является ретрактом S (см., например, [10]). Покажем, что $S \cup \Omega^0_{se}$ является ретрактом Ω^0_{se}. С этой целью введем отображение

$$\pi\colon \Omega^0_{se} \ni (x, y) \to (\tilde{\tilde{x}}, y_1^0, \ldots, y^0_{n_1+n_2}, \tilde{y}_{n_1+n_2+1}, \ldots, \tilde{y}_n) \in S \cap \Omega^0_{se},$$

где $\tilde{y}_i = \varphi_i(\tilde{\tilde{x}}) + (y_i - \varphi_i(x))(\psi_i(\tilde{\tilde{x}}) - \varphi_i(\tilde{\tilde{x}}))(\psi_i(x) - \varphi_i(x))^{-1}$, $i = n_1 + n_2 + 1, \ldots, n$.

Отображение π является в силу свойств функций $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, $i = n_1 + n_2 + 1, \ldots, n$, непрерывным. При этом точки множества $S \cap \Omega^0_{se}$ переходят в себя и, следовательно, $S \cap \Omega^0_{se}$ является ретрактом Ω^0_{se}. Нетрудно также заметить, что S является компактным множеством. Выполнены все условия следствия из теоремы Важевского [1, с. 337] и, значит, существует решение системы (1) с начальными данными из $S \cap \Omega^0$, график которого находится на интервале $(0, \tilde{\tilde{x}}]$ в Ω^0. Это решение удовлетворяет условию (2), так как множество Ω^0 стягивается при $x \to +0$ в точку $(+0, 0, \ldots, 0)$. Поскольку постоянными $y^0_1, \ldots, y^0_{n_1+n_2}$ можно варьировать, соблюдая условие $v_k(\tilde{\tilde{x}}, y^0_k) < 0$, $k = 1, \ldots, n_1 + n_2$, то и решений, находящихся в Ω^0 на интервале $(0, \tilde{\tilde{x}}]$, будет целое семейство, зависящее от $n_1 + n_2$ параметров. Очевидно, что утверждение теоремы справедливо также в случае, когда $n_1 + n_2 = n$. Теорема доказана.

В качестве приложения теоремы 1 докажем существование решения уравнения вида

$$g_1(y)\, y' = [-y + g_3(x)]\,[g_2(x)]^{-1}, \tag{9}$$

удовлетворяющего начальной задаче

$$y(+0) = 0. \tag{10}$$

Теорема 2. *Если* $g_1(y) \in C^1(0, y_0]$, $0 < g_1(y)$ *при* $y \in (0, y_0]$, $g_1(+0) = 0$, $g_i(x) \in C^1(0, x_0]$, $0 < g_i(x)$ *при* $x \in (0, x_0]$, $g_i(+0) = 0$, $i = 2, 3$, $g_3(x) < y_0$ *при* $x \in (0, x_0]$, $Z^{(j)}(x) > 0$, $j = 0, 1$, *где* $Z(x) \equiv g_3(x) - g_2(x)\, g_1[g_3(x)]$ *и* $g_1[Z(x)]\, Z'(x) < g_1[g_3(x)]$, *при* $x \in (0, x_0]$, *то задача* (9), (10) *имеет по крайней мере одно решение* $y(x)$ *такое, что для достаточно малых* $x \to +0$ $(x, y(x)) \in D_0$, *причем* $Z(x) < y(x) < \psi(x)$, *где функция* $\psi(x) \in M(\tilde{x})$, $\tilde{x}$ — *достаточно малое число, определяется неявно соотношением*

$$\int\limits_{+0}^{\psi(x)} g_1(t)\, dt \equiv \int\limits_{+0}^{x} g_1[g_3(t)]\, dt.$$

Доказательство. Проверим, что выполнены все условия леммы 1, в формулировке которой положено $n_1 = n_2 = n_3 = 0$, $n = 1$, $y_1 \equiv y$, $f_1(x, y_1) \equiv 0$, $\alpha_1(x, y_1) \equiv [-y + g_3(x)]\,[g_2(x)]^{-1}$, $g_1(x, y_1) \equiv g_1(y)$, $\varphi_1(x) \equiv Z(x)$. Действительно, нетрудно видеть, что $\alpha_1(x, y_1)$, $g_1(x, y_1) \in C(D_0)$, $0 < g_1(x, y_1)$ для $(x, y_1) \in D_0$, $\varphi_1(x) \in C^1(0, x_0]$, $\varphi_1^{(j)}(x) > 0$, $j = 0, 1$, $\varphi_1(x_0) < g_3(x_0) < y_0$, $\varphi_1(+0) = 0$ и, следовательно, $\varphi_1(x) \in M(x_0)$. Дальше $\alpha_1(x, \varphi_1(x)) \equiv g_1[g_3(x)] > 0$ на $(0, x_0]$, здесь же $G_1(x, y_1, \varphi_1(x)) \equiv -Z'(x) \times g_1[Z(x)] + g_1[g_3(x)] > 0$ и сходимость интегралов

$$\int\limits_{+0} \alpha_1(t, \varphi_1(t))\, dt = \int\limits_{+0} g_1[g_3(t)]\, dt, \quad \int\limits_{+0} g_1(t, \varphi_1(t))\, \varphi_1'(t)\, dt = \int\limits_{+0} g_1[Z(t)]\, Z'(t)\, dt$$

следует из условий теоремы. Наконец, находим $\Omega_1(x, y_1, \varphi_1(x)) = [-y + g_3(x)]\,[g_2(x)\, g_1[g_3(x)]]^{-1} - 1$. Это выражение на множестве $N^{\varphi_1} = \{(x, y) \in D_0,\ y > \varphi_1(x)\}$ отрицательно. Таким образом, выполнены условия I), II); г), III) теоремы 1, из заключения которой вытекает утверждение теоремы 2.

1. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.
2. *Чечик В. А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1959.— 8.— С. 155—198.
3. *Кигурадзе И. Т.* О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1965.— **1**, № 10.— С. 1271—1291.
4. *Просенюк Л. Г.* Существование и асимптотическое поведение решений вещественной системы дифференциальных уравнений вблизи особой точки // Укр. мат. журн.— 1981.— **33**, № 1.— С. 101—104.
5. *Норкин С. К.* Локальная и асимптотическая воронки для интегрального О-многообразия // Там же. — 1985.— **37**, № 3.— С. 317—322.

6. *Андреев А. Ф.* Особые точки дифференциальных уравнений.— Минск : Вышейш. шк., 1979.— 136 с.
7. *Диблик Й.* Достаточные условия существования пучка 0-кривых сингулярного дифференциального уравнения первого порядка // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 5.— С. 898—899.
8. *Диблик Й.* Асимптотическое поведение решений одной системы дифференциальных уравнений вблизи особой точки // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 3.— С. 360—363.
9. *Диблик Й.* О существовании О-кривых одной сингулярной системы дифференциальных уравнений // Math. Nachr.— 1985.— **122**.— С. 247—258.
10. *Борсук К.* Теория ретрактов.— М. : Мир, 1971.— 291 с.

Политехн. ин-т, Брно, Чехословакия

Получено 26.11.85