УДК 517.37

О. С. Гаврылив

Преобразования абстрактного винеровского интеграла в бесконечном произведении АВП при линейных преобразованиях пространства

Винеровская мера в бесконечном произведении пространств непрерывных функций многих переменных изучалась в [1], в бесконечном декартовом произведении абстрактных винеровских пространств — в [2].

Данная заметка посвящена преобразованиям абстрактного винеровского интеграла в бесконечном произведении пространств, который понимается в смысле Бохнера, при линейных преобразованиях пространства.

Пусть (i, H_∞, B_∞) — бесконечное декартово произведение абстрактных винеровских пространств (i_j, H_j, B_j), $j = \overline{1, \infty}$ [3]; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в сепарабельном гильбертовом пространстве H_j, $j = \overline{1, \infty}$;

$$\mu_{\vec{t}}(E_\infty) = \prod_{j=1}^{\infty} t_j^{-n_j/2} \int_{F_j} \exp\left\{-\frac{n_j}{2}\ln 2\pi - \frac{|x_{j.}|^2}{2t_j}\right\} dx_{j.} \qquad (1)$$

— гауссовская цилиндрическая вероятностная мера в H_∞ с параметром $\vec{t} = \{t_1, \ldots, t_l, \ldots\}$; $p_{\vec{t}}$ — соответствующая винеровская мера в B_∞ [2]. Здесь $E_\infty \subset H_\infty$ — цилиндрическое множество в H_∞, F_j — борелевское подмножество в P_jH_j, P_j — конечномерный ортогональный проектор в H_j, $n_j = \dim P_jH_j$; $x = \{x_{1.}, \ldots, x_{l.}, \ldots\}$, $x_{j.} \in H_j$, $j = \overline{1, \infty}$ $\forall\, x \in H_\infty$.

Интеграл Бохнера по мере $p_{\vec{t}}$ от функции $f(x)$, $x \in B_\infty$, со значениями в B-пространстве, обозначим $\int_{B_\infty} f(x)\, p_{\vec{t}}(dx)$.

Пространство H_∞ является сепарабельным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle x, y\rangle_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\alpha} \langle x_{j.}, y_{j.}\rangle, \quad \alpha > 1. \qquad (2)$$

Рассмотрим проектор Q_l в H_∞. Согласно принятым обозначениям [2] $E_\infty = Q_l H_\infty \times H_{l+1} \times \ldots$. Для всякой цилиндрической функции $q(x) = \varphi(\langle x, e_{k_1}\rangle, \ldots, \langle x, e_{k_s}\rangle)$ со значениями в B-пространстве определим случайный вектор, связанный с q,

$$\tilde{q}(\omega) = \varphi(n(e_{k_1})(\omega), \ldots, n(e_{k_s})(\omega)), \quad \omega \in \Omega, \tag{3}$$

где e_{k_m} — базис в H_∞, $m = \overline{1, s}$, $s < \infty$; $n(e_{k_m})$ — нормальное распределение [3, с. 53].

Положим $p_{\vec{t}}(x, U) = p_{\vec{t}}(U + x)$, $x \in B_\infty$, $U \subset B_\infty$.

Теорема 1. *Если $h \in H_\infty$, то при преобразовании $y = x + h$ меры $p_{\vec{t}}(h, \cdot)$ и $p_{\vec{t}}$ эквивалентны и для произвольной $p_{\vec{t}}$-интегрируемой функции $f(y)$ справедливо равенство*

$$\int_{B_\infty} f(y) p_{\vec{t}}(dy) = \int_{B_\infty} f(x + h) \exp\left\{-\sum_{j=1}^{\infty} [(2t_j)^{-1} |h_{j.}|^2 + t_j^{-1}(h_{j.}, x_{j.})]\right\} p_{\vec{t}}(dx),$$

где $(a_{j.}, b_{j.})$ — каноническая билинейная форма, приводящая B_j и B_j^* в двойственность.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай ограниченной непрерывной комплекснозначной функции $f(y)$ на B_∞. Пусть g — сужение f на H_∞, $g = f \circ i$, D — частично упорядоченное множество конечномерных ортогональных проекторов Q в H_∞. Тогда по теоремам 6.2, 6.3 [3, с. 80, 81] направленность $(g \circ Q)^\sim$ случайных величин сходится по вероятности к случайной величине $\tilde{g}$, когда $Q \to I$ сильно по направленному множеству D, $\tilde{g} = f$ почти всюду относительно меры $p_{\vec{t}}$. Следовательно, можно выбрать такую последовательность проекторов $\{Q_l\} \subset D$, сильно сходящуюся к тождественному отображению в H_∞, что $\tilde{g}(Q_l \cdot)$ сходится к f почти всюду относительно $p_{\vec{t}}$. Тогда

$$\int_{B_\infty} f(y) p_{\vec{t}}(dy) = \int_{B_\infty} \tilde{g}(iy) p_{\vec{t}}(dy) = \lim_{l \to \infty} \int_{B_\infty} \tilde{g}(Q_l x)(iy) p_{\vec{t}}(dy) =$$

$$= \lim_{l \to \infty} \int_{H_\infty} g(Q_l y) \mu_{\vec{t}}(dy) = \lim_{l \to \infty} \int_{Q_l H_\infty} g(Q_l y) \mu_{\vec{t}}(dQ_l y) =$$

$$= \lim_{l \to \infty} \int_{H_{(l)}} g_0(i_{(l)} z) \mu_{\vec{t}}(d i_{(l)} z) = \lim_{l \to \infty} \int_{B_{(l)}} \tilde{g}_0(i_{(l)} z) p_{\vec{t}}(dz)$$

вследствие изоморфизма между $Q_l H_\infty$ и $H_{(l)}$. Здесь $y \in H_\infty$, $z \in B_{(l)}$, $Q_l y = \{y_{1.}, \ldots, y_{l.}, 0, \ldots\}$; $y_{j.} = (i_{(l)} z)_{j.}$, $j = \overline{1, l}$; $g_0(i_{(l)} z) = g(Q_l y)$, $i_{(l)}$ — отображение включения $H_{(l)}$ в $B_{(l)}$. В силу согласованности норм, используемых для построения $B_{(l)}$ и B_∞ [2,4], и мер в $B_{(l)}$, B_∞, $\forall u \in B_\infty$, обозначая $f_0(u_{1.}, \ldots, u_{l.}) = f(u_{1.}, \ldots, u_{l.}, 0, \ldots)$, имеем $f_0 = \tilde{g}_0$ почти всюду относительно сужения меры $p_{\vec{t}}$ на $B_{(l)}$ по теореме 6.3 [3, с. 81] и

$$\int_{B_\infty} f(y) p_{\vec{t}}(dy) = \lim_{l \to \infty} \int_{B_{(l)}} f_0(z) p_{\vec{t}}(dz). \tag{4}$$

Воспользуемся формулами преобразования кратного абстрактного винеровского интеграла при сдвиге пространства [4]. Пусть $y = x + h$, $x = \{x_{1.}, \ldots, x_{l.}, \ldots\} \in B_\infty$, $h = \{h_{1.}, \ldots, h_{l.}, \ldots\} \in H_\infty$, $x_1 = \{x_{1.}, \ldots, x_{l.}\}$, $h_1 = \{h_{1.}, \ldots, h_{l.}\}$. Тогда $z = x_1 + h_1 \in B_{(l)}$ и

$$\int_{B_\infty} f(y) p_{\vec{t}}(dy) = \lim_{l \to \infty} \int_{B_{(l)}} f_0(x_1 + h_1) \times$$

$$\times \exp\left\{-\sum_{j=1}^{l}\left[(2t_j)^{-1}|h_{j\cdot}|^2 + t_j^{-1}((h_1)_{j\cdot}, (x_1)_{j\cdot})\right]\right\} p_{\vec{t}}(dx_1) =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\int_{B_{(l)}} \tilde{g}_0(i_{(l)}x_1+h_1)\exp\left\{-\sum_{j=1}^{l}\left[(2t_j)^{-1}|(h_1)_{j\cdot}|^2+t_j^{-1}\langle h_{j\cdot}, (i_{(l)}x_1)_{j\cdot}\rangle\right]\right\}^{\sim} p_{\vec{t}}(dx_1) =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\int_{H_{(l)}} g_0(i_{(l)}x_1 + h_1)\exp\left\{-\sum_{j=1}^{l}\left[(2t_j)^{-1}|h_{j\cdot}|^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + t_j^{-1}\langle h_{j\cdot}, (i_{(l)}x_1)_{j\cdot}\rangle\right]\right\}\mu_{\vec{t}}(di_{(l)}x_1).$$

В силу изоморфизма между $H_{(l)}$ и Q_lH_∞

$$\int_{B_\infty} f(y)\,p_{\vec{t}}(dy) = \lim_{l\to\infty}\int_{Q_lH_\infty} g(Q_l(ix+h))\exp\left\{-\sum_{j=1}^{l}\left[(2t_j)^{-1}|(Q_lh)_{j\cdot}|^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + t_j^{-1}\langle (Q_lh)_{j\cdot}, (Q_lix)_{j\cdot}\rangle\right]\right\}\mu_{\vec{t}}(dQ_lix) = \lim_{l\to\infty}\int_{B_\infty}\tilde{g}_*(Q_lix)\,p_{\vec{t}}(dx),$$

где $\mu_{\vec{t}}(di_{(l)}x_1)$ — цилиндрическая гауссовская мера в $H_{(l)}$, изоморфная сужению меры $\mu_{\vec{t}}(dx)$ в H_∞ на Q_lH_∞,

$$\tilde{g}_*(Q_li\cdot) = \tilde{g}(Q_l(i\cdot + h))\exp\left\{-\sum_{j=1}^{l}\left[(2t_j)^{-1}|(Q_lh)_{j\cdot}|^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + t_j^{-1}\langle (Q_lh)_{j\cdot}, (Q_li\cdot)_{j\cdot}\rangle\right]\right\}^{\sim}.$$

Поскольку $\{Q_l\}\to I$ в H_∞ сильно, можно утверждать, в силу непрерывности и ограниченности g_0 по теоремам 6.2, 6.3 [3, с. 80, 81], что

$$\tilde{g}_*(Q_li\cdot)\to f(\cdot + h)\exp\left\{-\sum_{j=1}^{\infty}\left[(2t_j)^{-1}|h_{j\cdot}|^2 + t_j^{-1}(h_{j\cdot}, (\cdot)_{j\cdot})\right]\right\} \tag{5}$$

по вероятности.

Следовательно, при необходимости перейдем к такой подпоследовательности $\{Q_l\}$, что рассмотренная сходимость в B_∞ будет сходимостью почти всюду относительно $p_{\vec{t}}$. Поскольку для $p_{\vec{t}}$-интегрируемости по Бохнеру функций $f(y)$ со значениями в B-пространстве необходимо и достаточно [5, с. 94] сильной измеримости $f(y)$ и $p_{\vec{t}}$-интегрируемости ее нормы, теорема доказана.

Положим $p_{\vec{t}}\circ T(U) = p_{\vec{t}}(T(U))$.

Теорема 2. *Пусть $T = I + K$ — линейное отображение B_∞ в себя и выполняются условия*

(a) $K(B_\infty)\subset H_\infty$;

(b) Для T существует обратное линейное отображение H_∞ в себя;

(c) $K\in L_1(H_\infty)$.

Тогда меры $p_{\vec{t}}\circ T$ и $p_{\vec{t}}$ эквивалентны, и для произвольной $p_{\vec{t}}$-интегрируемой в смысле Бохнера функции $f(y)$ справедливо равенство

$$\int_{B_\infty} f(y)\,p_{\vec{t}}(dy) = \int_{B_\infty} f(Tx)\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}(2t_n)^{-1}\left[2\sum_{j=1}^{\infty}(K_{nj}x_{j\cdot}, x_{n\cdot}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\langle K_{nj}x_{j\cdot}, K_{nm}x_{m\cdot}\rangle\right]\right\}|\det T|\,p_{\vec{t}}(dx). \tag{6}$$

Здесь

$$I=\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots \\ 0 & I_2 & 0 \dots 0 & 0 \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots I_l & 0 \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad K=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \dots K_{1l} \dots \\ K_{21} & K_{22} \dots K_{2l} \dots \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ K_{l1} & K_{l2} \dots K_{ll} \dots \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{bmatrix},$$

I_j — *тождественное отображение в* B_j, K_{nj} — *оператор, действующий из* B_j *в* H_n; $\det T=\prod_s(1+\lambda_s)$, λ_s — *собственные числа оператора* K.

Доказательство. Как и в теореме 1, рассмотрим случай ограниченной непрерывной комплекснозначной функции $f(y)$ на B_∞. Пусть $g = f\circ i$, D — частично упорядоченное множество конечномерных ортогональных проекторов Q в H_∞. Направленность $(g\circ Q)^\sim$ случайных величин сходится по вероятности к случайной величине $\tilde{g}$, когда $Q\to I$ сильно по направленному множеству D, $\tilde{g}=f$ почти всюду относительно меры $p_{\vec{t}}$ и можно выбрать такую последовательность проекторов $\{Q_l\}\subset D$, сильно сходящуюся к тождественному отображению в H_∞, что $\tilde{g}(Q_l\cdot)$ сходится к f почти всюду относительно $p_{\vec{t}}$. Тогда

$$\int\limits_{B_\infty} f(y)\,p_{\vec{t}}(dy)=\lim_{l\to\infty}\int\limits_{B_{(l)}}\tilde{g}(i_{(l)}z)\,p_{\vec{t}}(dz)=\lim_{l\to\infty}\int\limits_{B_{(l)}} f_0(z)\,p_{\vec{t}}(dz)$$

в силу изоморфизма между Q_lH_∞ и $H_{(l)}$ при обозначениях теоремы 1. Воспользуемся формулами преобразования кратного абстрактного винеровского интеграла при линейном преобразовании пространства B_∞ [4]. Пусть $y = Tx$, $x=\{x_{1\cdot},\dots,x_{l\cdot},\dots\}$, $x_1=\{x_{1\cdot},\dots,x_{l\cdot}\}$, $z=\{y_{1\cdot},\dots,y_{l\cdot}\}$. Тогда $z = Tx_1$ (операторы в $B_{(l)}$, изоморфные операторам в $B_{(l)}\times 0\times\dots$, обозначаем теми же символами) и аналогично теореме 1 получаем

$$\int\limits_{B_\infty} f(y)\,p_{\vec{t}}(dy)=\lim_{l\to\infty}\int\limits_{H_\infty} g(TQ_lix)\exp\Big\{-\sum_{n=1}^{l}(2t_n)^{-1}\Big[\sum_{j=1}^{l}\langle K_{nj}(Q_lix)_{j\cdot},$$

$$(Q_lix)_{n\cdot}\rangle+\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{l}\langle K_{nj}(Q_lix)_{j\cdot},K_{nm}(Q_lix)_{m\cdot}\rangle\Big]\Big\}\,|\det T|\,\mu_{\vec{t}}(dix)=$$

$$=\lim_{l\to\infty}\int\limits_{B_\infty}\tilde{g}_*(TQ_lix)\,p_{\vec{t}}(dx),$$

где

$$\tilde{g}_*(TQ_li\cdot)=\tilde{g}(TQ_li\cdot)\exp\Big\{-\sum_{n=1}^{l}(2t_n)^{-1}\Big[\sum_{j=1}^{l}\langle K_{nj}(Q_li\cdot)_{j\cdot},(Q_li\cdot)_{n\cdot}\rangle+$$

$$+\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{l}\langle K_{nj}(Q_li\cdot)_{j\cdot},K_{nm}(Q_li\cdot)_{m\cdot}\rangle\Big]\Big\}^\sim|\det T|.$$

Поскольку $\{Q_l\}\to I$ в H_∞ сильно, $\tilde{g}_*(TQ_lix)$ непрерывна на B_∞ и ограничена, очевидно

$$g_*(TQ_li\cdot)\to f(T\cdot)\exp\Big\{-\sum_{n=1}^{\infty}(2t_n)^{-1}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}(K_{nj}(\cdot)_{j\cdot},(\cdot)_{n\cdot})+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\langle K_{nj}(\cdot)_{j\cdot},K_{nm}(\cdot)_{m\cdot}\rangle\Big]\Big\}\,|\det T| \tag{7}$$

по вероятности.

Аналогично теореме 1 получаем утверждение теоремы 2.

В связи с наличием взаимно-однозначного соответствия между слабыми распределениями и цилиндрическими мерами определим нормальное бесконечномерное распределение $\vec{n}_\infty = \{n_{t_1}, \dots, n_{t_l}, \dots\}$ с вектором параметров $\vec{t}$ как слабое распределение, соответствующее цилиндрической мере $\mu_{\vec{t}}$ в H_∞. Для $h \in H_\infty$ случайный вектор $\vec{n}_\infty(h)$ имеет нормальное распределение со средним значением 0 и вектором дисперсий: $\{1^{-\alpha} t_1 | h_{1\cdot} |^2, \dots, j^{-\alpha} t_j | h_{j\cdot} |^2, \dots\}$.

Проверка последнего утверждения не представляет трудностей.

Здесь n_{t_j}, $j = \overline{1, \infty}$, — нормальное распределение в H_j с параметром t_j [3, с. 79].

1. *Козак П. П., Чабанюк Я. М.* Інтеграл за вінерівською мірою в нескінченному добутку просторів неперервних функцій багатьох змінних // Допов. АН УРСР. Сер. А.—1981.— № 9.— С. 67—70.
2. *Гаврилів О. С., Козак П. П.* Абстрактний вінерівський інтеграл у нескінченному добутку просторів // Там же.— 1985.— № 7.— С. 9—11.
3. *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах.— М. : Мир, 1979.— 176 с.
4. *Гаврилів О. С., Козак П. П.* Кратний абстрактний вінерівський інтеграл і його властивості // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1985.— № 2.— С. 3—6.
5. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 829 с.

Львов. политехн. ин-т

Получено 07.05.86