УДК 517.941

Г. В. Радзиевский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ РЕГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ*

We study a boundary value problem $x^{(n)}+Fx=\lambda x$, $U_h(x)=0$, $h=1,\ldots,n$, for functions x which are given on the interval $[0,1]$. Here a linear continuous operator F acts from a Hölder space H^γ into a Sobolev space W_1^{n+s} and U_h are linear continuous functionals on the space H^{k_h} with integer nonnegative numbers $k_h \le n+s-1$. We give a notion of κ-regular-boundary conditions $U_h(x)=0$, $h=1,\ldots,n$ and a formula for the eigenvalues of the boundary value problem $\lambda_v = \left(i2\pi v + c_\pm + O\left(|v|^{-\kappa}\right)\right)^n$, $v=\pm N, \pm N\pm 1, \ldots$. This equality, for the upper and lower signs „±", holds true and in this equality the constants $\kappa \ge 0$ and $c_\pm$ depend on the boundary conditions.

Розглядається гранична задача $x^{(n)}+Fx=\lambda x$, $U_h(x)=0$, $h=1,\ldots,n$, де функції x визначені на відрізку $[0,1]$, лінійний неперервний оператор F діє з простору Гельдера H^γ у простір Соболева W_1^{n+s}, а U_h — лінійні неперервні функціонали у просторі H^{k_h} і цілі невід'ємні числа $k_h \le n+s-1$. Введено поняття κ-регулярних граничних умов $U_h(x)=0$, $h=1,\ldots,n$, і для них знайдено наступну асимптотичну формулу для власних значень граничної задачі: $\lambda_v = \left(i2\pi v + c_\pm + O\left(|v|^{-\kappa}\right)\right)^n$, $v=\pm N, \pm N\pm 1, \ldots$, що виконується для верхніх та нижніх наборів знаків „±" і де сталі $\kappa\ge 0$ та $c_\pm$ залежать від граничних умов.

1. Введение. В данной работе приняты те же обозначения, что и в [1]. Отметим лишь, что n — натуральное число, s — целое неотрицательное число, $1 \le p \le \infty$, а H^γ, $0\le\gamma<\infty$, L_p и W_p^n — пространства Гельдера, Лебега и Соболева функций, заданных на отрезке $[0,1]$ (более подробные определения даны в [1], п. 2), и $H:=H^0$; $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$ — множество линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства $\mathfrak{B}_1$ в банахово пространство $\mathfrak{B}_2$ и $[\mathfrak{B}]:=[\mathfrak{B},\mathfrak{B}]$; $\mathfrak{B}^*$ — сопряженное пространство к банахову пространству $\mathfrak{B}$, однако, $H_*^\gamma := (H^\gamma)^*$ и $H_* := H^*$.

Через ∂_t^s обозначается s-я производная по t. Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторое банахово пространство, а оператор $F\in\left[\mathfrak{B}, W_1^s\right]$. Тогда для любого вектора $x\in\mathfrak{B}$ функция $Fx\in W_1^s$ и поэтому определен оператор $\left[\left(\partial^k F\right)x\right](t) := \partial_t^k (Fx)(t)$ и $\partial^k F\in\left[\mathfrak{B}, W_1^{s-k}\right]$, $k=0,\ldots,s$. Но может оказаться, что оператор $\partial^k F$ принадлежит также и совершенно иным множествам операторов. Это показывает пример оператора $(Fx)(t)=x^{(s-1)}(0)$, $x\in W_1^s$.

В работе исследуется краевая задача для функционально-дифференциального выражения $x^{(n)}(t)+(Fx)(t)$, $0\le t\le 1$, в котором при $1\le q\le\infty$ оператор F удовлетворяет требованиям

$$F\in\left[H^\gamma, W_1^s\right],\quad 0\le\gamma<n+s-1-q^{-1}, \tag{1}$$

$$\partial^k F\in\left[H^{\gamma_k}, L_q\right],\quad 0\le\gamma_k<k+n-q^{-1},\quad k=0,\ldots,s-1, \tag{2}$$

* Выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Фонда фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий.

причем при $n=1$ считаем $q>1$, а при $s=0$ не предполагаем выполненными требования (2). По числам γ и γ_k определим постоянную

$$\kappa_q = \min\{n-\gamma_0, \dots, n+s-1-\gamma_{s-1}, n+s-1-\gamma\} - q^{-1} \tag{3}$$

и $\kappa_q = n-1-\gamma-q^{-1}$, если $s=0$.

Пусть U_h — линейный ограниченный функционал на пространстве H^{k_h}, где k_h — целое неотрицательное число и $k_h \le n+s-1$, $h=1, \dots, n$. Тогда равенство $U_h(x)=0$, $x \in W_1^{n+s}$, называется краевым условием; задача

$$x^{(n)} + Fx + \rho^n x = 0, \quad U_1(x) = 0, \dots, U_n(x) = 0, \quad x \in W_1^{n+s}, \tag{4}$$

— краевой задачей; число k_h — порядком краевого условия $U_h(x)=0$, $\hat{k} = k_1 + \dots + k_n$ — суммарным порядком краевых условий задачи (4).

В ряде частных случаев краевая задача (4) исследовалась ранее многими авторами (см., например, книги [2], ч. I; [3], гл. XIX; [4], ч. II, гл. 1; [5], гл. 1; [6, 7], а также работы [8–16] и цитированную в них литературу). Сравнение с некоторыми результатами из этих работ приведено в п. 2.

Работа состоит из шести пунктов. В п. 2 дано понятие κ-регулярных краевых условий и сформулирована основная теорема об асимптотике собственных значений задачи (4), доказательство которой приведено в п. 6. Этому доказательству предшествует ряд вспомогательных построений и утверждений. В п. 3 построен характеристический определитель краевой задачи, связанной с аналитически зависящим от параметра оператором F. Такой подход к понятию характеристического определителя оказался удобным по следующим причинам. Во-первых, известно (см., например, [7, с. 31]), что для функционально-дифференциального уравнения задача Коши не всегда имеет решение, а если она и имеет такое решение, то оно может быть не единственным или может не зависеть аналитически от параметра. Но именно на указанных свойствах задачи Коши основано построение характеристического определителя для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [2, с. 24–30; 4, с. 193–194]). Во-вторых, даже в рамках данной работы оказывается неудобным ограничиваться вхождением спектрального параметра ρ в краевую задачу, как это было в задаче (4). Это обусловлено, например, тем, что цепочки корневых функций задачи (4), отвечающие собственному значению ρ_0, отличаются от цепочек корневых функций задачи $x^{(n)} + Fx = \lambda x$, $U_h(x)=0$, $h=1, \dots, n$, отвечающих собственному значению $\lambda_0 = -\rho_0^n$. В-третьих, в случае, когда характеристический определитель строится по решениям уравнения $\mathcal{L}(\rho)x=0$, где оператор-функция $\mathcal{L}(\rho)$ принимает свои значения во множестве фредгольмовых операторов (а именно такой является оператор-функция $\mathcal{L}(\rho)x = x^{(n)} + Fx + \rho^n x$), то к этому определителю непосредственно применима хорошо развитая теория таких оператор-функций. В п. 4 приведены факты, относящиеся к теории аналитических функций, а в п. 5 установлены свойства специального вида определителей, связанных с понятием регулярности краевых условий. Эти вспомогательные факты и свойства позволили исследовать в п. 6 нули характеристического определителя краевой задачи (4). Это исследование отличается от случая обыкновенного дифференциального уравнения и двуточечных краевых условий, так как, во-первых, если краевые условия заданы в виде функционалов, то они существенно ухудшают асимптотическое поведение характеристического определителя в полуполосах, содержащих собственные значения; во-вторых, для функционально-дифференциального уравнения $x^{(n)} + Fx + \rho^n x = 0$, вообще говоря, не существует асимптотики фундаментальной системы решений в тех же углах и того же вида, что и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений (см. пример 3 в работе [17]).

2. Формулировка основных результатов. Вначале введем понятие регулярных краевых условий простейшего вида

$$a_h x^{(k_h)}(0) + b_h x^{(k_h)}(1) = 0, \quad h = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — корни n-й степени из -1, занумерованные так, что

$$\operatorname{Re}\rho\omega_1 \le \operatorname{Re}\rho\omega_2 \le \ldots \le \operatorname{Re}\rho\omega_n, \quad \rho \ne 0, \quad 0 \le \arg\rho \le \pi/n, \tag{6}$$

где $\rho = |\rho| \exp(i \arg\rho)$, а $-\pi < \arg\rho \le \pi$. Такая нумерация корней ω_j существует и эти корни указаны в равенствах (35) и (36).

По коэффициентам a_h и b_h, входящим в краевые условия (5), введем числа θ_{-1}, θ_0 и θ_1, заданные равенствами: если $n = 1$, то число θ_{-1} не определяется, а $\theta_0 = a_1$, $\theta_1 = b_1$; при $l = -1, 0, 1$ и $n = 2, 3, \ldots$

$$\theta_l = \det\left\{\theta_{h,j}^{(l)}\right\}_{h,j=1}^{n}, \quad \text{где} \quad \theta_{h,j}^{(l)} = \begin{cases} a_h\omega_j^{k_h}, & j \le [(n+1)/2] - l; \\ b_h\omega_j^{k_h}, & j > [(n+1)/2] - l, \end{cases} \tag{7}$$

причем если одно из подмножеств множества индексов $j = 1, \ldots, n$, выделяемое неравенством $j \le [(n+1)/2] - l$ или $j > [(n+1)/2] - l$, пусто, то матрица $\left\{\theta_{h,j}^{(l)}\right\}_{h,j=1}^{n}$ состоит лишь из элементов $b_h\omega_j^{k_h}$ или $a_h\omega_j^{k_h}$ соответственно.

Определение 1. *Краевые условия* (5) *называются регулярными, если построенные по их коэффициентам числа* θ_0 *и* θ_1 *удовлетворяют следующим требованиям:* 1) n *— нечетно и* $\theta_0\theta_1 \ne 0$; 2) n *— четно и* $\theta_0 \ne 0$.

В замечании 5 установлена равносильность данного определения регулярных краевых условий (5) при $k_h \le n - 1$ и соответствующего понятия из книг [2, с. 66–67; 4, с. 196–197], хотя дополнительных предположений в определении 1 меньше (см. также работу [18] и замечание 11.6 из [19]).

Определение 2. *Пусть функционалы* $U_h \in H_*^{k_h}$, *где* k_h *— целые неотрицательные числа. Тогда краевые условия* $U_h(x) = 0$, $h = 1, \ldots, n$, *называются регулярными, если регулярными в смысле определения* 1 *являются простейшие краевые условия* (5), *построенные по числам* k_h *и числам*

$$a_h = \lim_{\xi\to-\infty} \xi^{-k_h} U_h(e^{\xi t}), \quad b_h = \lim_{\xi\to+\infty} \xi^{-k_h} e^{-\xi} U_h(e^{\xi t}). \tag{8}$$

Существование этих пределов вытекает из следующих двух утверждений.

Утверждение 1. *Пусть* k *— целое неотрицательное число. Тогда каждый элемент* $U \in H_*^k$ *однозначно представим в виде*

$$U(x) = ax^{(k)}(0) + bx^{(k)}(1) + \int_0^1 x^{(k)}(t)\,d\sigma(t) + \sum_{l<k} c_l x^{(l)}(0), \quad x \in H^k,$$

где σ *— функция ограниченной вариации на* $[0, 1]$, *непрерывная справа в каждой точке полуинтервала* $[0, 1)$ *и непрерывная слева в* 1.

Утверждение 2. *Пусть* σ *— функция ограниченной вариации на отрезке* $[0, 1]$, *непрерывная в точках* 0 *и* 1. *Тогда*

$$\sup_{\operatorname{Re}\rho\le\xi} \left| \int_0^1 e^{\rho t}\,d\sigma(t) \right| = o\left(e^{\max\{\xi, 0\}}\right), \quad \xi \to \pm\infty, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Из теоремы Ф. Рисса об общем виде линейного функционала на пространстве $H(\doteq C(0,1))$ следует (см., например, [20, с. 374]), что функционал $U \in$ $\in H_*^k$ однозначно представим в виде

$$U(x) = \int_0^1 x^{(k)}(t)\,d\tilde{\sigma}(t) + \sum_{l<k} c_l x^{(l)}(0), \quad x \in H^k,$$

где $\tilde{\sigma}$ — функция ограниченной вариации, непрерывная справа при $0<t<1$. Из этого равенства, выделяя возможные скачки функции $\tilde{\sigma}$ в точках 0 и 1, т. е. полагая $a = \tilde{\sigma}(0+0) - \tilde{\sigma}(0)$, $b = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(1-0)$, получаем утверждение 1.

Справедливость утверждения 2 показывается стандартными рассуждениями (см., например, [11, с. 66]).

Пределы (8) учитывают поведение целых по ρ функций $U_h(e^{\rho t})$ на вещественной оси. В следующем определении, выделяющем два подкласса регулярных краевых условий, учитывается еще и поведение функций $U_h(e^{\rho t})$ на мнимой оси.

Определение 3. *Пусть число* $\kappa \ge 0$, *а функционалы* $U_h \in H_*^{k_h}$, *где* k_h, $h = 1, \ldots, n$, *— целые неотрицательные числа, задают регулярные в смысле определения* 2 *краевые условия. Пусть числа* a_h *и* b_h *те же, что и в* (8). *Тогда если*

$$\left| U_h(e^{i\zeta t}) - (i\zeta)^{k_h} a_h - (i\zeta)^{k_h} e^{i\zeta} b_h \right| \le c_l (1+|\zeta|)^{k_h - \kappa}, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

$h = 1, \ldots, n$, *то краевые условия называются* κ-*регулярными.*

Если же

$$\lim_{\zeta \to \pm\infty,\, \zeta \in \mathbb{R}} |\zeta|^{\kappa - k_h} \left| U_h(e^{i\zeta t}) - (i\zeta)^{k_h} a_h - (i\zeta)^{k_h} e^{i\zeta} b_h \right| = 0, \tag{10}$$

$h = 1, \ldots, n$, *то краевые условия называются* $(o-\kappa)$-*регулярными.*

Из утверждения 1 следует, что регулярные краевые условия всегда являются 0-регулярными. В конце этого пункта имеется пример 2, показывающий существование κ- и $(o-\kappa)$-регулярных краевых условий для любого $\kappa \ge 0$. Анализ связи требований (9) или (10) с требованием (8) проведен в замечании 4 из п. 4.

И наконец, введем понятие собственного значения и его кратности. Далее через Ω обозначается область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а через $\mathfrak{R}(A)$ и $\mathfrak{Z}(A)$ — область значений и ядро оператора A. Пусть $L(\rho)$ — аналитически зависящая от $\rho \in \Omega$ функция со значениями в $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}]$. Тогда элементы $y_0, \ldots, y_d$ из $\mathfrak{B}_1$ называются *цепочкой корневых (или собственного и присоединенных к нему) векторов*, отвечающих *собственному значению* $\rho_0 \in \Omega$, если *собственный вектор* $y_0 \ne 0$ и

$$\sum_{l=0}^{r} \frac{1}{(r-l)!} \frac{d^{r-l} L(\rho)}{d\rho^{r-l}} \bigg|_{\rho=\rho_0} y_l = 0, \quad r = 0, \ldots, d;$$

элемент y_r — *присоединенный* (или корневой) вектор порядка r. Каждому собственному вектору $y \in \mathfrak{Z}(L(\rho_0))$ оператор-функции $L(\rho)$ поставим в соответствие число d, равное максимальному порядку присоединенных к y элементов. Величина $d+1$ называется *кратностью собственного вектора* y. В случае, когда собственный вектор y имеет присоединенные векторы сколь угодно большого порядка r, считаем его кратность равной бесконечности. *Кратностью собственного значения* $\rho_0 \in \Omega$ оператор-функции $L(\rho)$ называется величина $N(\rho_0, L)$, равная максимальному значению суммы кратностей линейно независимых собственных векторов, отвечающих этому собственному значению ρ_0. Если хотя бы один из собственных векторов $y \in \mathfrak{Z}(L(\rho_0))$ имеет бесконечную кратность либо $\dim \mathfrak{Z}(L(\rho_0)) = \infty$, то считаем $N(\rho_0, L) = \infty$. В случае, когда у оператор-функции $L(\rho)$ имеется счетное число собственных значений и все они имеют конечные кратности, каждое собственное значение нумеруется столько раз, какова его кратность.

Далее потребуется следующее простое утверждение.

Утверждение 3. *Пусть* $\lambda(\rho)$ — *такая аналитическая в точке* μ *функция, что* $\lambda(\mu) = \rho_0$ *и* $\rho_0 \in \Omega$. *Тогда* μ *является собственным значением оператор-функции* $\hat{L}(\rho) := L(\lambda(\rho))$ *в том и только в том случае, когда* ρ_0 *является собственным значением оператор-функции* $L(\rho)$; *причем если* $\lambda'(\mu) \neq 0$, *то* $N(\rho, L) = N(\mu, \hat{L})$.

Доказательство основано на связи цепочек корневых векторов оператор-функций $L(\rho)$ и $\hat{L}(\rho)$, указанной в доказательстве леммы 1.9 из работы [21].

***Замечание* 1.** Обозначим через $W_{1,U}^{n+s}$ подпространство пространства W_1^{n+s}, состоящее из функций $x \in W_1^{n+s}$, удовлетворяющих краевым условиям $U_h(x) = 0$, $h = 1, \ldots, n$, задачи (4), и пусть $\lambda(\rho)$ — аналитическая по $\rho \in \Omega$ функция. Тогда ввиду вложения пространства $W_{1,U}^{n+s}$ в пространство H^γ, $\gamma \leq n + s - 1$, из требования (1) следует аналитичность по $\rho \in \Omega$ оператор-функции $L(\rho)$, заданной правилом $L(\rho)x = x^{(n)} + Fx + \lambda(\rho)x$, $x \in W_{1,U}^{n+s}$, причем значения $L(\rho) \in \left[W_{1,U}^{n+s}, W_1^s\right]$. Именно собственные значения и их кратности оператор-функции $L(\rho)$ являются по определению собственными значениями и их кратностями краевой задачи $x^{(n)} + Fx + \lambda(\rho)x = 0$, $U_1(x) = 0, \ldots, U_n(x) = 0$, $x \in W_1^{n+s}$. Полагая теперь функцию $\lambda(\rho) = \rho^n$, получаем определение собственных значений и их кратностей, используемое для краевой задачи (4).

Сформулируем основной результат работы, в котором $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ для $z \neq 0$, а $\hat{k}$ — суммарный порядок краевых условий задачи (4).

Теорема 1. *Пусть оператор* F *удовлетворяет требованиям* (1) *и* (2), *а краевые условия* $U_h(x) = 0$, $h = 1, \ldots, n$, — *κ-регулярны в смысле определения* 3 *и* $0 \leq \kappa \leq \kappa_q$, *где число* κ_q *задано формулой* (3). *Тогда краевая задача* (4) *имеет бесконечное число собственных значений, все они имеют конечные кратности и единственной их предельной точкой является бесконечность. Все достаточно большие по модулю собственные значения можно занумеровать так, что они представимы в виде*:

1) *в случае нечетного* n

$$\rho_{j,v}^{(1)} = \omega_j \left\{ (i)^n 2\pi\left(v - \frac{\hat{k}}{n}\right) - \ln\left(-\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + O(v^{-\kappa}) \right\},$$

$$v = N + \left[\frac{\hat{k}}{n}\right],\ N + \left[\frac{\hat{k}}{n}\right] + 1, \ldots, \tag{11}$$

$$\rho_{j,v}^{(2)} = \omega_j \left\{ (i)^{n+2} 2\pi v - \ln\left(-\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + O(v^{-\kappa}) \right\},\quad v = N, N+1, \ldots,$$

где $j = 1, \ldots, n$, *а* N — *некоторое натуральное число;*

2) *в случае четного* n

$$\rho_{j,v}^{(1)} = \omega_j\left\{(i)^{n-1}2\pi v + \ln z_1 + O(v^{-\kappa/2})\right\},$$
$$\rho_{j,v}^{(2)} = \omega_j\left\{(i)^{n-1}2\pi v + \ln z_2 + O(v^{-\kappa/2})\right\},\ v = N,\ N+1, \ldots, \tag{12}$$

где $j = 1, \ldots, n$, N — *некоторое натуральное число, а* z_1 *и* z_2 — *корни уравнения*

$$\theta_0 + z(\theta_{-1} + \theta_1) - z^2\theta_0\exp\left((i)^{n-1}2\pi\hat{k}/n\right) = 0. \tag{13}$$

Если это уравнение имеет два различных корня, то формулы (12) *справедливы при замене в них* $O\left(v^{-\kappa/2}\right)$ *на* $O(v^{-\kappa})$.

Если в условиях теоремы требование κ*-регулярности краевых условий заменить на требование их* $(o-\kappa)$*-регулярности с* $0 \le \kappa < \kappa_q$, *то все предыдущие утверждения справедливы при замене в них* $O(v^{-\kappa})$ *и* $O\left(v^{-\kappa/2}\right)$ *соответственно на* $o(v^{-\kappa})$ *и* $o\left(v^{-\kappa/2}\right)$.

Из этой теоремы и утверждения 3 вытекает такое предложение.

***Следствие* 1.** *Пусть оператор* F *и краевые условия* $U_h(x) = 0$, $h = 1, \ldots$ $\ldots, n$, *удовлетворяют требованиям теоремы* 1. *Тогда краевая задача*

$$x^{(n)} + Fx = \lambda x, \quad U_1(x) = 0, \ldots, U_n(x) = 0, \quad x \in W_1^{n+s}, \tag{14}$$

имеет бесконечное число собственных значений, все они имеют конечные кратности и единственной их предельной точкой является бесконечность. Все достаточно большие по модулю собственные значения этой краевой задачи можно занумеровать так, что они представимы в виде $\lambda_v^{(1)} = -\left(\rho_{1,v}^{(1)}\right)^n$, $\lambda_v^{(2)} = -\left(\rho_{1,v}^{(2)}\right)^n$, *где числа* $\rho_{1,v}^{(1)}$ *и* $\rho_{1,v}^{(2)}$ *заданы при индексе* $j = 1$ *формулой* (11) *или* (12) *в зависимости от нечетности или четности* n.

Если в задаче (14) считать F обыкновенным дифференциальным оператором порядка $n-2$ с суммируемыми коэффициентами, а краевые условия $U_h(x) := \sum_{l \le k_h}\left(a_{h,l}x^{(l)}(0) + b_{h,l}x^{(l)}(1)\right) = 0$, $h = 1, \ldots, n$, то соответствующие этой задаче числа $s = 0$ и $\kappa_\infty = \kappa = 1$. В этом случае для задачи (14) из формул (11), (12) и из следствия 1 получаются известные формулы для собственных значений, имеющиеся, например, в [2, с. 74–75]. Очевидно, что формулы, приведенные в аннотации к данной работе, вытекают из формул (11), (12) и из следствия 1.

При κ-регулярных с $\kappa > 0$ или при $(0-\kappa)$-регулярных с $\kappa \ge 0$ краевых условиях формулы (11) и (12) показывают, что все достаточно большие по модулю собственные значения задач (4) и (14) — однократные, если n — нечетно, и не более чем двукратные, если n — четно, причем если n — четно и уравнение (13) имеет два различных корня, то указанные собственные значения будут однократными. Следовательно, единственным возможным случаем, когда кратность достаточно больших по модулю собственных значений может превышать 1 для нечетного n и превышать 2 для четного n, является случай 0-регулярных (в смысле определения 3) или, что то же самое, случай просто регулярных (в смысле определения 2) краевых условий. В этом частном случае теорема 1 примет такой вид.

***Следствие* 2.** *Пусть оператор* F *удовлетворяет требованиям* (1) *и* (2), *а краевые условия* $U_h(x) = 0$, $h = 1, \ldots, n$, *регулярны в смысле определения* 2. *Тогда все собственные значения задачи* (4) *допускают представление*:

1) *в случае нечетного* n

$$\rho_{j,v} = i\omega_j 2\pi v + O(1), \quad j = 1, \dots, n, \quad v = 0, \pm 1, \dots; \tag{15}$$

2) *в случае четного* n

$$\rho_{j,v} = i\omega_j \pi v + O(1), \quad j = 1, \dots, n, \quad v = 1, 2, \dots . \tag{16}$$

Если порядки k_h краевых условий меньше чем $n-1$, а F — обыкновенный дифференциальный оператор порядка $n-2$ или F удовлетворяет требованию (1) при $n \geq 2$ и $s = 0$, то утверждение следствия 2 получено соответственно в работах [12] (лемма 2), или [15] (теорема 3).

Из формул (15) и (16) вытекает, что в случае регулярных краевых условий кратности собственных значений задач (4) и (14) ограничены в совокупности одним и тем же числом, естественно, зависящим от краевой задачи. Покажем, что все эти кратности могут быть равны произвольному наперед заданному числу.

***Пример* 1.** Пусть, для простоты, в краевой задаче (4) $n = 1$, оператор $F = 0$, а регулярное краевое условие

$$U_1(x) := \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} x\left(\frac{l}{m}\right) = 0,$$

где m — некоторое натуральное число. Фундаментальным решением уравнения $x' + \rho x = 0$ является функция $e^{-\rho t}$ и в данном случае несложно показать (см. также теорему 2), что собственные значения и их кратности краевой задачи $x' + \rho x = 0$, $U_1(x) = 0$, $x \in W_1^1$, совпадают с нулями и их кратностями функции $U_1(e^{-\rho t}) \equiv (1 - e^{-\rho/m})^m$. Т. е. числа $i2\pi m v$, $v = 0, \pm 1, \dots$, являются собственными значениями рассмотренной здесь регулярной краевой задачи, а все их кратности равны m.

***Пример* 2.** Покажем, что для произвольного числа $\kappa \geq 0$ существуют как κ-, так и $(o - \kappa)$-регулярные краевые условия. Соответствующие построения, для краткости, проведем в случае одного краевого условия. Введем функции

$$g_{0,\alpha}(t) = \frac{w(t)}{t^\alpha}, \quad g_{l,\alpha}(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{l-1}}{(l-1)!\tau^\alpha} w(\tau)\, d\tau, \quad l = 1, 2, \dots,$$

считая $0 < \alpha < 1$, а w — функцией ограниченной вариации на $[0, 1]$ и непрерывной в нуле. Пусть $p_0(t) \equiv 0$. Известно (см., например, [22, с. 328–330]), что для любого натурального l существует такой полином степени $2l - 1$, что $p_l^{(s)}(0) = 0$, $s = 0, \dots, l-1$, $p_l^{(s)}(1) = g_{l-s,\alpha}(1)$, $s = 0, \dots, l-1$. Введем функционал

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\big(g_{l,\alpha}(t) + p_l(t)\big)\, dt, \quad x \in H.$$

Так как функция $g_{l,\alpha} + p_l \in L_1$, то $f \in H_*$. Учитывая вид функций $g_{l,\alpha}$ и свойства полиномов p_l, интегрированием по частям выводим равенство

$$f(e^{i\zeta t}) = \frac{(-1)^l}{(i\zeta)^l} \int_0^1 e^{i\zeta t} \frac{w(t)}{t^\alpha}\, dt.$$

Записывая при вещественном ζ функцию $e^{i\zeta t} = \cos \zeta t + i \sin \zeta t$ и применяя теорему 126 из [23, с. 227] для косинус- и синус-преобразований Фурье, получаем соотношение

$$f(e^{i\zeta t}) \sim |\zeta|^{-l+\alpha-1} w(0) \Gamma(1-\alpha)(i)^{l + \operatorname{sign}\zeta} e^{-i\pi\alpha \operatorname{sign}\zeta/2}, \quad \zeta \to \pm\infty, \quad \zeta \in \mathbb{R},$$

где $\operatorname{sign}\zeta=1$, если $\zeta>0$, и $\operatorname{sign}\zeta=-1$, если $\zeta<0$. Поэтому краевое условие $U_1(x):=x(0)+\dot{x}(1)+f(x)=0$ является κ-регулярным, когда $w(0)\neq 0$, и $(o-\kappa)$-регулярным, когда $w(0)=0$, где $\kappa=l+1-\alpha$. Для функции $w(t)=$ $=(1+\ln t^{-1})^{-1}$ это краевое условие не является κ-регулярным ни при каком $\kappa>l+1-\alpha$. Учитывая произвольность чисел $l=0,1,\ldots$ и $0<\alpha<1$, заключаем, что для нецелого $\kappa>0$ всегда существуют κ- и $(o-\kappa)$-регулярные краевые условия. Для целого κ соответствующие краевые условия строятся проще и поэтому эти построения здесь опускаем.

3. Характеристический определитель краевой задачи. Приведенная в замечании 1 процедура сведения понятия корневого вектора (функции) краевой задачи (4) к аналогичному понятию для оператор-функции $L(\rho)$ оказалась возможной благодаря независимости от ρ краевых условий в (4). Если же эти условия зависят от параметра, то удобно пользоваться следующими определениями.

Пусть $\mathcal{L}(\rho)$ — аналитически зависящая от параметра $\rho\in\Omega$ оператор-функция со значениями в $[\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2]$, а $U_1(\rho),\ldots,U_n(\rho)$ — линейные непрерывные функционалы на пространстве $\mathfrak{B}_1$, также аналитически зависящие от $\rho\in\Omega$. Тогда задачу

$$\mathcal{L}(\rho)x=0,\quad U_1(\rho,x)=0,\ldots,U_n(\rho,x)=0 \tag{17}$$

(где $U_h(\rho,x)$ — значение функционала $U_h(\rho)$ на элементе x) будем называть краевой задачей для выражения $\mathcal{L}(\rho)$ при краевых условиях $U_h(\rho,x)=0$, $h=$ $=1,\ldots,n$. Обозначим через $\mathfrak{B}_2\oplus\mathbb{C}^n$ прямую сумму банахова пространства $\mathfrak{B}_2$ и n-мерного пространства $\mathbb{C}^n$, наделенного какой-либо нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n}$. Т. е. $\mathfrak{B}_2\oplus\mathbb{C}^n$ — множество элементов вида $\{y,c\}$, где $y\in\mathfrak{B}$, $c\in\mathbb{C}^n$, с нормой $\|\{y,c\}\|_{\mathfrak{B}_2\oplus\mathbb{C}^n}=\left(\|y\|^2_{\mathfrak{B}_2}+\|c\|^2_{\mathbb{C}^n}\right)^{1/2}$. Введем оператор $L(\rho)$, действующий на векторе $x\in\mathfrak{B}_1$ по правилу

$$L(\rho)x=\{\mathcal{L}(\rho)x,U_1(\rho,x),\ldots,U_n(\rho,x)\}\in\mathfrak{B}_2\oplus\mathbb{C}^n.$$

Тогда аналитически зависящую от $\rho\in\Omega$ оператор-функцию $\mathcal{L}(\rho)$ будем называть *ассоциированной с краевой задачей* (17), а ее собственные значения и корневые векторы — собственными значениями и корневыми векторами задачи (17). Тем самым векторы $y_0,\ldots,y_d$ образуют цепочку корневых векторов, отвечающую собственному значению ρ_0 краевой задачи (17), в том и только в том случае, когда эти векторы одновременно образуют цепочку корневых векторов, отвечающую собственному значению ρ_0, как оператор-функции $\mathcal{L}(\rho)$, так и функционалов $U_1(\rho),\ldots,U_n(\rho)$. Аналогично по ассоциированной оператор-функции определяются кратности собственных значений краевой задачи (17) и для них $N(\rho_0;\mathcal{L},U_h):=N(\rho_0,L)$.

Отметим, что краевые задачи (4) и (14) записываются в виде краевой задачи (17) и тогда понятия их собственного значения и его кратности, данные здесь, совпадают с соответствующими понятиями, данными в замечании 1.

Введем теперь определения, необходимые для построения характеристического определителя задачи (17). Пусть $\dim\mathfrak{Z}(\mathcal{L}(\rho_0))=n<\infty$ в некоторой точке $\rho_0\in\Omega$. Тогда векторы $x_1(\rho_0),\ldots,x_n(\rho_0)$ из $\mathfrak{B}_1$ называются фундаментальной системой решений уравнения $\mathcal{L}(\rho_0)x=0$, если они образуют базис конечномерного подпространства $\mathfrak{Z}(\mathcal{L}(\rho_0))$. Подобласть Ψ области Ω назовем

n-областью уравнения $\mathcal{L}(\rho)x=0$, если $\dim \mathfrak{Z}(\mathcal{L}(\rho))=n$, $\rho \in \Psi$, и у уравнения $\mathcal{L}(\rho)x=0$ существует аналитическая по $\rho \in \Psi$ фундаментальная системы решений $x_1(\rho), \ldots, x_n(\rho)$. В n-области Ψ уравнения $\mathcal{L}(\rho)x=0$ определен *характеристический определитель задачи* (17), т. е. аналитическая в Ψ функция

$$\Delta(\rho) = \det\left\{U_h\big(\rho, x_j(\rho)\big)\right\}_{h,\,j=1}^{n}, \tag{18}$$

которая, естественно, зависит от выбора аналитической фундаментальной системы решений уравнения $\mathcal{L}(\rho)x=0$. Тем не менее нули характеристического определителя не зависят от выбора той или иной фундаментальной системы решений этого уравнения. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть подобласть Ψ области Ω является n-областью для уравнения $\mathcal{L}(\rho)x=0$, $x_1(\rho), \ldots, x_n(\rho)$ — аналитически зависящая от $\rho \in \Psi$ фундаментальная система решений этого уравнения, а $\Delta(\rho)$ — характеристический определитель задачи* (17), *заданный равенством* (18). *Тогда $\Delta(\rho) \equiv \equiv 0$ в Ψ в том и только в том случае, когда все точки $\rho \in \Psi$ являются собственными значениями задачи* (17). *Если же функция $\Delta(\rho)$ не тождественно равна нулю, то ее нули и их кратности совпадают соответственно с собственными значениями и их кратностями задачи* (17).

Установим вначале первое утверждение теоремы. Пусть $x_1(\rho_0), \ldots, x_n(\rho_0)$ — фундаментальная система решений уравнения $\mathcal{L}(\rho_0)x=0$, а y_0 — собственный вектор, отвечающий собственному значению ρ_0 задачи (17). Это означает, что $\mathcal{L}(\rho_0)y_0=0$, $U_h(\rho_0, y_0)=0$, $h=1, \ldots, n$, и $y_0=c_1x_1(\rho_0)+\ldots$ $\ldots+c_nx_n(\rho_0)$, причем не все коэффициенты c_j равны нулю. Подставляя вектор y_0 в равенства $U_h(\rho_0, y_0)=0$, заключаем, что система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} c_j U_h\big(\rho_0, x_j(\rho_0)\big) = 0, \quad h = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

имеет отличное от нуля решение $c_1, \ldots, c_n$. Тем самым определитель этой системы, совпадающий с $\Delta(\rho_0)$, равен нулю. Аналогично показывается, что если $\Delta(\rho_0)=0$, то построенный по ненулевому решению $c_1, \ldots, c_n$ системы (19) вектор y_0 является собственным вектором задачи (17), что и завершает доказательство первого утверждения теоремы.

Доказательству второго утверждения предпошлем ряд вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Пусть Ψ — n-область уравнения $\mathcal{L}(\rho)x=0$, а $y_0, \ldots, y_d$ — цепочка корневых векторов, отвечающая собственному значению $\rho_0 \in \Psi$ задачи* (17). *Тогда найдется такое решение $z(\rho)$ уравнения $\mathcal{L}(\rho)z=0$, аналитическое по $\rho \in \Psi$, что*

$$y_l = (l!)^{-1} z^{(l)}(\rho_0), \quad l = 0, \ldots, d. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $x_1(\rho), \ldots, x_n(\rho)$ — какая-либо аналитическая по $\rho \in \Psi$ фундаментальная система решений уравнения $\mathcal{L}(\rho)x=0$. При $l=0$ равенство (20) следует из того, что вектор y_0 линейно выражается через векторы $x_1(\rho_0), \ldots, x_n(\rho_0)$. Предположим теперь, что равенство (20) установлено для некоторого аналитического по $\rho \in \Psi$ решения $z(\rho)$ уравнения $\mathcal{L}(\rho)z=0$ и для индексов $l=0, \ldots, k$, а $k<d$. Дифференцируя $k+1$ раз тождество $\mathcal{L}(\rho)z(\rho)=0$, $\rho \in \Psi$, и подставляя в него равенства (20), справедливые по предположению при $l=0, \ldots, k$, получаем

$$\frac{1}{(k+1)!}\mathcal{L}(\rho_0)z^{(k+1)}(\rho_0) + \sum_{l=0}^{k}\frac{1}{(k+1-l)!}\mathcal{L}^{(k+1-l)}(\rho_0)y_l = 0. \tag{21}$$

Элементы $y_0, \ldots, y_{k+1}$ образуют цепочку корневых векторов, отвечающую собственному значению ρ_0 задачи (17), поэтому

$$\mathcal{L}(\rho_0)y_{k+1} + \sum_{l=0}^{k}\frac{1}{(k+1-l)!}\mathcal{L}^{(k+1-l)}(\rho_0)y_l = 0.$$

Вычитая из этого равенства равенство (21), получаем, что вектор $y_{k+1} - \frac{1}{(k+1)!}z^{(k+1)}(\rho_0)$ является решением уравнения $\mathcal{L}(\rho_0)x=0$, а значит, найдутся такие числа $c_1, \ldots, c_n$, для которых

$$y_{k+1} - \frac{1}{(k+1)!}z^{(k+1)}(\rho_0) = c_1x_1(\rho_0) + \ldots + c_nx_n(\rho_0).$$

Рассматривая решение

$$\hat{z}(\rho) = z(\rho) + (\rho-\rho_0)^{k+1}(c_1x_1(\rho) + \ldots + c_nx_n(\rho))$$

уравнения $\mathcal{L}(\rho)z=0$, заключаем, что для него справедливы равенства (20) при $l=0, \ldots, k+1$, что и завершает доказательство леммы.

Лемма 2. *Пусть линейно независимые векторы $x_1(\rho), \ldots, x_n(\rho)$ из банахова пространства $\mathfrak{B}$ аналитически зависят от $\rho\in\Psi$. Тогда для каждой точки $\rho_0\in\Psi$ найдется такая ее окрестность $V(\rho_0)$ и такие аналитические по $\rho\in V(\rho_0)$ функционалы $f_1(\rho), \ldots, f_n(\rho)$ из $\mathfrak{B}^*$, что*

$$f_h(\rho, x_j(\rho)) = \delta_{h,j}, \quad \rho\in V(\rho_0), \quad h,j = 1, \ldots, n,$$

где $\delta_{h,j}$ — символ Кронекера.

Доказательство. Ввиду линейной независимости векторов $x_1(\rho_0), \ldots, x_n(\rho_0)$ существует (см., например, [24, с. 170]) такая система функционалов $f_1, \ldots, f_n$ из $\mathfrak{B}^*$, что $f_h(x_j(\rho_0))=\delta_{h,j}$. Поэтому аналитическая по $\rho\in\Psi$ матрица $\Gamma(\rho)=\left\{f_h(x_j(\rho))\right\}_{h,j=1}^{n}$ совпадает при $\rho=\rho_0$ с единичной и, следовательно, ее определитель отличен от нуля в некоторой окрестности $V(\rho_0)$ точки ρ_0. Рассмотрим аналитическую по $\rho\in V(\rho_0)$ вектор-функцию, зависящую также от вектора $z\in\mathfrak{B}$,

$$v(\rho;z) = \frac{1}{\det\Gamma(\rho)}\det\left\{\begin{array}{ccccc} z & f_1(z) & f_2(z) & \ldots & f_n(z)\\ x_1(\rho) & f_1(x_1(\rho)) & f_2(x_1(\rho)) & \ldots & f_n(x_1(\rho))\\ x_2(\rho) & f_1(x_2(\rho)) & f_2(x_2(\rho)) & \ldots & f_n(x_2(\rho))\\ \hdashline x_n(\rho) & f_1(x_n(\rho)) & f_2(x_n(\rho)) & \ldots & f_n(x_n(\rho))\end{array}\right\},$$

где второй векторный сомножитель понимается как формальное разложение определителя по первому столбцу. Тем самым

$$v(\rho;z) = z - \sum_{h=1}^{n}x_h(\rho)\sum_{l=1}^{n}c_{h,l}(\rho)f_l(z), \tag{22}$$

где коэффициенты $c_{h,l}(\rho)$ совпадают с минорами порядка $n-1$ матрицы

$\Gamma(\rho)$, деленными на $\det\Gamma(\rho)$ либо $-\det\Gamma(\rho)$. Т. е. $c_{h,l}(\rho)$ — аналитические по $\rho\in V(\rho_0)$ функции и поэтому функционалы

$$f_h(\rho) := \sum_{l=1}^{n} c_{h,l}(\rho) f_l$$

аналитически зависят от $\rho\in V(\rho_0)$. Из определения функции $v(\rho;z)$ вытекает, что $v(\rho, x_j(\rho))=0$, $\rho\in V(\rho_0)$, $j=1,\ldots,n$. Отсюда и из равенства (22) с учетом линейной независимости векторов $x_1(\rho),\ldots,x_n(\rho)$ при $\rho\in\Psi$ получаем утверждение леммы.

***Следствие* 3.** *Пусть вектор-функции* $x_1(\rho),\ldots,x_n(\rho)$ *и* $z(\rho)$ *со значениями в пространстве* $\mathfrak{B}$ *аналитически зависят от* $\rho\in\Psi$, *причем векторы* $x_1(\rho),\ldots,x_n(\rho)$ *линейно независимы при каждом* $\rho\in\Psi$ *и*

$$z(\rho) = c_1(\rho)x_1(\rho)+\ldots+c_n(\rho)x_n(\rho),\quad \rho\in\Psi.$$

Тогда все коэффициенты $c_1(\rho),\ \ldots,\ c_n(\rho)$ *являются аналитическими в области* Ψ *функциями.*

Доказательство. Пусть ρ_0 — произвольная точка области Ψ, а окрестность $V(\rho_0)$ и функционалы $f_h(\rho)$ те же, что и в утверждении леммы 2. Тогда коэффициент $c_h(\rho)=f_h(\rho, z(\rho))$, $\rho\in V(\rho_0)$, и поэтому он является аналитической в окрестности $V(\rho_0)$ функцией. Отсюда в силу произвольности выбора точки $\rho_0\in\Psi$ получаем утверждение следствия.

Лемма 3. *Пусть* Ψ — *n-область уравнения* $\mathcal{L}(\rho)x=0$, $y_{0,p},\ldots,y_{d_p,p}$ — *цепочки корневых векторов, отвечающие собственному значению* $\rho_0\in\Psi$ *задачи* (17), $p=1,\ldots,q$, *и собственные векторы* $y_{0,1},\ldots,y_{0,q}$ — *линейно независимы. Тогда найдется такая окрестность* $V(\rho_0)$ *точки* ρ_0 *и такая фундаментальная система* $z_1(\rho),\ \ldots,z_n(\rho)$ *решений уравнения* $\mathcal{L}(\rho)z=0$, *аналитически зависящая от* $\rho\in V(\rho_0)$, *что*

$$y_{l,p} = (l!)^{-1}z_p^{(l)}(\rho_0),\quad l=0,\ldots,d_p,\quad p=1,\ldots,q. \tag{23}$$

Доказательство. Согласно лемме 1 каждой цепочке $y_{0,p},\ldots,y_{d_p,p}$, $p=1,\ldots,q$, отвечает такое аналитическое в области Ψ решение $z_p(\rho)$ уравнения $\mathcal{L}(\rho)z=0$, для которого справедливы равенства (23). Так как собственное значение ρ_0 принадлежит n-области уравнения $\mathcal{L}(\rho)x=0$, то

$$z_p(\rho) = c_{p,1}(\rho)x_1(\rho)+\ldots+c_{p,n}(\rho)x_n(\rho), \tag{24}$$

где $p=1,\ldots,q$, а $x_1(\rho),\ldots,x_n(\rho)$ — аналитическая по $\rho\in\Psi$ фундаментальная система решений уравнения $\mathcal{L}(\rho)x=0$. Отсюда на основании следствия 3 вытекает аналитичность коэффициентов $c_{p,s}(\rho)$, $s=1,\ldots,n$, по $\rho\in\Psi$. Введем матрицу $C(\rho)=\{c_{p,s}(\rho)\}_{p,s=1}^{q,n}$. Ввиду линейной независимости векторов $z_1(\rho_0),\ldots,z_q(\rho_0)$ ранг матрицы $C(\rho_0)$ равен q (очевидно, что $q\le n$), поэтому ранг матрицы $C(\rho)$ равен q и в некоторой окрестности точки ρ_0. Отсюда в случае $q=n$ вытекает утверждение леммы. Если же $q<n$, то найдутся такие постоянные коэффициенты $c_{p,s}$, $p=q+1,\ldots,n$; $s=1,\ldots,n$, обозначенные через $c_{p,s}(\rho)$, для которых $\det\{c_{p,s}(\rho)\}_{p,s=1}^{n}\ne 0$ в некоторой окрестности точки ρ_0. По так найденным коэффициентам $c_{p,s}(\rho)$ равенствами (24) зададим недостающие решения $z_{q+1}(\rho),\ldots,z_n(\rho)$ уравнения $\mathcal{L}(\rho)z=0$ и получим искомую фундаментальную систему решений.

***Доказательство теоремы* 2** использует некоторые соображения из монографии [2, с. 29 – 30]. Пусть $y_{0,p}, \ldots, y_{d_p,p}$, $p=1,\ldots,q$, — те цепочки корневых векторов с линейно независимыми собственными векторами $y_{0,1},\ldots,y_{0,q}$, для которых достигает своего максимального значения величина $(d_1+1)+\ldots+(d_q+1)=N(\rho_0;\mathcal{L},U_h)$, и пусть $z_1(\rho),\ldots,z_n(\rho)$ — фундаментальная система решений уравнения $\mathcal{L}(\rho)z=0$, аналитическая в окрестности точки ρ_0 и удовлетворяющая равенствам (23). Для аналитических в окрестности точки ρ_0 функций $U_h(\rho,z_p(\rho))$ справедливы разложения

$$U_h(\rho,z_p(\rho)) = \sum_{r=0}^{\infty}(\rho-\rho_0)^r\left(\sum_{l=0}^{r}\frac{1}{l!(r-l)!}U_h^{(r-l)}\big(\rho_0,z_p^{(l)}(\rho_0)\big)\right), \qquad (25)$$
$$h,p=1,\ldots,n,$$

где через $U_h^{(l)}(\rho_0)$ обозначена производная порядка l в точке ρ_0 от аналитической вектор-функции $U_h(\rho)$ со значениями в $\mathfrak{B}^*$, т. е. $U_h^{(l)}(\rho_0)\in\mathfrak{B}^*$. По условию векторы $y_{0,p},\ldots,y_{d_p,p}$ образуют цепочку корневых векторов, отвечающую собственному значению ρ_0 каждого функционала $U_h(\rho)$, и для них справедливы равенства (23). Поэтому в тождестве (25) все коэффициенты при $(\rho-\rho_0)^r$ для $r\le d_p$ равны нулю, т. е. ρ_0 — нуль кратности не меньше чем d_p+1 функций $U_h(\rho,z_p(\rho))$, $h=1,\ldots,n$, образующих p-й столбец матрицы $\{U_h(\rho,z_p(\rho))\}_{h,p=1}^n$. Следовательно, кратность $N(\rho_0,\Delta_1)$ нуля ρ_0 функции $\Delta_1(\rho):=\det\{U_h(\rho,z_p(\rho))\}_{h,p=1}^n$ не меньше чем $(d_1+1)+\ldots+(d_q+1)$. Но в окрестности точки ρ_0 вектор-функции $x_1(\rho),\ldots,x_n(\rho)$ и $z_1(\rho),\ldots,z_n(\rho)$, связаны равенствами (24) с аналитическими коэффициентами $c_{p,s}(\rho)$ и $\det\{c_{p,s}(\rho)\}_{p,s=1}^n\neq 0$, поэтому $N(\rho_0,\Delta)=N(\rho_0,\Delta_1)$. Итак, показано, что $N(\rho_0;\mathcal{L},U_h)\le N(\rho_0,\Delta)$.

Покажем теперь, что на самом деле справедливо равенство $N(\rho_0;\mathcal{L},U_h)=N(\rho_0,\Delta)$. Предположим противное, т. е. пусть $N(\rho_0;\mathcal{L},U_h)<N(\rho_0,\Delta)$. Далее будем считать цепочки корневых векторов $y_{0,p},\ldots,y_{d_p,p}$, $p=1,\ldots,q$, занумерованными так, что выполнены неравенства $d_1\ge\ldots\ge d_q$, и если $q<n$, то положим $d_{q+1}=\ldots=d_n=-1$. Как было показано, число ρ_0 является нулем кратности не меньше чем d_p+1 всех элементов столбца p матрицы $\{U_h(\rho,z_p(\rho))\}_{h,p=1}^n$, и так как по предположению $(d_1+1)+\ldots+(d_n+1)<N(\rho_0,\Delta)$, то определитель аналитической в окрестности точки ρ_0 матрицы $\{(\rho-\rho_0)^{-d_p-1}U_h(\rho,z_p(\rho))\}_{p,h=1}^n$ равен нулю при $\rho=\rho_0$. Поэтому при $\rho=\rho_0$ у этой матрицы имеется столбец с номером $m\le n$, линейно выражающийся через столбцы с номерами $p>m$ (если $m=n$, то этот столбец при $\rho=\rho_0$ равен нулевому). Это означает, что найдутся такие коэффициенты c_p, для которых

$$(\rho-\rho_0)^{-d_m-1}U_h(\rho,z_m(\rho)) - \sum_{p>m}c_p(\rho-\rho_0)^{-d_p-1}U_h(\rho,z_p(\rho)) = O(|\rho-\rho_0|),$$
$$\rho\to\rho_0,\quad h=1,\ldots,n.$$

Введем вектор-функцию

$$\hat{z}_m(\rho) = z_m(\rho) - \sum_{p>m} c_p(\rho-\rho_0)^{d_m - d_p} z_p(\rho), \tag{26}$$

являющуюся решением уравнения $\mathcal{L}(\rho)z=0$ в некоторой окрестности точки ρ_0, причем для нее $U_h(\rho, \hat{z}_m(\rho)) = O\left(|\rho-\rho_0|^{d_m+2}\right)$, $\rho\to\rho_0$, $h=1,\ldots,n$. Отсюда, записав для вектор-функции $\hat{z}_m(\rho)$ равенства (25), получим, что коэффициенты при $(\rho-\rho_0)^r$ для $r=0,\ldots,d_m+1$ равны нулю. Поэтому векторы $\hat{z}_m(\rho_0),\ldots,\dfrac{1}{(d_m+1)!}\hat{z}_m^{(d_m+1)}(\rho_0)$ образуют цепочку корневых векторов, отвечающую собственному значению ρ_0 каждого функционала $U_h(\rho)$. А так как $\hat{z}_m(\rho)$ — решение уравнения $\mathcal{L}(\rho)z=0$, то эти векторы образуют также цепочку корневых векторов краевой задачи (17). Из равенства (26), в котором $z_1(\rho_0),\ldots,z_n(\rho_0)$ — фундаментальная система решений уравнения $\mathcal{L}(\rho)z=0$, следует линейная независимость векторов $z_p(\rho_0)$, $p=1,\ldots,n$, $p\neq m$, и вектора $\hat{z}_m(\rho_0)$. Отсюда и из тождеств (23) получаем, что векторы $y_{0,p}$, $p\neq m$, и вектор $\hat{z}_m(\rho_0)$ линейно независимы. Возможны два случая: $m\le q$ и $m>q$. В первом (во втором) случае суммарная кратность q (соответственно $q+1$) цепочек корневых векторов $y_{0,p},\ldots,y_{d_p,p}$, $p\neq m$, и $\hat{z}_m(\rho_0),\ldots,1/(d_m+1)!\times$ $\times\,\hat{z}_m^{(d_m+1)}(\rho_0)$ равна $N(\rho_0;\mathcal{L},U_h)+1$, что невозможно в силу определения кратности собственного значения ρ_0. Полученное противоречие показывает справедливость равенства $N(\rho_0;\mathcal{L},U_h)=N(\rho_0,\Delta)$.

Далее понадобятся следующие обозначения и понятия. Пусть оператор $A\in$ $\in[\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2]$, а подпространство $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{B}_1$. Тогда подпространство $A\mathfrak{L}:=\{x\colon x=$ $=Ay,\ y\in\mathfrak{L}\}\subseteq\mathfrak{B}_2$. Оператор A называется фредгольмовым, если его область значений $\mathfrak{R}(A)$ замкнута и $\operatorname{codim}\mathfrak{R}(A)<\infty$, а ядро его $\mathfrak{Z}(A)$ конечномерно. Пусть $\mathcal{L}(\rho)$ — аналитическая в области Ω оператор-функция со значениями в $[\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2]$. Обозначим через $\mathfrak{M}(\mathcal{L}(\rho_0))$ подпространство пространства $\mathfrak{Z}(\mathcal{L}(\rho_0))$, состоящее из нулевого вектора и собственных векторов $\mathcal{L}(\rho)$, которые отвечают собственному значению ρ_0 и имеют бесконечные кратности.

Утверждение 4. *Пусть $\mathcal{L}(\rho)$ — аналитически зависящая от $\rho\in\Omega$ функция со значениями во множестве фредгольмовых операторов из $[\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2]$. Тогда:*

1) *для всех точек $\rho\in\Omega$ число $\dim\mathfrak{M}(\mathcal{L}(\rho))$ принимает одно и то же значение; всюду, за исключением, быть может, конечного или счетного множества точек с предельными точками на границе области Ω или на бесконечности, справедливо равенство $\mathfrak{Z}(\mathcal{L}(\rho))=\mathfrak{M}(\mathcal{L}(\rho))$;*

2) *для любой области Φ, принадлежащей области Ω и содержащей не более конечного числа точек $\rho_1,\ldots,\rho_m$, в которых $\mathfrak{Z}(\mathcal{L}(\rho_l))\neq\mathfrak{M}(\mathcal{L}(\rho_l))$, существует такое подпространство $\mathfrak{L}$ и аналитически зависящая от $\rho\in\Phi$ оператор-функция $A(\rho)$ со значениями в $[\mathfrak{B}_1]$, что оператор $A(\rho)$ обратим при всех $\rho\in\Phi$ и $\mathfrak{Z}(\mathcal{L}(\rho))=A(\rho)\mathfrak{L}$, $\rho\in\Phi$, $\rho\neq\rho_1,\ldots,\rho_m$.*

Первая часть этого утверждения установлена в работе [25] (теорема 1), а вторая его часть — в работе [26] (теорема 4) (см. также обзоры [27, 28]).

Следствие 4. *Пусть у краевой задачи* (17) *оператор-функция $\mathcal{L}(\rho)$ принимает значения во множестве фредгольмовых операторов из $[\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2]$ при $\rho\in\Omega$, а число $n=\min_{\rho\in\Omega}\dim\mathfrak{Z}(\mathcal{L}(\rho))$. Тогда:*

1) *если задача* (17) *имеет хотя бы одну точку, не являющуюся ее собственным значением, то множество собственных значений задачи* (17) *состоит из не более чем счетного числа изолированных собственных значений конечной кратности, возможные предельные точки которых могут находиться лишь на границе области* Ω *и на бесконечности;*

2) *любая область* Φ, *компактно принадлежащая области* Ω, *за исключением, быть может, не более конечного числа точек, является* n*-областью уравнения* $\mathcal{L}(\rho)x=0$ (*тем самым при всех* $\rho\in\Phi$, *за исключением, быть может, конечного числа точек, у задачи* (17) *существует характеристический определитель*).

Доказательство. Фредгольмовость оператора $\mathcal{L}(\rho)$ равносильна фредгольмовости оператора $L(\rho)$, ассоциированного с задачей (17). Кроме того, если задача (17) имеет точку ρ_0, не являющуюся ее собственным значением, то $\mathfrak{M}(L(\rho_0))=\{0\}$. Отсюда, из определения подпространства $\mathfrak{M}(L(\rho))$ и из первой части утверждения 4 вытекает первая часть следствия. Вторая часть следствия получается из второй части утверждения 4, если искомую фундаментальную систему решений уравнения $\mathcal{L}(\rho)x=0$ положить равной $x_j(\rho)=$ $=A(\rho)x_j$, $j=1,\dots,n$, где $x_1,\dots,x_n$ — некоторый базис n-мерного подпространства $\mathfrak{L}$.

Замечание 2. Если оператор F удовлетворяет лишь требованию (1) при $q=\infty$, то краевая задача (4) удовлетворяет всем требованиям следствия 4 при $\rho\in\mathbb{C}$. Действительно, выражение $(\mathcal{D}x)(t)=x^{(n)}(t)$ порождает фредгольмов оператор из W_1^{n+s} в W_1^s. Согласно компактности вложения пространства W_1^{n+s} в пространство H^γ, $\gamma<n+s-1$, и в пространство W_1^s оператор F и тождественный оператор, рассмотренные как операторы из W_1^{n+s} в W_1^s, являются вполне непрерывными. Поэтому (см., например, [27], теорема 2.2) оператор $\mathcal{L}(\rho)$, заданный выражением $\mathcal{L}(\rho)x=x^{(n)}+Fx+\rho^n x$, является фредгольмовым оператором из W_1^{n+s} в W_1^s и он аналитически зависит от $\rho\in\mathbb{C}$. Кроме того, согласно теореме 2 работы [1] уравнение $\mathcal{L}(\rho)x=0$ имеет ровно n линейно независимых решений при достаточно больших по модулю ρ, а значит, ввиду первой части утверждения 4 $\min_{\rho\in\mathbb{C}}\dim\mathfrak{Z}(\mathcal{L}(\rho))=n$.

4. Аналитическая часть. Приведем в необходимом далее виде свойства нулей функций, аналитических в полуполосе

$$\Pi(\xi,M)=\{\rho:|\operatorname{Re}\rho|<\xi,\ \operatorname{Im}\rho>M\},\quad \xi,M>0.$$

Утверждение 5. *Пусть* $\Delta(\rho)$ — *аналитическая и ограниченная в полуполосе* $\Pi(\xi_1,M)$ *функция и на прямой* $\{\rho:\operatorname{Re}\rho=\xi,\ \operatorname{Im}\rho>M\}$ *с* $-\xi_1<\xi<\xi_1$ *справедлива оценка* $|\Delta(\rho)|\ge c$ *с постоянной* $c>0$. *Тогда*:

1) *найдется такое* $\varepsilon>0$, *что* $|\Delta(\rho)|\ge c/2$ *при* $|\operatorname{Re}\rho-\xi|\le\varepsilon$ *и* $\operatorname{Im}\rho\ge$ $\ge M+1$;

2) *число нулей* ρ_v (*с учетом их кратностей*) *функции* $\Delta(\rho)$, *находящихся при фиксированном* η *с* $0<\eta<\xi_1$ *в каждом прямоугольнике* $\{\rho:|\operatorname{Re}\rho|<\eta$, $\zeta<\operatorname{Im}\rho\le\zeta+1\}$, *равномерно ограничено по* $\zeta\ge M+1$;

3) *для произвольных* $\delta>0$ *и* $0<\eta<\xi_1$ *найдется такая постоянная* $c(\delta,\eta)>0$, *что* $|\Delta(\rho)|\ge c(\delta,\eta)$ *при* $|\rho-\rho_v|\ge\delta$ *и* $\rho\in\Pi(\eta,M+1)$.

Для специального вида целых функций вторая часть утверждения 5 установлена в [29] (лемма 2), [30] (лемма 2), а третья часть — в [29] (лемма 1), [30] (лемма 4), [31, с. 119]. Однако, имеющиеся там доказательства полностью переносятся и на сформулированный здесь случай. Первая часть утверждения 5 устанавливается теми же рассуждениями, что и его вторая и третья части.

Утверждение 6. *Пусть* $\alpha(\rho)$ *и* $\beta(\rho)$ — *такие аналитические и ограниченные в полуполосе* $\Pi(\xi_1, M)$ *функции, что при* $0 < \xi < \xi_1$ *на двух лучах* $\ell_\pm(\xi) = \{\rho : \operatorname{Re}\rho = \pm\xi,\ \operatorname{Im}\rho > M\}$ *справедливы оценки*

$$|\alpha(\rho)| \ge c, \quad c_1|\alpha(\rho)| \ge |\beta(\rho)|, \quad \rho \in \ell_\pm(\xi), \tag{27}$$

с постоянными $c > 0$ *и* $0 < c_1 < 1$. *Обозначим через* $n_0(\zeta)$ *и* $n_1(\zeta)$ *соответственно количества нулей функций* $\alpha(\rho)$ *и* $\alpha(\rho) + \beta(\rho)$, *находящихся в прямоугольнике* $\{\rho : |\operatorname{Re}\rho| < \xi,\ M+1 < \operatorname{Im}\rho < \zeta\}$, $\zeta > M+1$. *Тогда*:

$$n_1(\zeta) = n_0(\zeta) + O(1), \quad \zeta \to \infty.$$

Для специального вида функций $\alpha(\rho)$ утверждение 6 установлено в работе [15] (лемма 3). Но приведенное там доказательство полностью переносится на сформулированный здесь случай, если вместо условия (10) и оценки $n_\varepsilon(t) < c(\varepsilon)t$ из [15] воспользоваться первой и второй частью утверждения 5.

Следствие 5. *Пусть функции* $\alpha(\rho)$ *и* $\beta(\rho)$ *удовлетворяют условиям утверждения 6, а* ρ_v^0 *и* ρ_v — *соответственно нули функций* $\alpha(\rho)$ *и* $\alpha(\rho) + \beta(\rho)$, *находящиеся в полуполосе* $\Pi(\xi, M+1)$, *и* $\rho_v^0 = iav + O(1)$, $v = 1, 2, \ldots$, *с постоянной* $a > 0$. *Тогда и нули функции* $\alpha(\rho) + \beta(\rho)$ *допускают представление* $\rho_v = iav + O(1)$, $v = 1, 2, \ldots$.

Действительно, из условий следствия 5, воспользовавшись обозначениями и заключением утверждения 6, имеем $n_0(\zeta) = \zeta / a + O(1)$, $\zeta \to \infty$, и поэтому $n_1(\zeta) = \zeta / a + O(1)$, $\zeta \to \infty$. Отсюда вытекает утверждение следствия 5.

Лемма 4. *Пусть* $\alpha(\rho)$ — *такая аналитическая в полосе* $\{\rho : |\operatorname{Re}\rho| < \xi\}$, $\xi > 0$, *функция, имеющая период* $i2\pi$, *что она непрерывна в замкнутой полосе* $\{\rho : |\operatorname{Re}\rho| \le \xi\}$ *и* $\alpha(\pm\xi + i\sigma) \ne 0$, $-\infty < \sigma < \infty$. *Пусть, кроме того, в полуполосе* $\Pi(\xi, M)$ *задана аналитическая функция* $\beta(\rho)$, *для которой справедлива оценка*

$$|\beta(\rho)| \le c|\rho|^{-\kappa}, \quad \rho \in \Pi(\xi, M), \tag{28}$$

с положительными постоянными c *и* κ. *Через* $z_1, \ldots, z_m$ *обозначим нули функции* $\alpha(\rho)$, *для которых* $-\pi < \operatorname{Im} z_j \le \pi$, *через* $n_1, \ldots, n_m$ — *их кратности, а число* $d = \left(\min_{j=1,\ldots,m} \operatorname{Im} z_j - \pi\right)/2$. *Тогда найдется такое натуральное число* $N \ge (M+\pi)/2\pi$, *что все нули функции* $\alpha(\rho) + \beta(\rho)$, *лежащие с полуполосе* $\Pi(\xi, 2\pi N + d)$, *можно разбить на* $n = n_1 + \ldots + n_m$ *серий* $\rho_v^{(s)}$, $s = 1, \ldots, n$, *каждая из которых допускает асимптотическое представление*

$$\rho_v^{(s)} = z_j + i2\pi v + O\left(v^{-\kappa/n_j}\right), \quad v = N, N+1, \ldots, \tag{29}$$

$$n_0 + \ldots + n_{j-1} < s \le n_1 + \ldots + n_j, \quad n_0 = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Если вместо условия (28) *предположить, что*

$$\lim_{\rho \to \infty,\, \rho \in \Pi(\xi, M)} |\rho|^\kappa |\beta(\rho)| = 0 \tag{30}$$

при $\kappa \ge 0$, *то для нулей* $\rho_v^{(s)}$ *справедливы асимптотические формулы* (29), *если в них* $O\left(v^{-\kappa/n_j}\right)$ *заменить на* $o\left(v^{-\kappa/n_j}\right)$.

Доказательство. Так как функция $\alpha(\rho)$ является $i2\pi$-периодической, а $z_j+i2\pi v$, $v=0,\pm1,\ldots$, — ее нули кратности n_j, то найдутся такие постоянные $c_0>0$ и $\delta_0>0$, что если $0<\delta<\delta_0$, то

$$|\alpha(\rho)|\geq c_0\delta,\quad |\rho-z_j-i2\pi v|\geq \delta^{1/n_j},\quad j=1,\ldots,m,\ v=0,\pm1,\ldots. \tag{31}$$

В каждом прямоугольнике

$$\Pi_v=\{\rho:|\operatorname{Re}\rho|<\xi,\ d+2\pi v<\operatorname{Im}\rho\leq d+2\pi(v+1)\},\quad v\geq(M+\pi)/2\pi,$$

справедлива оценка $|\beta(\rho)|<cv^{-\kappa}$. Полагая в (31) $\delta=(c/c_0)v^{-\kappa}$, получаем $|\alpha(\rho)|>|\beta(\rho)|$, если $|\rho-z_j-i2\pi v|\geq(c/c_0)^{1/n_j}v^{-\kappa/n_j}$ и $\rho\in\Pi_v$. Тем самым все нули функции $\alpha(\rho)+\beta(\rho)$, лежащие в прямоугольнике Π_v находятся внутри кругов $|\rho-z_j-i2\pi v|<(c/c_0)^{1/n_j}v^{-\kappa/n_j}$, а при достаточно большом $v\geq(M+\pi)/2\pi$ эти круги не пересекаются и целиком лежат в Π_v. Воспользовавшись теперь оценкой $|\alpha(\rho)|>|\beta(\rho)|$, справедливой на границе этих кругов, из теоремы Руше получаем асимптотическую формулу (29). Если выполнено условие (30), то доказательство полностью аналогично, лишь следует воспользоваться оценкой $|\beta(\rho)|<c(v)v^{-\kappa}$, $\rho\in\Pi_v$, в которой $c(v)\to0$ при $v\to\infty$.

Лемма 5. *Пусть функционал $f\in H_*^\gamma$, $0\leq\gamma<\infty$, и*

$$|f(e^{i\zeta t})|\leq c(1+|\zeta|)^\alpha,\quad \zeta\in\mathbb{R}, \tag{32}$$

при фиксированном вещественном α. Тогда

$$|f(e^{\rho t})|\leq ce^{\max\{\operatorname{Re}\rho,0\}}(1+|\rho|)^\alpha,\quad \rho\in\mathbb{C}.$$

Если же

$$|f(e^{i\zeta t})|=o\big((1+|\zeta|)^\alpha\big),\quad \zeta\to\pm\infty,\quad \zeta\in\mathbb{R}, \tag{33}$$

то

$$|f(e^{\rho t})|=o\big(e^{\max\{\operatorname{Re}\rho,0\}}(1+|\rho|)^\alpha\big),\quad \rho\to\infty,\quad \rho\in\mathbb{C}.$$

Доказательство. Поскольку при $\rho\in\mathbb{C}$

$$|f(e^{\rho t})|\leq\|f\|_{H_*^\gamma}\|e^{\rho t}\|_{H^\gamma}\leq 2\|f\|_{H_*^\gamma}e^{\max\{\operatorname{Re}\rho,0\}}(1+|\rho|)^\gamma,$$

то аналитическая в правой полуплоскости функция

$$\alpha(\rho)=(\rho+1)^{-\alpha}e^{-\rho}f(e^{\rho t})$$

ограничена на мнимой оси и $|\alpha(\rho)|\leq c_\gamma(1+|\rho|)^{\gamma-\alpha}$, $\operatorname{Re}\rho\geq0$. Следовательно, согласно теореме Фрагмена – Линделефа (см., например, [32, с. 360]) функция $\alpha(\rho)$ равномерно ограничена при $\operatorname{Re}\rho\geq0$, что, учитывая вид $\alpha(\rho)$, совпадает с первым утверждением леммы 5, если $\operatorname{Re}\rho\geq0$. Для получения соответствующей оценки в левой полуплоскости необходимо рассмотреть функцию $\alpha_1(\rho)=$ $=(\rho-1)^{-\alpha}f(e^{\rho t})$, $\operatorname{Re}\rho\leq0$, и повторить предыдущие рассуждения.

Для доказательства второго утверждения следует заметить, что из условия (33) вытекают соотношения $\alpha(i\zeta)\to0$ и $\alpha_1(i\zeta)\to0$ при $\zeta\to\pm\infty$, $\zeta\in\mathbb{R}$. Отсюда, учитывая равномерную ограниченность функций $\alpha(\rho)$ и $\alpha_1(\rho)$ соответственно в правой и левой полуплоскостях и теорему Линделефа (см., например, [32, с. 345]), получаем, что $\alpha(\rho)\to 0$ и $\alpha_1(\rho)\to 0$, когда $\rho\to\infty$ и ρ принадлежит соответственно правой и левой полуплоскостям, откуда и вытекает второе утверждение леммы.

***Замечание* 3.** Из леммы 5 следует, что если выполнено условие (32), то и $|f(e^{\rho(1-t)})|\le c\,e^{\max\{\mathrm{Re}\rho,\,0\}}(1+|\rho|)^{\alpha}$, $\rho\in\mathbb{C}$, а если выполнено условие (33), то и

$$|f(e^{\rho(1-t)})| = o\left(e^{\max\{\mathrm{Re}\rho,\,0\}}(1+|\rho|)^{\alpha}\right),\quad \rho\to\infty,\quad \rho\in\mathbb{C}.$$

***Замечание* 4.** Из леммы 5 получаем, что при выполнении требования (9)

$$\begin{aligned} a_h-\xi^{-k_h}U_h(e^{\xi t}) &= O\left(|\xi|^{-\kappa}\right),\quad \xi\to-\infty,\quad \xi\in\mathbb{R},\\ b_h-\xi^{-k_h}e^{-\xi}U_h(e^{\xi t}) &= O(\xi^{-\kappa}),\quad \xi\to+\infty,\quad \xi\in\mathbb{R}, \end{aligned}\tag{34}$$

а при выполнении требования (10) эти соотношения справедливы, если в них O заменить на o. Тем самым выполнение требований κ- и $(o-\kappa)$-регулярности краевых условий гарантирует не только существование пределов (8), но и устанавливает скорость стремления соответствующих величин к своим предельным значениям. Обратное утверждение неверно. Например, из соотношений (34) не вытекают оценки (9), что видно из следующего примера краевых условий: $U_h(x):=a_h\,x^{(k_h)}(0)+b_h\,x^{(k_h)}(1)+\,x^{(k_h)}(1/2)=0,\ h=1,\dots,n.$

5. О свойствах некоторых определителей. Далее корни n-й степени из -1 будем считать занумерованными правилом (6). Такими корнями являются:

1) в случае нечетного n

$$\begin{aligned} \omega_{2k+1} &= \exp i\pi(1+2k/n),\quad k=0,\dots,(n-1)/2,\\ \omega_{2k} &= \exp i\pi(1-2k/n),\quad k=1,\dots,(n-1)/2; \end{aligned}\tag{35}$$

2) в случае четного n

$$\begin{aligned} \omega_{2k-1} &= \exp i\pi(1-(2k-1)/n),\\ \omega_{2k} &= \exp i\pi(1+(2k-1)/n),\quad k=1,\dots,n/2. \end{aligned}\tag{36}$$

Действительно, в случае нечетного n справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\rho\,\omega_{2k+1} &= -|\rho|\cos(2\pi k/n+\arg\rho),\quad k=0,\dots,(n-1)/2,\\ \mathrm{Re}\,\rho\,\omega_{2k} &= -|\rho|\cos(2\pi k/n-\arg\rho),\quad k=1,\dots,(n-1)/2, \end{aligned}\tag{37}$$

а в случае четного n —

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\rho\,\omega_{2k-1} &= -|\rho|\cos(\pi(2k-1)/n-\arg\rho),\\ \mathrm{Re}\,\rho\,\omega_{2k} &= -|\rho|\cos(\pi(2k-1)/n+\arg\rho),\quad k=1,\dots,n/2. \end{aligned}\tag{38}$$

Из этих равенств следует, что для чисел ω_j, заданных формулами (35) и (36), справедливы неравенства (6).

Прямые

$$\tilde{\rho}_j = \{\rho:\ \mathrm{Re}\,\rho\omega_j=0\},\quad j=1,\dots,n,\tag{39}$$

разбивают комплексную ρ-плоскость на следующие углы:

1) в случае нечетного $n=2d-1$, $d=1,2,\dots$,

$$\Xi_r = \{\rho:\ \rho\ne 0,\ |\arg(\rho\exp(-i\pi r/n))|<\pi/(2n)\},\quad n=2d-1;\tag{40}$$

2а) в случае четного $n=4d-2$, $d=1,2,\dots$,

$$\Xi_r = \{\rho: \rho \neq 0,\ 0 < \arg(\rho \exp(-i2\pi r/n)) < 2\pi/n\}, \quad n = 4d-2; \qquad (41)$$

2б) в случае четного $n = 4d$, $d = 1, 2, \ldots$,

$$\Xi_r = \{\rho: \rho \neq 0,\ |\arg(\rho \exp(-i2\pi r/n))| < \pi/n\}, \quad n = 4d, \qquad (42)$$

причем далее удобно считать, что в определениях (40) – (42) углов Ξ_r индекс $r = 0, \pm 1, \ldots$. Тем самым для всех целых r справедливы равенства $\Xi_r = \Xi_{r+2n}$, если n — нечетно, и $\Xi_r = \Xi_{r+n}$ если n — четно. Кроме того, любые взятые подряд $2n$ углов, если n — нечетно, и n углов, если n — четно, покрывают всю комплексную ρ-плоскость $\mathbb{C}$, за исключением прямых $\tilde{\rho}_j$.

По каждому углу Ξ_r, заданному одним из соотношений (40) – (42), определим подмножества Λ_r^- и Λ_r^+ множества индексов $\{1, \ldots, n\}$ согласно правилу

$$\Lambda_r^{\pm} = \{j: \pm \operatorname{Re} \rho\omega_j > 0,\ \rho \in \Xi_r\}, \qquad (43)$$

где одновременно используется либо нижний знак „–", либо верхний „+". Отметим, что одно из множеств Λ_r^- или Λ_r^+ содержит ровно $[n/2]$ индексов, другое — $[(n+1)/2]$ индексов, а объединение множеств Λ_r^- и Λ_r^+ совпадает с множеством индексов $\{1, \ldots, n\}$ при каждом $r = 0, \pm 1, \ldots$. Кроме того, из геометрических соображений о расположении корней ω_j степени n из -1 на единичной окружности $\{\rho: |\rho| = 1\}$ и из определений (39) и (43) прямых $\tilde{\rho}_j$ и множеств $\Lambda_r^{\pm}$ вытекают два простых предложения.

Предложение 1. *Пусть n — нечетно, а одна из сторон угла Ξ_r находится на прямой $\tilde{\rho}_j$. Тогда индекс j принадлежит тому множеству индексов Λ_r^- или Λ_r^+, которое содержит $(n+1)/2$ элементов. Если индекс $j \in \Lambda_r^-$ (или Λ_r^+), а одна из сторон угла Ξ_{r_1}, не совпадающего с углом Ξ_r (т. е. $r \neq r_1 + 2kn$, $k = 0, \pm 1, \ldots$), также находится на прямой $\tilde{\rho}_j$, то $\Lambda_{r_1}^- = \Lambda_r^- \setminus \{j\}$, а $\Lambda_{r_1}^+ = \Lambda_r^+ \cup \{j\}$ (соответственно $\Lambda_{r_1}^- = \Lambda_r^- \cup \{j\}$, а $\Lambda_{r_1}^+ = \Lambda_r^+ \setminus \{j\}$).*

Для формулировки и доказательства аналогичного предложения, относящегося к случаю четного n, заметим, что в этом случае вместе с ω_j число $-\omega_j$ также является корнем степени n из -1, причем из формул (36) имеем $-\omega_j = \omega_{n+1-j}$. Тем самым каждому индексу $j = 1, \ldots, n$ правилом $\hat{j} = n + 1 - j$ ставится в соответствие двойственный к нему индекс $\hat{j}$. Очевидно, что прямые $\tilde{\rho}_j$ и $\tilde{\rho}_{\hat{j}}$ совпадают, а индексы j и $\hat{j}$ принадлежат разным множествам Λ_r^- и Λ_r^+ при всех $r = 0, \pm 1, \ldots$.

Предложение 2. *Пусть n — четное число, а несовпадающие между собой углы Ξ_r и Ξ_{r_1} (т. е. $r \neq r_1 + kn$, $k = 0, \pm 1, \ldots$) имеют общую сторону, лежащую на прямой $\tilde{\rho}_j$. Тогда если индекс $j \in \Lambda_r^-$, то индекс $\hat{j} \in \Lambda_r^+$ и $\Lambda_{r_1}^- = (\Lambda_r^- \setminus \{j\}) \cup \{\hat{j}\}$, а $\Lambda_{r_1}^+ = (\Lambda_r^+ \setminus \{\hat{j}\}) \cup \{j\}$.*

При вычислении множеств индексов $\Lambda_r^{\pm}$, заданных правилом (43), их достаточно вычислить лишь для какого-либо фиксированного $\rho = \rho_0 \in \Xi_r$. Так, для угла Ξ_0, заданного равенством (40) или (42) при $r = 0$, таким ρ_0 может служить 1, а для угла Ξ_0, заданного равенством (41) при $r = 0$, $\rho_0 = \exp(i\pi/n)$.

Используя это правило вычисления множеств $\Lambda_r^{\pm}$, равенства (37) и определение (40) углов Ξ_r и проводя простые вычисления, показываем, что в случае нечетного числа $n = 4d+1$, $d = 0, 1, \dots$, справедливы формулы

$$\{1, \dots, 2d+1\} = \Lambda_0^-, \quad \{2d+2, \dots, 4d+1\} = \Lambda_0^+, \quad n = 4d+1, \tag{44}$$

а на прямой $\tilde{\rho}_{2d+1} = \{\rho : \rho = \zeta \exp(i\pi/2n), \ -\infty < \zeta < \infty\}$ лежат стороны углов Ξ_0 и Ξ_1. Отсюда и из предложения 1 имеем

$$\{1, \dots, 2d\} = \Lambda_1^-, \quad \{2d+1, \dots, 4d+1\} = \Lambda_1^+, \quad n = 4d+1. \tag{45}$$

Аналогично в случае нечетного числа $n = 4d-1$, $d = 1, 2, \dots$, справедливы формулы

$$\{1, \dots, 2d-1\} = \Lambda_0^-, \quad \{2d, \dots, 4d+1\} = \Lambda_0^+, \quad n = 4d-1, \tag{46}$$

причем на прямой $\tilde{\rho}_{2d} = \{\rho : \rho = \zeta \exp(i\pi/2n), \ -\infty < \zeta < \infty\}$ лежат стороны углов Ξ_0 и Ξ_1, и поэтому

$$\{1, \dots, 2d\} = \Lambda_1^-, \quad \{2d+1, \dots, 4d-1\} = \Lambda_1^+, \quad n = 4d-1. \tag{47}$$

Используя те же соображения, что и в случае нечетного n, а также формулы (36), (38), (41) и (42), заключаем: если четное число $n = 4d-2$, $d = 1, 2, \dots$, то

$$\{1, \dots, 2d-1\} = \Lambda_0^-, \quad \{2d, \dots, 4d-2\} = \Lambda_0^+, \quad n = 4d-2, \tag{48}$$

причем $\omega_{2d-1} = -\omega_{2d}$ и на прямой $\tilde{\rho}_{2d-1} = \tilde{\rho}_{2d} = \{\rho : \rho = \zeta, \ -\infty < \zeta < \infty\}$ лежит одна из сторон угла Ξ_0.

Если же четное число $n = 4d$, $d = 1, 2, \dots$, то

$$\{1, \dots, 2d\} = \Lambda_0^-, \quad \{2d+1, \dots, 4d\} = \Lambda_0^+, \quad n = 4d, \tag{49}$$

причем $\omega_{2d} = -\omega_{2d+1}$ и на прямой $\tilde{\rho}_{2d} = \tilde{\rho}_{2d+1} = \{\rho : \rho = \zeta \exp(i\pi/n), \ -\infty < \zeta < \infty\}$ лежит одна из сторон угла Ξ_0.

В этом пункте считаем: a_h, b_h — произвольные комплексные, k_h — целые неотрицательные числа, $h = 1, \dots, n$, а ω_j — корни степени n из -1, указанные в формулах (35) и (36) соответственно для нечетного и четного n. По этим числам с помощью множеств мультииндексов $\Lambda_r^{\pm}$ введем определители

$$\nu_r = \det\{\nu_{h,j}^{(r)}\}_{h,j=1}^n, \quad \nu_{h,j}^{(r)} = \begin{cases} a_h \omega_j^{k_h}, & j \in \Lambda_r^-; \\ b_h \omega_j^{k_h}, & j \in \Lambda_r^+, \end{cases} \tag{50}$$

и докажем для них следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть l — целое число, а угол Ξ_{r_1} получается из угла Ξ_r поворотом его на угол $2\pi l/n$ против часовой стрелки (что в случае $l < 0$ означает поворот угла Ξ_r на угол $-2\pi l/n$ по часовой стрелке). Тогда*

$$\nu_{r_1} = \nu_r \exp(-i2\pi l\hat{k}/n), \ n = 2d-1; \ \nu_{r_1} = \nu_r(-1)^l \exp(-i2\pi l\hat{k}/n), \ n = 2d,$$

где $d = 1, 2, \dots$, а $\hat{k} = k_1 + \dots + k_n$.

Доказательство достаточно провести, считая $l = 1$, так как случай произвольного $l > 0$ вытекает из случая $l = 1$ последовательным применением l раз соответствующей формулы при $l = 1$. Случай $l < 0$ непосредственно вытекает из случая $l > 0$.

Итак, пусть угол Ξ_{r_1} получается из угла Ξ_r поворотом его на угол $2\pi/n$ против часовой стрелки. Введем числа

$$\hat{\omega}_j = \omega_j \exp(-i2\pi/n), \quad j = 1, \dots, n,$$

множества индексов

$$\hat{\Lambda}_{r_1}^{\pm} = \{ j : \pm \mathrm{Re}\, \rho \hat{\omega}_j > 0, \ \rho \in \Xi_{r_1} \},$$

где одновременно используется либо нижний знак „–", либо верхний знак „+", и зададим определитель

$$\hat{\nu}_{r_1} = \det \left\{ \hat{\nu}_{h,j}^{(r_1)} \right\}_{h,j=1}^{n}, \quad \hat{\nu}_{h,j}^{(r_1)} = \begin{cases} a_h \hat{\omega}_j^{k_h}, & j \in \hat{\Lambda}_{r_1}^{-}; \\ b_h \hat{\omega}_j^{k_h}, & j \in \hat{\Lambda}_{r_1}^{+}. \end{cases} \tag{51}$$

Так как неравенства $\mathrm{Re}\, \rho \hat{\omega}_j > 0$ и $\mathrm{Re}\, \rho \hat{\omega}_j < 0$ равносильны соответственно неравенствам $\mathrm{Re}\,(\rho \omega_j \exp(-i2\pi/n)) > 0$ и $\mathrm{Re}\,(\rho \omega_j \exp(-i2\pi/n)) < 0$, а угол $\Xi_{r_1} = \{ \rho : \rho \exp(-i2\pi/n) \in \Xi_r \}$, то из определений множеств индексов $\Lambda_r^{\pm}$ и $\hat{\Lambda}_{r_1}^{\pm}$ имеем $\Lambda_r^{-} = \hat{\Lambda}_{r_1}^{-}$ и $\Lambda_r^{+} = \hat{\Lambda}_{r_1}^{+}$, откуда и из определений (50) и (51) чисел ν_r и $\hat{\nu}_{r_1}$ вытекает тождество

$$\hat{\nu}_{r_1} = \nu_r \exp\left(-i2\pi \hat{k}/n\right). \tag{52}$$

Числа $\hat{\omega}_j$, как и числа ω_j, являются корнями степени n из -1 и получаются из чисел ω_j поворотом единичной окружности по часовой стрелке на угол $2\pi/n$. Это означает, что соответствие между индексами j и s_j, задаваемое равенством $\hat{\omega}_j = \omega_{s_j}$, является циклической подстановкой длины n. Но, как видно из сопоставления определителя (50) при $r = r_1$ и определителя (51), этой подстановке соответствует такая перестановка столбцов матрицы $\left\{ \hat{\nu}_{h,j}^{(r_1)} \right\}_{h,j=1}^{n}$, которая переводит ее в матрицу $\left\{ \nu_{h,j}^{(r_1)} \right\}_{h,j=1}^{n}$. Четность же указанной циклической подстановки совпадает с четностью ее декремента (см., например, [33, с. 35–36]), т. е. с четностью числа $n-1$. Отсюда и из равенства (52) вытекает при $l = 1$ утверждение леммы.

***Следствие* 6.** *Числа* ν_r, *заданные равенствами* (50), *связаны с числами* θ_l, *заданными равенствами* (7), *следующими соотношениями*:

$$\nu_{2r} = \theta_0 \exp\left(-i\frac{2\pi r}{n}\hat{k}\right), \quad \nu_{2r+1} = \theta_1 \exp\left(-i\frac{2\pi r}{n}\hat{k}\right), \quad n = 4d+1,$$

$$\nu_{2r} = \theta_1 \exp\left(-i\frac{2\pi r}{n}\hat{k}\right), \quad \nu_{2r+1} = \theta_0 \exp\left(-i\frac{2\pi r}{n}\hat{k}\right), \quad n = 4d-1,$$

$$\nu_r = \theta_0 (-1)^r \exp\left(-i\frac{2\pi r}{n}\hat{k}\right), \quad n = 2d,$$

в которых $\hat{k} = k_1 + \dots k_n$, *а* $r = 0, \pm 1, \dots$.

Доказательство. Из формул (44) и (45) получаем $\nu_0 = \theta_0$ и $\nu_1 = \theta_1$, если $n = 4d+1$; из формул (46) и (47) — $\nu_0 = \theta_1$ и $\nu_1 = \theta_0$, если $n = 4d-1$, а из формул (48) и (49) — $\nu_0 = \theta_0$, если $n = 2d$. Отсюда, из определений (40) – (42) углов Ξ_r и из леммы 6 вытекает утверждение следствия.

Как видно из дальнейшего, определитель (50) задает главную часть характеристического определителя краевой задачи (4) внутри угла Ξ_r (лемма 9). Введем теперь определители, задающие главные части характеристического определителя задачи (4) в полуполосах, содержащих стороны углов Ξ_r. При этом отдельно рассматриваются случаи нечетного и четного n.

Пусть n — нечетно. Тогда сторонами угла Ξ_r, заданного формулой (40), являются лучи

$$\tilde{\rho}_j^{\pm} = \left\{\rho\colon \rho = \zeta \exp i\pi \frac{2r \pm 1}{2n},\ \zeta > 0\right\},$$

причем стороны угла Ξ_r, совпадающие с лучами $\tilde{\rho}_r^-$ и $\tilde{\rho}_r^+$, называются соответственно нижней и верхней сторонами этого угла. Очевидно, что для этих сторон угла справедливы равенства $\tilde{\rho}_r^+ = \tilde{\rho}_{r+1}^-$, $r = 0, \pm 1, \ldots$. Так как n — нечетно, то каждый из лучей $\tilde{\rho}_r^-$ и $\tilde{\rho}_r^+$ лежит лишь на одной прямой $\tilde{\rho}_{j_r^-}$ и $\tilde{\rho}_{j_r^+}$ из системы прямых (39). Тем самым каждому индексу $r = 0, \pm 1, \ldots$ однозначно ставится в соответствие два индекса j_r^- и j_r^+ $(= 1, \ldots, n)$ по правилу: $\tilde{\rho}_r^- \in \tilde{\rho}_{j_r^-}$ и $\tilde{\rho}_r^+ \in \tilde{\rho}_{j_r^+}$.

Для произвольного числа $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и индексов $h, g = 1, \ldots, n$; $r = 0, \pm 1, \ldots$ определим функции

$$\nu_{h,j}^{(q,r)}(z) = \begin{cases} a_h \omega_j^{k_h}, & j \in \Lambda_r^- \setminus \{q\}; \\ a_h \omega_q^{k_h} + z b_h \omega_q^{k_h}, & j = q; \\ b_h \omega_j^{k_h}, & j \in \Lambda_r^+, \end{cases} \quad \text{если} \quad q \in \Lambda_r^-, \tag{53}$$

$$\nu_{h,j}^{(q,r)}(z) = \begin{cases} a_h \omega_j^{k_h}, & j \in \Lambda_r^-; \\ b_h \omega_j^{k_h}, & j \in \Lambda_r^+ \setminus \{q\}; \\ z^{-1} a_h \omega_q^{k_h} + b_h \omega_q^{k_h}, & j = q, \end{cases} \quad \text{если} \quad q \in \Lambda_r^+, \tag{54}$$

по которым зададим определители

$$\nu_r^-(z) = \det\left\{\nu_{h,j}^{(j_r^-, r)}(z)\right\}_{h,j=1}^n, \quad \nu_r^+(z) = \det\left\{\nu_{h,j}^{(j_r^+, r)}(z)\right\}_{h,j=1}^n. \tag{55}$$

Тем самым элементы этих определителей задаются формулами (53) или (54) в зависимости от того, какому множеству Λ_r^- или Λ_r^+ принадлежит один из индексов j_r^- и j_r^+. Отметим (см. предложение 1), что при фиксированном $r = 0, \pm 1, \ldots$ оба индекса j_r^- и j_r^+ принадлежат тому множеству Λ_r^- или Λ_r^+, которое содержит $(n+1)/2$ индексов.

Лемма 7. *Пусть n — нечетно, числа ν_r и функции $\nu_r^{\pm}(z)$ заданы соответственно равенствами* (50) *и* (53) – (55). *Тогда*

$$\nu_r^-(z) = \nu_r + z\nu_{r-1}, \quad \nu_r^+(z) = \nu_r + z\nu_{r+1}, \quad \textit{если} \ j_r^-, j_r^+ \in \Lambda_r^-,$$

$$\nu_r^-(z) = \nu_r + z^{-1}\nu_{r-1}, \quad \nu_r^+(z) = \nu_r + z^{-1}\nu_{r+1}, \quad \textit{если} \ j_r^-, j_r^+ \in \Lambda_r^+.$$

Доказательство. Воспользовавшись формулами (53) или (54) для элементов $\nu_{h,j}^{(q,r)}(z)$, $q = j_r^{\pm}$, определителей (55) в зависимости от того, какому множеству Λ_r^- или Λ_r^+ принадлежат оба индекса j_r^- и j_r^+, получаем равенства

$$\begin{aligned} \nu_r^-(z) &= \nu_r + z\nu_{1,r}^-, \quad \nu_r^+(z) = \nu_r + z\nu_{1,r}^+, \quad \text{если} \quad j_r^-, j_r^+ \in \Lambda_r^-, \\ \nu_r^-(z) &= \nu_r + z^{-1}\nu_{-1,r}^-, \quad \nu_r^+(z) = \nu_r + z^{-1}\nu_{-1,r}^+, \quad \text{если} \quad j_r^-, j_r^+ \in \Lambda_r^+, \end{aligned} \tag{56}$$

с числами ν_r, заданными формулой (50), и некоторыми постоянными $\nu_{-1,r}^{\pm}$, $\nu_{1,r}^{\pm}$.

Так как угол Ξ_r имеет с углами Ξ_{r-1} и Ξ_{r+1} общие стороны, совпадающие соответственно с лучами $\tilde{\rho}_r^- = \tilde{\rho}_{r-1}^+$ и $\tilde{\rho}_r^+ = \tilde{\rho}_{r+1}^-$, то согласно определению индексов j_r^-, j_r^+ и предложению 1 имеем: если $j_r^-, j_r^+ \in \Lambda_r^-$ (или Λ_r^+), то индекс $j_r^- = j_{r-1}^+ \in \Lambda_{r-1}^+$ (Λ_{r-1}^-), а индекс $j_r^+ = j_{r+1}^- \in \Lambda_{r+1}^+$ (или Λ_{r+1}^-). Отсюда, учитывая правило (53)– (55) построения определителей $\nu_r^{\pm}(z)$, выводим равенства

$$\begin{aligned} \nu_{r-1}^+(z) &= z^{-1}\nu_r^-(z), \quad \nu_{r+1}^-(z) = z^{-1}\nu_r^+(z), \quad \text{если} \quad j_r^-, j_r^+ \in \Lambda_r^-, \\ \nu_{r-1}^+(z) &= z\,\nu_r^-(z), \quad \nu_{r+1}^-(z) = z\,\nu_r^+(z), \quad \text{если} \quad j_r^-, j_r^+ \in \Lambda_r^+. \end{aligned} \tag{57}$$

Сравнивая эти равенства с равенствами (56), получаем утверждение леммы.

Пусть теперь n — четно. Тогда сторонами угла Ξ_r, заданного формулой (41) или (42), являются соответственно лучи

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_r^+ &= \left\{\rho\colon \rho = \zeta \exp i2\pi\frac{r+1}{n},\ \zeta > 0\right\}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 4d-2, \\ \tilde{\rho}_r^- &= \left\{\rho\colon \rho = \zeta \exp i2\pi\frac{r}{n},\ \zeta > 0\right\}, \end{aligned}$$

или

$$\tilde{\rho}_r^{\pm} = \left\{\rho\colon \rho = \zeta \exp i\pi\frac{2r \pm 1}{n},\ \zeta > 0\right\}, \quad n = 4d,$$

причем стороны угла Ξ_r, совпадающие с лучами $\tilde{\rho}_r^-$ и $\tilde{\rho}_r^+$, называются соответственно нижней и верхней сторонами этого угла.

По произвольному числу $z \in \mathbb{C}$, индексу $q \in \Lambda_r^-$ и по двойственному к нему индексу $\hat{q} = n + 1 - q$ определим функции

$$\nu_{h,j}^{(q,r)}(z) = \begin{cases} a_h \omega_j^{k_h}, & j \in \Lambda_r^- \setminus \{q\}; \\ a_h \omega_q^{k_h} + z b_h \omega_q^{k_h}, & j = q; \\ b_h \omega_j^{k_h}, & j \in \Lambda_r^+ \setminus \{\hat{q}\}; \\ z a_h \omega_{\hat{q}}^{k_h} + b_h \omega_{\hat{q}}^{k_h}, & j = \hat{q}. \end{cases} \tag{58}$$

В силу четности n каждый из лучей $\tilde{\rho}_r^-$ и $\tilde{\rho}_r^+$ лежит на двух совпадающих прямых $\tilde{\rho}_{j_r^-} = \tilde{\rho}_{\hat{j}_r^-}$ и соответственно $\tilde{\rho}_{j_r^+} = \tilde{\rho}_{\hat{j}_r^+}$ из системы прямых (39), причем индексы $\hat{j}_r^-$ и $\hat{j}_r^+$ являются двойственными к индексам j_r^- и j_r^+. Предполагая теперь, что индексы j_r^- и $j_r^+ \in \Lambda_r^-$, введем определители

$$\nu_r^-(z) = \det\left\{\nu_{h,j}^{(j_r^-,r)}(z)\right\}_{h,j=1}^n, \quad \nu_r^+(z) = \det\left\{\nu_{h,j}^{(j_r^+,r)}(z)\right\}_{h,j=1}^n. \tag{59}$$

Лемма 8. *Пусть n — четно, а числа ν_r и определители $\nu_r^{\pm}(z)$ заданы соответственно равенствами* (50) *и* (58), (59). *Тогда найдутся такие числа $\nu_{1,r}^{\pm}(z)$, что*

$$\nu_r^-(z) = \nu_r + z\,\nu_{1,r}^- + z^2\nu_{r-1}, \quad \nu_r^+(z) = \nu_r + z\,\nu_{1,r}^+ + z^2\nu_{r+1}.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 7. Действительно, используя определения двойственных индексов и предложение 2 вместо предложения 1, как и при выводе равенств (57), получаем $\nu_{r-1}^+(z) =$

$= z^2 \nu_r^-(z^{-1})$ и $\nu_{r+1}^-(z) = z^2 \nu_r^+(z^{-1})$. Отсюда с учетом очевидных представлений определителей $\nu_r^{\pm}(z) = \nu_r + z\,\nu_{1,r}^{\pm} + z^2 \nu_{2,r}^{\pm}$ (при некоторых коэффициентах $\nu_{1,r}^{\pm}$ и $\nu_{2,r}^{\pm}$) заключаем, что для коэффициентов $\nu_{2,r}^{\pm}$ справедливы равенства $\nu_{2,r}^- = \nu_{r-1}$ и $\nu_{2,r}^+ = \nu_{r+1}$, из которых следует утверждение леммы.

Следствие 7. *Пусть* n *— четно, числа* θ_l *заданы равенствами* (7), *а* $\hat{k} = k_1 + \ldots k_n$ *Тогда*

$$\nu_0^-(z) = \theta_0 + z(\theta_{-1} + \theta_1) - z^2 \theta_0 \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\hat{k}\right), \quad n = 4d - 2,$$

$$\nu_0^+(z) = \theta_0 + z(\theta_{-1} + \theta_1) - z^2 \theta_0 \exp\left(-i\frac{2\pi}{n}\hat{k}\right), \quad n = 4d.$$

Доказательство. Вид коэффициентов, стоящих при z^2, вытекает из леммы 8 и следствия 6. Вид коэффициентов, стоящих при z, вытекает из определения (7) чисел θ_{-1} и θ_1 и формул (48) и (49), задающих множества индексов Λ_0^- и Λ_0^+ соответственно в случаях $n = 4d - 2$ и $n = 4d$. При этом учитывается определение (58), (59) при $r = 0$ функций $\nu_0^{\pm}(z)$, в котором индексы $q = j_0^- = n/2$, если $n = 4d - 2$, и $q = j_0^+ = n/2$, если $n = 4d$.

Замечание 5. Покажем, что определение 1 эквивалентно соответствующему определению из книги [2, с. 66 – 67]. Вначале отметим, что если краевые условия (5) регулярны в смысле определения 1, то $|a_h| + |b_h| \neq 0$, $h = 1, \ldots, n$, и если, кроме того, эти краевые условия занумерованы в следующем порядке: $\{k_1\}_n \geq \{k_2\}_n \geq \ldots \geq \{k_n\}_n \geq 0$, где $\{k\}_n := k - n[k/n]$ — дробная часть числа k по модулю n, то $\{k_{h+2}\}_n < \{k_h\}_n$ при $n > 2$ и $h \leq n - 2$. Действительно, иначе строки в определителях θ_l, заданных формулами (7), будут линейно зависимыми. В случае $k_h \leq n - 1$ неравенство $\{k_{h+2}\}_n < \{k_h\}_n$ совпадает с неравенством $k_{h+2} < k_h$, а это означает, что краевые условия (5) — нормированные [2, с. 65 – 66]. Более важное замечание относится к случаю четного n. В этом случае из равенств (48), (49), (58) и (59) следует, что в [2] при определении регулярных краевых условий (5) предполагается неравенство нулю как свободного члена, так и коэффициента при z^2 у квадратного трехчлена $\nu_0^-(z)$, если $n = 4d - 2$, или у трехчлена $\nu_0^+(z)$, если $n = 4d$. Но в силу следствия 7 требования неравенства нулю свободного члена и коэффициента при z^2 у этих трехчленов равносильны. Аналогично показывается как уменьшить количество требований в определении регулярных краевых условий из [4, с. 196 – 197].

6. Доказательство основной теоремы. Далее характеристический определитель краевой задачи (4) изучается при достаточно больших по модулю ρ, принадлежащих областям

$$(\Xi_r)_\xi = \bigcup_{\rho_0 \in \Xi_r} \{\rho : |\rho - \rho_0| \leq \xi\}, \quad r = 0, \pm 1, \ldots, \quad \xi \geq 0,$$

поэтому удобно выделить следующие подобласти областей $(\Xi_r)_\xi$:

$$\Omega_r(c, \kappa, \xi) = \left\{\rho : \rho \in (\Xi_r)_\xi,\ |\rho| > (ce^{\xi})^{1/\kappa} + 1\right\},$$

где значения положительных постоянных c и κ определяются характеристиками функционального возмущения F, входящими в требования (1) и (2).

Формулировка следующего вспомогательного утверждения содержит объединение по $\xi \geq 0$ областей $\Omega_r(c, \kappa, \xi)$, т. е. область

$$\Omega_r(c, \kappa) = \bigcup_{\xi \geq 0} \Omega_r(c, \kappa, \xi).$$

Кроме того, для каждого фиксированного $\rho \neq 0$ и индекса $r = 0, \pm 1, \ldots$ зададим фундаментальную систему решений уравнения $y^{(n)} + \rho^n y = 0$ равенствами

$$y_{j,r}(\rho; t) = \begin{cases} \exp \rho\omega_j t, & j \in \Lambda_r^-; \\ \exp \rho\omega_j (t-1), & j \in \Lambda_r^+. \end{cases} \tag{60}$$

Утверждение 7. *Пусть оператор F удовлетворяет требованиям* (1) *и* (2), *а постоянная κ_q задана формулой* (3). *Тогда найдется такая постоянная $c > 0$, зависящая лишь от оператора F, что для каждого $r = 0, \pm 1, \ldots$ существует фундаментальная система решений $x_{1,r}(\rho; t), \ldots, x_{n,r}(\rho; t)$ уравнения $x^{(n)} + Fx + \rho^n x = 0$ при $\rho \in \overline{\Omega_r(c, \kappa_q)}$, имеющая свойства:* 1) *каждая функция $x_{j,r}(\rho; \cdot)$, рассмотренная как вектор-функция аргумента $\rho \in \in \overline{\Omega_r(c, \kappa_q)}$ со значениями в пространстве H^{n+s-1}, является аналитической;* 2) *оценка*

$$\left\| x_{j,r}(\rho; \cdot) - y_{j,r}(\rho; \cdot) \right\|_{H^\mu} \leq c e^{2\xi} |\rho|^{\mu - \kappa_q}, \quad 0 \leq \mu \leq n + s - 1, \tag{61}$$

выполнена при $\rho \in \overline{\Omega_r(c, \kappa_q, \xi)}$, $\xi \geq 0$, и с функциями $y_{j,r}(\rho; t)$, заданными формулами (60).

Это утверждение получается огрублением утверждения (23) теоремы 1 работы [1], если в нем функцию $\varphi(\rho; \alpha)$ заменить на 1. Кроме того, здесь индекс $r = 0, \pm 1, \ldots$, что возможно в силу очевидных равенств $\Omega_r(c, \kappa, \xi) = \Omega_{r+2n}(c, \kappa, \xi)$, если n — нечетно, и $\Omega_r(c, \kappa, \xi) = \Omega_{r+n}(c, \kappa, \xi)$, если n — четно. И последнее замечание. В сформулированном утверждении 7 аналитичность по ρ решений $x_{j,r}(\rho; t)$ предполагается вплоть до границы области $\Omega_r(c, \kappa)$. Справедливость этого допущения непосредственно следует из доказательства теоремы 1 из [1].

Подставляя указанную в этом утверждении фундаментальную систему решений уравнения $x^{(n)} + Fx + \rho^n x = 0$ в функционалы U_h, задающие краевые условия, получаем характеристические определители

$$\Delta_r(\rho) = \det \left\{ U_h \left(x_{j,r}(\rho; t) \right) \right\}_{h, j=1}^n, \quad r = 0, \pm 1, \ldots, \quad \rho \in \overline{\Omega_r(c, \kappa_q)}, \tag{62}$$

краевой задачи (4). Согласно утверждению 7 $\Delta_r(\rho)$ — аналитические по $\rho \in \in \overline{\Omega_r(c, \kappa_q)}$ функции, а учитывая еще и оценку $\left\| y_{j,r}(\rho; \cdot) \right\|_{H^k} \leq 2e^{\xi} |\rho|^k$, $\rho \in \in \overline{\Omega_r(c, \kappa_q, \xi)}$, заключаем, что найдется такая постоянная $c > 0$, для которой

$$|\Delta_r(\rho)| \leq c e^{2n\xi} |\rho|^{\hat{k}}, \quad \rho \in \overline{\Omega_r(c, \kappa_q, \xi)}, \quad \xi \geq 0, \tag{63}$$

где $\hat{k}$ — суммарный порядок краевых условий задачи (4).

Данный пункт посвящен изучению характеристического определителя $\Delta_r(\rho)$, причем в силу теоремы 2 нули функции $\Delta_r(\rho)$ совпадают с собственными значениями задачи (4), лежащими в области $\Omega_r(c, \kappa_q)$. Параллельно будет доказано также следующее утверждение, играющее важную роль при исследовании оператора Грина краевой задачи (4).

Теорема 3. *Пусть оператор* F *удовлетворяет требованиям* (1) *и* (2), *а краевые условия* $U_h(x)=0$, $h=1,\ldots,n$, *регулярны в смысле определения* 2. *Тогда функция* $\Delta_r(\rho)$, $\rho\in\overline{\Omega_r(c,\kappa_q)}$, *не тождественно равна нулю и если через* $\rho_{r,v}$ *обозначить нули этой функции, то для произвольных* $\delta>0$ *и* $\xi\geq 0$ *найдется такая постоянная* $c(\delta,\xi)>0$, *для которой*

$$|\Delta_r(\rho)| \geq c(\delta,\xi)\,|\rho|^{\hat{k}}, \quad |\rho-\rho_{r,v}|\geq\delta, \quad \rho\in\overline{\Omega_r(c,\kappa_q,\xi)}. \tag{64}$$

Доказательства теорем 1 и 3 используют следующие обозначения. Пусть $\Omega(\xi)$ — множества комплексной ρ-плоскости, зависящие от параметра $\xi\geq\alpha$, $-\infty<\alpha<\infty$, и все они содержат сколь угодно большие по модулю комплексные числа; положительные функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\rho)$ заданы соответственно при $\xi\geq\alpha$ и ρ, принадлежащем множеству $\Omega:=\bigcup_{\xi\geq\alpha}\Omega(\xi)$. Тогда символы

$$\text{а) } O_{\xi,\rho}(\varphi(\xi)\psi(\rho)); \quad \text{б) } O_\xi(\varphi(\xi))\,o_\rho(\psi(\rho));$$

$$\text{в) } o_\xi(\varphi(\xi))\,O_\rho(\psi(\rho)); \quad \text{г) } o_{\xi,\rho}(\varphi(\xi)\psi(\rho)), \quad \rho\in\bigcup_{\xi\geq\alpha}\Omega(\xi), \tag{65}$$

обозначают соответственно такую аналитическую при $\rho\in\Omega$ функцию $g(\rho)$, для которой: а) существует такая постоянная $c>0$, не зависящая ни от $\xi\geq$ $\geq\alpha$, ни от $\rho\in\Omega(\xi)$, что $|g(\rho)|\leq c\varphi(\xi)\psi(\rho)$, когда $\rho\in\Omega(\xi)$; б) функция $g(\rho)=O_{\xi,\rho}(\varphi(\xi)\psi(\rho))$ и для каждого фиксированного $\xi\geq\alpha$ справедливо соотношение $g(\rho)=o(\psi(\rho))$ при $\rho\to\infty$ и $\rho\in\Omega(\xi)$; в) для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\xi_0\geq\alpha$, что при всех $\xi\geq\xi_0$ справедлива оценка $|g(\rho)|\leq$ $\leq\varepsilon\varphi(\xi)\psi(\rho)$, когда $\rho\in\Omega(\xi)$; г) функция $g(\rho)=o_\xi(\varphi(\xi))\,O_\rho(\psi(\rho))$ и для каждого фиксированного $\xi\geq\alpha$ справедливо соотношение $g(\rho)=o(\psi(\rho))$ при $\rho\to\infty$ и $\rho\in\in\Omega(\xi)$. Тем самым функция $\varphi(\xi)$ в определениях символов (65) учитывает поведение функции $g(\rho)$ во всей системе множеств $\Omega(\xi)$, $\xi\geq\alpha$, а функция $\psi(\rho)$ — внутри каждого конкретного множества $\Omega(\xi)$. Поэтому обозначение аргументов в этих функциях существенно, что оправдывает следующие обозначения: $1(\xi):=1$, $\xi\geq\alpha$, и $1(\rho):=1$, $\rho\in\Omega$, применяемые при использовании символов а) и г) из (65).

***Замечание* 6.** В определениях символов (65) существен выбор множеств $\Omega(\xi)$ в представлении множества Ω. Однако если множества $\Omega_1(\xi)\subseteq\Omega(\xi)$, $\xi\geq\alpha$, то из того, что функция $g(\rho)$ равна одному из символов (65) при $\rho\in$ $\in\bigcup_{\xi\geq\alpha}\Omega(\xi)$, следует, что эта функция равна соответствующему символу и при $\rho\in\bigcup_{\xi\geq\alpha}\Omega_1(\xi)$.

Вычислим главные части функционалов U_h на решениях $x_{j,r}(\rho;t)$, взятых из утверждения 7. Для этого представим каждый из функционалов U_h в виде

$$U_h(x) = a_h x^{(k_h)}(0) + b_h x^{(k_h)}(1) + f_h(x), \quad x\in H^{k_h}, \tag{66}$$

где числа a_h и b_h взяты из соотношений (8), а функционалы $f_h\in H_*^{k_h}$. Согласно утверждению 1 в случае регулярных краевых условий эти функционалы f_h представимы в виде

$$f_h(x) = \int_0^1 x^{(k_h)}(t)\,d\sigma_h(t) + \sum_{l=0}^{k_h-1} c_{h,l}\,x^{(l)}(0), \quad x\in H^{k_h}, \tag{67}$$

с функциями σ_h ограниченной вариации на $[0,1]$, непрерывными в 0 и 1. Кроме того, в силу определения 3 имеем, что в случае κ-регулярных краевых условий функционалы f_h удовлетворяют требованиям

$$\left|f_h(e^{i\zeta t})\right| \le c(1+|\zeta|)^{k_h-\kappa}, \quad \zeta\in\mathbb{R}, \quad 0\le\kappa\le\kappa_q, \tag{68}$$

а в случае $(o-\kappa)$-регулярных условий —

$$\left|f_h(e^{i\zeta t})\right| = o\left(|\zeta|^{k_h-\kappa}\right), \quad \zeta\to\pm\infty, \quad \zeta\in\mathbb{R}, \quad 0\le\kappa<\kappa_q. \tag{69}$$

Функционалы f_h и функционалы, заданные выражениями $x^{(k_h)}(0)$ и $x^{(k_h)}(1)$, непрерывны на пространстве H^{k_h}, а числа $k_h\le n+s-1$. Поэтому, подставляя решения $x_{j,r}(\rho;t)$, взятые из утверждения 7, в функционалы (66) и учитывая оценки (61) и определение символа $O_{\xi,\rho}$, получаем представления

$$\begin{gathered} U_h(x_{j,r}(\rho;t)) = \rho^{k_h}\Big(a_h\omega_j^{k_h} + e^{\rho\omega_j}b_h\omega_j^{k_h} + \rho^{-k_h}f_h(e^{\rho\omega_j t}) + \\ + O_{\xi,\rho}\big(e^{2\xi}|\rho|^{-\kappa_q}\big)\Big), \quad j\in\Lambda_r^-, \\ U_h(x_{j,r}(\rho;t)) = \rho^{k_h}\Big(e^{-\rho\omega_j}a_h\omega_j^{k_h} + b_h\omega_j^{k_h} + \rho^{-k_h}f_h(e^{\rho\omega_j(t-1)}) + \\ + O_{\xi,\rho}\big(e^{2\xi}|\rho|^{-\kappa_q}\big)\Big), \quad j\in\Lambda_r^+, \quad \rho\in\bigcup_{\xi\ge 0}\Omega_r(c,\kappa_q,\xi), \end{gathered} \tag{70}$$

в которых функционалы f_h заданы формулой (67), если краевые условия регулярны, и функционалы f_h удовлетворяют требованию (68) или (69) соответственно в случае κ- или $(o-\kappa)$-регулярных краевых условий. Далее предполагается, что введенные в п. 5 числа ν_r и функции $\nu_r^{\pm}(z)$ построены по коэффициентам a_h, b_h и по порядкам k_h краевых условий (66).

Установим поведение характеристического определителя внутри соответствующего ему угла. Для $\xi\ge 0$ через $(\Xi_r)_{-\xi}$ обозначим ξ-внутренность угла Ξ_r, т. е. множество тех точек $\rho\in\Xi_r$, расстояние которых до границы угла Ξ_r больше чем ξ.

Лемма 9. *Найдется такое* $c_0>0$, *что*

$$\Delta_r(\rho) = \rho^{\hat{k}}\big(\nu_r + o_\xi(1)O_\rho(1)\big), \quad \rho\in\bigcup_{\xi\ge c_0}(\Xi_r)_{-\xi}.$$

Доказательство. Из определения ξ-внутренности углов Ξ_r следует, что если точка $\rho\in(\Xi_r)_{-\xi}$, то точки $\rho\pm\xi\omega_j^{-1}\in\Xi_r$, $j=1,\ldots,n$, откуда и из определения (43) множеств мультииндексов $\Lambda_r^{\pm}$ имеем $\operatorname{Re}(\rho+\xi\omega_j^{-1})\omega_j<0$, $j\in\Lambda_r^-$, и $\operatorname{Re}(\rho-\xi\omega_j^{-1})\omega_j>0$, $j\in\Lambda_r^+$, т. е.

$$\operatorname{Re}\rho\omega_j < -\xi, \quad j\in\Lambda_r^-, \quad \operatorname{Re}\rho\omega_j>\xi, \quad j\in\Lambda_r^+, \quad \rho\in(\Xi_r)_{-\xi}. \tag{71}$$

Следовательно, $e^{\rho\omega_j} = O_{\xi,\rho}\big(e^{-\xi}1(\rho)\big)$, $j\in\Lambda_r^-$, и $e^{-\rho\omega_j} = O_{\xi,\rho}\big(e^{-\xi}1(\rho)\big)$, $j\in\Lambda_r^+$, при $\rho\in\bigcup_{\xi\ge 0}(\Xi_r)_{-\xi}$. Огрубляя эти соотношения, имеем

$$\begin{gathered} e^{\rho\omega_j} = o_\xi(1)\,O_\rho(1), \quad j\in\Lambda_r^-, \\ e^{-\rho\omega_j} = o_\xi(1)\,O_\rho(1), \quad j\in\Lambda_r^+, \quad \rho\in\bigcup_{\xi\ge 0}(\Xi_r)_{-\xi}. \end{gathered} \tag{72}$$

Учитывая эти равенства, утверждение 2, вид (67) функционалов f_h и неравенства (71), получаем

$$\begin{aligned}\rho^{-k_h} f_h(e^{\rho\omega_j t}) &= o_\xi(1)\,O_\rho(1), \quad j \in \Lambda_r^-,\\ \rho^{-k_h} f_h(e^{\rho\omega_j (t-1)}) &= o_\xi(1)\,O_\rho(1), \quad j \in \Lambda_r^+, \quad \rho \in \bigcup_{\xi \geq 0} (\Xi_r)_{-\xi}.\end{aligned} \tag{73}$$

Слагаемое $O_{\xi,\rho}\left(e^{2\xi}|\rho|^{-\kappa_q}\right)$ в представлениях (70) определяет в области $\Omega_r(c, \kappa_q, 0) = \left\{\rho\colon \rho \in \Xi_r,\ |\rho| > c^{1/\kappa_q} + 1\right\}$ равномерно стремящуюся к нулю при $\rho \to \infty$ и $\rho \in \Xi_r$ функцию. А так как для всех точек $\rho \in (\Xi_r)_{-\xi}$ расстояние от них до вершины угла Ξ_r (т. е. до точки нуль) больше ξ, то $|\rho| > \xi$ при $\rho \in (\Xi_r)_{-\xi}$. Отсюда, учитывая вид области $\Omega_r(c, \kappa_q, 0)$, получаем включение $(\Xi_r)_{-\xi} \subset \Omega_r(c, \kappa_q, 0)$ для $\xi \geq c^{1/\kappa_q} + 1$. Из отмеченных свойств слагаемого $O_{\xi,\rho}\left(e^{2\xi}|\rho|^{-\kappa_q}\right)$ и области $(\Xi_r)_{-\xi}$ следует, что это слагаемое в представлениях (70) можно заменить на $o_\xi(1)\,O_\rho(1)$, если $\rho \in \bigcup_{\xi \geq c_0} (\Xi_r)_{-\xi}$, где постоянная $c_0 = c^{1/\kappa_q} + 1$. Заменяя теперь в представлениях (70) слагаемые из левых частей равенств (72) и (73) на символ $o_\xi(1)\,O_\rho(1)$ из правых частей этих равенств, выводим представления

$$\begin{aligned}U_h(x_{j,r}(\rho; t)) &= \rho^{k_h}\left(a_h \omega_j^{k_h} + o_\xi(1)\,O_\rho(1)\right), \quad j \in \Lambda_r^-,\\ U_h(x_{j,r}(\rho; t)) &= \rho^{k_h}\left(b_h \omega_j^{k_h} + o_\xi(1)\,O_\rho(1)\right), \quad j \in \Lambda_r^+, \quad \rho \in \bigcup_{\xi \geq c_0} (\Xi_r)_{-\xi}.\end{aligned}$$

Из этих представлений, учитывая равенство $\left(o_\xi(1)\,O_\rho(1)\right) \times \left(o_\xi(1)\,O_\rho(1)\right) = o_\xi(1)\,O_\rho(1)$, определения (50) и (62) чисел ν_r и характеристического определителя $\Delta_r(\rho)$, выводим утверждение леммы.

Следствие 8. *Пусть оператор F удовлетворяет требованиям* (1) *и* (2), *а краевые условия $U_h(x) = 0$, $h = 1, \ldots, n$, регулярны в смысле определения* 2. *Тогда краевая задача* (4) *имеет не более счетного числа собственных значений, все они имеют конечные кратности и лежат в полосах $\left\{\rho\colon \left|\mathrm{Re}\,\rho\omega_j\right| < \xi\right\}$, $j = 1, \ldots, n$, при некотором $\xi > 0$, а единственной возможной предельной точкой этих собственных значений может быть бесконечность.*

Доказательство. Так как краевая задача (4) регулярна, то согласно следствию 6 числа $\nu_r \neq 0$, $r = 0, \pm 1, \ldots$. Отсюда и из леммы 9 вытекает существование такого $\xi > 0$, что

$$\left|\rho^{-\hat{k}}\Delta_r(\rho)\right| > |\nu_r/2|, \quad \rho \in (\Xi_r)_{-\xi}. \tag{74}$$

Поэтому все собственные значения задачи (4), совпадающие в силу теоремы 2 с нулями ее характеристических определителей $\Delta_r(\rho)$, лежат вне ξ внутренностей углов Ξ_r, т. е. лежат внутри полос $\left\{\rho\colon \left|\mathrm{Re}\,\rho\omega_j\right| < \xi\right\}$. Остальные утверждения следствия 8 получаются из замечания 2 и первого утверждения следствия 4.

Пусть $\Pi_r^-(\xi, M)$ и $\Pi_r^+(\xi, M)$ — прямоугольные полуполосы ширины 2ξ, осями симметрии которых являются соответственно нижняя и верхняя стороны угла Ξ_r, а основания их отстоят от начала координат на расстоянии M.

Например, в случае $n=4d+1$ для угла Ξ_0 такими полуполосами являются

$$\Pi_0^-(\xi,M) = \{\rho\colon |\mathrm{Re}\rho\omega_{2d}|<\xi,\ \mathrm{Im}\rho\omega_{2d}>M\},\quad n = 4d+1, \tag{75}$$

$$\Pi_0^+(\xi,M) = \{\rho\colon |\mathrm{Re}\rho\omega_{2d+1}|<\xi,\ -\mathrm{Im}\rho\omega_{2d+1}>M\},\quad n = 4d+1. \tag{76}$$

***Доказательство теоремы* 3.** Далее считаем $\xi_1>\xi$, а ξ и M столь большими, что выполнено неравенство (74) и обе полуполосы $\Pi_r^{\pm}(\xi_1,M)$ принадлежат области $\Omega_r(c,\kappa_q)$. Из оценки (63) вытекает ограниченность функции $\rho^{-\hat{k}}\Delta_r(\rho)$ в полуполосах $\Pi_r^{\pm}(\xi_1,M)$, а из оценки (74) — равномерная отделимость от нуля этой функции на тех боковых сторонах полуполос $\Pi_r^{\pm}(\xi,M)$, которые лежат внутри угла Ξ_r. Поэтому к функции $\rho^{-\hat{k}}\Delta_r(\rho)$ применимо утверждение 5, на основании которого получаем оценку (64) при $\rho\in\in\Pi_r^{\pm}(\xi,M+1)$. Из этого свойства функции $\rho^{-\hat{k}}\Delta_r(\rho)$ и из оценки (74) следует утверждение теоремы 3.

Для доказательства теоремы 1 потребуются две леммы об асимптотическом представлении характеристического определителя внутри полуполос $\Pi_r^{\pm}(\xi, M(\xi))$ при $M(\xi)=(ce^{\xi})^{1/\kappa_q}+1$. Выбор такого значения $M(\xi)$ обусловлен требованием принадлежности этих полуполос области $\Omega_r(c,\kappa_q)$, являющейся областью определения характеристического определителя $\Delta_r(\rho)$.

Лемма 10. *Пусть n — нечетное число, а на прямых $\tilde{\rho}_{j_r^-}$ и $\tilde{\rho}_{j_r^+}$ лежат соответственно нижняя и верхняя стороны угла Ξ_r. Тогда характеристический определитель краевой задачи* (4) *допускает представление: если индексы j_r^- и $j_r^+\in\Lambda_r^-$, то*

$$\Delta_r(\rho) = \rho^{\hat{k}}\Big(\nu_r+e^{\rho\omega_{j_r^{\pm}}}\nu_{r\pm1}+\beta_{\pm}(\rho)\Big), \tag{77}$$

а если индексы j_r^- и $j_r^+\in\Lambda_r^+$, то

$$\Delta_r(\rho) = \rho^{\hat{k}}\Big(\nu_r+e^{\rho\omega_{j_r^{\mp}}}\nu_{r\pm1}+\beta_{\pm}(\rho)\Big), \tag{78}$$

где одновременно используется либо нижний знак „–", либо верхний знак „+". При этом $\beta_-(\rho)$ и $\beta_+(\rho)$ — такие функции, что для них соответственно при $\rho\in\bigcup_{\xi>0}\Pi_r^-(\xi,\ (ce^{\xi})^{1/\kappa_q}+1)$ и при $\rho\in\bigcup_{\xi>0}\Pi_r^+(\xi,\ (ce^{\xi})^{1/\kappa_q}+1)$ справедливо одно из следующих асимптотических представлений в зависимости от требований на функционалы f_h из равенств (66):

1) *в случае регулярных краевых условий, т. е. когда функционалы f_h заданы равенствами* (67),

$$\beta_{\pm}(\rho) = o_{\xi}(e^{\xi})\,O_{\rho}(1) + O_{\xi}(e^{2n\xi})\,o_{\rho}(1); \tag{79}$$

2) *в случае κ-регулярных краевых условий, т. е. когда функционалы f_h удовлетворяют требованию* (68),

$$\beta_{\pm}(\rho) = O_{\xi,\rho}\Big(e^{2n\xi}|\rho|^{-\kappa}\Big); \tag{80}$$

3) *в случае $(o-\kappa)$-регулярных краевых условий, т. е. когда функционалы f_h удовлетворяют требованию* (69),

$$\beta_{\pm}(\rho) = O_{\xi}(e^{2n\xi})\,o_{\rho}\big(|\rho|^{-\kappa}\big). \tag{81}$$

Доказательство проведем лишь в случае, соответствующем нижней стороне угла Ξ_r, т. е. установим формулы (77) и (78) лишь при нижнем знаке „–", а значит, при $\rho \in \bigcup_{\xi>0} \Pi_r^-(\xi, (ce^{\xi})^{1/\kappa_q}+1)$. Случай, соответствующий верхней стороне угла Ξ_r, аналогичен. Кроме того, далее будем предполагать, что $n \geq 3$, так как случай $n = 1$ значительно проще.

По условию нижняя сторона угла Ξ_r, совпадающая с лучом $\tilde{\rho}_r^-$, лежит на прямой $\tilde{\rho}_{j_r^-}$ и поэтому $\operatorname{Re}\rho\omega_{j_r^-} = 0$ при $\rho \in \tilde{\rho}_r^-$, а значит,

$$|\operatorname{Re}\rho\omega_j| = |\rho|\left|\operatorname{Im}\left(\omega_j\omega_{j_r^-}^{-1}\right)\right| \geq |\rho|\sin(\pi/n), \quad j \neq j_r^-.$$

Предположим вначале, что индекс $j_r^- \in \Lambda_r^-$. Тогда из определения (43) множеств индексов $\Lambda_r^{\pm}$ имеем

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\rho\omega_j \leq -|\rho|\sin(\pi/n), \quad j \in \Lambda_r^- \setminus \{j_r^-\},\\ -\operatorname{Re}\rho\omega_j \leq -|\rho|\sin(\pi/n), \quad j \in \Lambda_r^+, \quad \rho \in \tilde{\rho}_r^-.\end{gathered} \tag{82}$$

Луч $\tilde{\rho}_r^-$ является осью симметрии полуполосы $\Pi_r^-(\xi, 0)$, имеющей ширину 2ξ, поэтому для любой точки $\rho \in \Pi_r^-(\xi, 0)$ найдется такое число ξ_ρ с $|\xi_\rho| < \xi$, что $\rho + \xi_\rho \in \tilde{\rho}_r^-$, откуда и из оценок (82) выводим

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\rho\omega_j = \operatorname{Re}(\rho+\xi_\rho)\omega_j - \operatorname{Re}\xi_\rho\omega_j \leq -|\rho+\xi_\rho|\sin(\pi/n) + |\xi_\rho| < \\ < -|\rho|\sin(\pi/n) + 2\xi, \quad j \in \Lambda_r^- \setminus \{j_r^-\},\\ -\operatorname{Re}\rho\omega_j < -|\rho|\sin(\pi/n) + 2\xi, \quad j \in \Lambda_r^+, \quad \rho \in \Pi_r^-(\xi, 0).\end{gathered} \tag{83}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}e^{\rho\omega_j} = O_{\xi,\rho}\left(e^{2\xi}e^{-|\rho|\sin(\pi/n)}\right), \quad j \in \Lambda_r^- \setminus \{j_r^-\},\\ e^{-\rho\omega_j} = O_{\xi,\rho}\left(e^{2\xi}e^{-|\rho|\sin(\pi/n)}\right), \quad j \in \Lambda_r^+, \quad \rho \in \bigcup_{\xi>0}\Pi_r^-(\xi, 0).\end{gathered} \tag{84}$$

Пусть функционалы f_h представимы в виде (67). Учитывая эти представления, утверждение 2, неравенства (83) и соотношения (84), получаем

$$\begin{gathered}\rho^{-k_h} f_h(e^{\rho\omega_j t}) = O_\xi(e^{2\xi})\, o_\rho(1), \quad j \in \Lambda_r^- \setminus \{j_r^-\},\\ \rho^{-k_h} f_h\left(e^{\rho\omega_j(1-t)}\right) = O_\xi(e^{2\xi})\, o_\rho(1), \quad j \in \Lambda_r^+, \quad \rho \in \bigcup_{\xi>0}\Pi_r^-(\xi, 0).\end{gathered} \tag{85}$$

Кроме того, из утверждения 2 следует представление

$$\int_0^1 e^{\rho\omega_{j_r^-} t}\, d\sigma_h(t) = o_\xi(e^{\xi})\, O_\rho(1), \quad \rho \in \bigcup_{\xi>0}\{\rho\colon \operatorname{Re}\rho\omega_{j_r^-} < \xi\}.$$

Но $\rho^{-k_h}\partial_t^l e^{\rho\omega_{j_r^-} t}\big|_{t=0} = \rho^{l-k_h}\omega_{j_r^-}^l = O_\xi(e^{2\xi})\, o_\rho(1)$ при $l < k_h$ и $\rho \in \bigcup_{\xi>0}\{\rho\colon \operatorname{Re}\rho\omega_{j_r^-} < \xi\}$, а полуполоса $\Pi_r^-(\xi, 0) \subset \{\rho\colon \operatorname{Re}\rho\omega_{j_r^-} < \xi\}$. Отсюда, учитывая замечание 6, получаем, что для функционала f_h, заданного равенством (67), справедливо представление

$$\rho^{-k_h} f_h\left(e^{\rho\omega_{j_r^-} t}\right) = o_\xi(e^\xi)\, O_\rho(1) + O_\xi(e^{2\xi})\, o_\rho(1), \quad \rho \in \bigcup_{\xi>0} \Pi_r^-(\xi, 0).$$

Подставляя при соответствующих индексах j это равенство и равенства (84) и (85) в правые части равенств (70), заключаем, что

$$U_h\left(x_{j,r}(\rho;t)\right) = \rho^{k_h}\left(a_h\omega_j^{k_h} + O_\xi(e^{2\xi})o_\rho(1)\right), \quad j \in \Lambda_r^- \setminus \{ j_r^- \},$$

$$U_h\left(x_{j,r}(\rho;t)\right) = \rho^{k_h}\left(b_h\omega_j^{k_h} + O_\xi(e^{2\xi})o_\rho(1)\right), \quad j \in \Lambda_r^+,$$

и

$$U_h\left(x_{j_r^-,r}(\rho;t)\right) = \rho^{k_h}\left(a_h\omega_{j_r^-}^{k_h} + e^{\rho\omega_{j_r^-}}\, b_h\omega_{j_r^-}^{k_h} + o_\xi(e^\xi)\, O_\rho(1) + O_\xi(e^{2\xi})o_\rho(1)\right) \quad (86)$$

при $\rho \in \bigcup_{\xi>0} \Pi_r^-\left(\xi, (ce^\xi)^{1/\kappa_q} + 1\right)$. Из этих представлений, учитывая следующее правило перемножения символов:

$$\left(O_\xi(e^{\alpha\xi})o_\rho(1)\right) \times \left(O_{\xi,\rho}\left(e^{\beta\xi}1(\rho)\right)\right) = O_\xi\left(e^{(\alpha+\beta)\xi}\right)o_\rho(1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

и символическое тождество $e^{\rho\omega_{j_r^-}} = O_{\xi,\rho}\left(e^\xi 1(\rho)\right)$ при $\rho \in \bigcup_{\xi>0} \Pi_r^-(\xi, 0)$, а также используя предположение $j_r^- \in \Lambda_r^-$, определение (53), (55) функции $\nu_r^-(z)$ и первое утверждение леммы 7, выводим равенство (77) с функцией $\beta_-(\rho)$, представимой в виде (79).

Если же индекс $j_r^- \in \Lambda_r^+$, то рассуждения аналогичны, лишь множества индексов $\Lambda_r^- \setminus \{ j_r^- \}$ и Λ_r^+ заменяются соответственно на множества индексов Λ_r^- и $\Lambda_r^+ \setminus \{ j_r^- \}$, а вместо равенства (86) в этом случае используется равенство

$$U_h\left(x_{j_r^-,r}(\rho;t)\right) = \rho^{k_h}\left(e^{-\rho\omega_{j_r^-}} a_h\omega_{j_r^-}^{k_h} + b_h\omega_{j_r^-}^{k_h} + o_\xi(e^\xi)\, O_\rho(1) + O_\xi(e^{2\xi})o_\rho(1)\right),$$

$$\rho \in \bigcup_{\xi>0} \Pi_r^-\left(\xi, (ce^\xi)^{1/\kappa_q} + 1\right).$$

Кроме того, так как по предположению индекс $j_r^- \in \Lambda_r^+$, то в заключительной части доказательства равенства (78) необходимо воспользоваться определениями (54), (55) функции $\nu_r^-(z)$ и вторым утверждением леммы 7.

Пусть теперь краевые условия κ-регулярны, т. е. функционалы f_h удовлетворяют требованию (68), а индекс $j_r^- \in \Lambda_r^-$. Тогда согласно лемме 5 и замечанию 4 к ней с учетом неравенств (83) и неравенства $\operatorname{Re}\rho\omega_{j_r^-} < \xi$ при $\rho \in \Pi_r^-(\xi, 0)$ получаем

$$\rho^{-k_h} f_h\left(e^{\rho\omega_j t}\right) = O_{\xi,\rho}\left(e^{2\xi}|\rho|^{-\kappa}\right), \quad j \in \Lambda_r^-,$$

$$\rho^{-k_h} f_h\left(e^{\rho\omega_j(1-t)}\right) = O_{\xi,\rho}\left(e^{2\xi}|\rho|^{-\kappa}\right), \quad j \in \Lambda_r^+, \quad \rho \in \bigcup_{\xi>0} \Pi_r^-(\xi, 0).$$

Подставляя при соответствующих индексах j эти равенства и равенства (84) в правые части равенств (70) и используя условие $\kappa \le \kappa_q$, имеем

$$U_h\left(x_{j,r}(\rho;t)\right) = \rho^{k_h}\left(a_h\omega_j^{k_h} + O_{\xi,\rho}\left(e^{2\xi}|\rho|^{-\kappa}\right)\right), \quad j \in \Lambda_r^- \setminus \{ j_r^- \},$$

$$U_h\left(x_{j,r}(\rho;t)\right) = \rho^{k_h}\left(b_h\omega_j^{k_h} + O_{\xi,\rho}\left(e^{2\xi}|\rho|^{-\kappa}\right)\right), \quad j \in \Lambda_r^+,$$

$$U_h\left(x_{j_r^-,r}(\rho;t)\right) = \rho^{k_h}\left(a_h\omega_{j_r^-}^{k_h} + e^{\rho\omega_{j_r^-}} b_h\omega_{j_r^-}^{k_h} + O_{\xi,\rho}\left(e^{2\xi}|\rho|^{-\kappa}\right)\right)$$

при $\rho \in \bigcup_{\xi>0} \Pi_r^-\left(\xi, (ce^{\xi})^{1/\kappa_q}+1\right)$. Из этих представлений и из тех же соображений, что и в случае регулярных краевых условий, вытекает равенство (77) с функцией $\beta_-(\rho)$, представимой в виде (80).

В случае κ-регулярных краевых условий и индекса $j_r^- \in \Lambda_r^+$ доказательство равенства (78) нуждается в тех же пояснениях, что и в случае регулярных краевых условий.

И наконец, заметим, что если краевые условия $(o-\kappa)$-регулярны, то вывод равенств (77) и (78) с функцией $\beta_-(\rho)$, представимой в виде (81), тот же, что и в случае κ-регулярных краевых условий. Лишь в силу требования (69) и леммы 5 везде символ $O_{\xi,\rho}\left(e^{2\xi}|\rho|^{-\kappa}\right)$ заменяется на символ $O_\xi(e^{2\xi})\, o_\rho\left(|\rho|^{-\kappa}\right)$ и учитывается условие $\kappa<\kappa_q$.

Полностью повторяя доказательство этой леммы с использованием леммы 8 вместо леммы 7, получаем, что в случае четного n справедливо следующее утверждение.

Лемма 11. *Пусть n — четное число, а на прямых $\tilde\rho_{j_r^-}$ и $\tilde\rho_{j_r^+}$ лежат соответственно нижняя и верхняя стороны угла Ξ_r, причем оба индекса j_r^- и $j_r^+ \in \Lambda_r^-$. Тогда характеристический определитель краевой задачи* (4) *допускает представление*

$$\Delta_r(\rho) = \rho^{\hat k}\left(\nu_r + e^{\rho\omega_{j_r^\pm}}\nu_{1,r}^{\pm} + e^{2\rho\omega_{j_r^\pm}}\nu_{r\pm1} + \beta_\pm(\rho)\right)$$

с коэффициентами $\nu_{1,r}^{\pm}$, взятыми из леммы 8, и где одновременно используется либо нижний знак „–", либо верхний знак „+". Функции $\beta_-(\rho)$ и $\beta_+(\rho)$ такие, что для них соответственно при $\rho \in \bigcup_{\xi>0}\Pi_r^-\left(\xi,(ce^{\xi})^{1/\kappa_q}+1\right)$ и $\rho \in$ $\in \bigcup_{\xi>0}\Pi_r^+\left(\xi,(ce^{\xi})^{1/\kappa_q}+1\right)$ справедливо одно из следующих асимптотических представлений в зависимости от требований на функционал f_h из равенств (66): *в случае регулярных краевых условий*

$$\beta_\pm(\rho) = o_\xi(e^{2\xi})\,O_\rho(1) + O_\xi(e^{2n\xi})o_\rho(1),$$

а в случае κ- или $(o-\kappa)$-регулярных краевых условий справедливо соответственно равенство (80) *или* (81).

***Замечание* 7.** Отметим, что при доказательстве лемм 9 – 11 требование неравенства нулю числа $\theta_0\theta_1$, если n — нечетно, и числа θ_0, если n — четно, из определений 1 – 3 не использовалось, а учитывалось только представление (66) функционалов f_h и одно из предположений (67) – (69) относительно f_h. Требование неравенства нулю чисел $\theta_0\theta_1$ или θ_0 из определений 1 – 3 использовалось уже при доказательстве теоремы 3. Это требование играет существенную роль и в приведенном далее доказательстве теоремы 1, которое проведем, рассмотрев отдельно случаи регулярных и κ-регулярных краевых условий.

Доказательство теоремы* 1 *в случае регулярных краевых условий. В этом случае, как отмечалось в п. 2, утверждение теоремы 1 записывается в виде формул (15), если n — нечетно, и в виде (16), если n — четно. Поэтому согласно следствию 8 формулы (15) и (16) достаточно установить лишь для больших по модулю собственных значений. Рассмотрим два случая нечетного и четного n.

1. Пусть n — нечетно, а ξ — столь велико, что выполнено утверждение следствия 8 (далее, возможно, ξ будет увеличено). Рассмотрим какую-либо полуполосу $\Pi_r^-(\xi, M)$, считая прямую $\tilde\rho_{j_r^-}$ ее осью симметрии, а число $M\geq$

$\geq (ce^{\xi})^{1/\kappa_q} + 1$. Предположим, что эта полуполоса имеет вид

$$\Pi_r^-(\xi, M) = \{\rho \colon |\operatorname{Re}\rho\omega_{j_r^-}| < \xi,\ \operatorname{Im}\rho\omega_{j_r^-} > M\}, \tag{87}$$

а индекс $j_r^- \in \Lambda_r^-$. Введем функции

$$\alpha_-(\rho) = \nu_r + e^{\rho\omega_{j_r^-}}\nu_{r-1}, \quad \beta_-(\rho) = \rho^{-\hat{k}}\Delta_r(\rho) - \alpha_-(\rho)$$

и заметим, что нулями функции $\alpha_-(\rho)$ являются числа

$$\rho_v^0 = (\omega_{j_r^-})^{-1}(i2\pi v + \ln(-\nu_{r-1}/\nu_r)), \tag{88}$$

которые при достаточно больших натуральных v лежат в полуполосе $\Pi_r^-(\xi, M)$, если в ее определении $\xi > |\ln|\nu_{r-1}/\nu_r||$.

Боковую сторону полуполосы $\Pi_r^-(\xi, M)$, лежащую внутри угла Ξ_r, обозначим через $\ell_-(\xi)$. Это означает, что луч $\ell_-(\xi)$ принадлежит стороне угла $(\Xi_r)_{-\xi}$, являющегося ξ-внутренностью угла Ξ_r, а значит, при $\rho \in \ell_-(\xi)$ характеристический определитель допускает асимптотическое представление, указанное в лемме 9. Из этой леммы и из равенств (72) имеем

$$\alpha_-(\rho) = \nu_r + o_\xi(1)\,O_\rho(1), \quad \beta_-(\xi) = o_\xi(1)\,O_\rho(1), \quad \rho \in \bigcup_{\xi \geq c_0} \ell_-(\xi).$$

Выбирая теперь ξ столь большим, что в этих равенствах функции, заданные символами $o_\xi(1)\,O_\rho(1)$, по модулю были меньше чем $4^{-1}|\nu_r|$ при $\rho \in \ell_-(\xi)$, получаем, что для функций $\alpha_-(\rho)$ и $\beta_-(\rho)$ на луче $\ell_-(\xi)$ выполнено условие (27).

Боковую сторону полуполосы $\Pi_r^-(\xi, M)$, лежащую вне угла Ξ_r, обозначим через $\ell_+(\xi)$. Так как по предположению индекс $j_r^- \in \Lambda_r^-$, то $\operatorname{Re}\rho\omega_{j_r^-} = \xi$ при $\rho \in \ell_+(\xi)$ и поэтому

$$|\alpha_-(\rho)| \geq e^{\xi}|\nu_{r-1}| - |\nu_r|, \quad \rho \in \ell_+(\xi).$$

Выбираем теперь $\xi > 0$ столь большим, что $e^{-\xi}|\nu_r/\nu_{r-1}| < 4^{-1}$, а в представлении (79) функции $\beta_-(\rho)$ функция, определяемая символом $o_\xi(e^{\xi}) \times O_\rho(1)$, по модулю меньше чем $4^{-1}e^{\xi}|\nu_{r-1}|$, $\rho \in \ell_+(\xi)$. Далее при выбранном ξ находим такое число M_ξ, что функция, определяемая символом $O_\xi(e^{2n\xi})o_\rho(1)$, также по модулю меньше чем $4^{-1}e^{\xi}|\nu_{r-1}|$, $\rho \in \ell_+(\xi)$, $|\rho| > M_\xi$. Отсюда получаем оценки

$$|\alpha_-(\rho)| > (3/4)e^{\xi}|\nu_{r-1}|, \quad |\beta_-(\rho)| < (1/2)e^{\xi}|\nu_{r-1}|,$$
$$\rho \in \ell_+(\xi),\ |\rho| > M_\xi.$$

Тем самым функции $\alpha(\rho/\omega_{j_r^-})$ и $\beta(\rho/\omega_{j_r^-})$ удовлетворяют условиям следствия 5, откуда, учитывая формулы (88) нулей функции $\alpha(\rho)$, заключаем, что нули ρ_v функции $\alpha_-(\rho) + \beta_-(\rho) = \rho^{-\hat{k}}\Delta_r(\rho)$ представимы в виде $\rho_v = (\omega_{j_r^-})^{-1}(i2\pi v + O(1))$, $v = 1, 2, \ldots$.

Аналогично показывается, что нули функции $\Delta_{r+n}(\rho)$, лежащие в полуполосе

$$\Pi^-_{r+n}(\xi, M_\xi) = \left\{\rho\colon \left|\operatorname{Re}\rho\omega_{j_r^-}\right| < \xi,\ -\operatorname{Im}\rho\omega_{j_r^-} > M_\xi\right\} = \left\{\rho\colon -\rho \in \Pi^-_r(\xi, M_\xi)\right\},$$

представимы в виде $\rho_v = \left(\omega_{j_r^-}\right)^{-1}(i2\pi v + O(1))$, $v = -1, -2, \ldots$, причем нумерация этих чисел отрицательным индексом v обусловлена видом полуполосы $\Pi^-_{r+n}(\xi, M_\xi)$, содержащей числа ρ с $\operatorname{Im}\rho\omega_{j_r^-} < 0$.

Тем самым показано, что лежащие в полосе $\left\{\rho\colon \left|\operatorname{Re}\rho\omega_{j_r^-}\right| < \xi\right\}$ (при достаточно большом значении ξ) собственные числа регулярной краевой задачи (4) представимы в виде

$$\rho_v = \left(\omega_{j_r^-}\right)^{-1}(i2\pi v + O(1)),\ v = 0, \pm 1, \ldots. \tag{89}$$

Но из вида (4) краевой задачи вытекает, что вместе с собственным значением ρ_v ее собственными значениями являются также числа $\rho_v \exp(i2\pi k/n)$, $k = 1, \ldots, n-1$, причем согласно утверждению 3 кратности всех собственных значений $\rho_v \exp(i2\pi k/n)$ совпадают при каждом $k = 1, \ldots, n$. Поэтому домножая серию (89) собственных значений на числа $\exp(i2\pi k/n)$, $k = 1, \ldots, n-1$, и замечая, что числа $\left(\omega_{j_r^-}\right)^{-1}\exp(i2\pi k/n)$, $k = 1, \ldots, n$, являются всеми корнями степени n из -1, получаем все n серий (15) собственных значений задачи (4).

Случаи, когда полуполоса $\Pi^-_r(\xi, M) = \left\{\rho\colon \left|\operatorname{Re}\rho\omega_{j_r^-}\right| < \xi,\ \operatorname{Im}\rho\omega_{j_r^-} > M\right\}$ *или индекс* $j_r^- \in \Lambda^+_r$, рассматриваются аналогично. Отметим, что эта аналогия была использована при рассмотрении собственных значений задачи (4), лежащих в полуполосе $\Pi^-_{r+n}(\xi, M_\xi)$.

2. Пусть n — четно, а $d = n/2$. Рассмотрим какую-либо полуполосу $\Pi^-_r(\xi, M)$, считая прямую $\tilde{\rho}_{j_r^-}$ ее осью симметрии, индекс $j_r^- \in \Lambda^-_r$, а число $M \geq (ce^\xi)^{1/\kappa_q} + 1$. Не уменьшая общности, предполагаем, что эта полуполоса $\Pi^-_r(\xi, M)$ имеет вид (87), иначе рассматривается полуполоса $\Pi^-_{r+d}(\xi, M) = \left\{\rho\colon -\rho \in \Pi^-_r(\xi, M)\right\}$. Введем функции

$$\alpha_-(\rho) = \nu_r + e^{\rho\omega_{j_r^-}}\nu^-_{1,r} + e^{2\rho\omega_{j_r^-}}\nu_{r-1}, \quad \beta_-(\rho) = \rho^{-\hat{k}}\Delta_r(\rho) - \alpha_-(\rho)$$

и заметим, что нулями функции $\alpha_-(\rho)$ являются числа

$$\rho'_v = \left(\omega_{j_r^-}\right)^{-1}(i2\pi v + \ln z_1), \quad \rho''_v = \left(\omega_{j_r^-}\right)^{-1}(i2\pi v + \ln z_2),$$

где z_1 и z_2 — корни уравнения $\nu_r + z\nu^-_{1,r} + z^2\nu_{r-1} = 0$, а индекс $v = 0, \pm 1, \ldots$. Далее полностью повторяя те же рассуждения, что и в случае нечетного n, получаем формулы (16).

Тем самым в случае регулярных краевых условий теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 1 в случае κ- и $(o-\kappa)$-регулярных краевых условий. Если краевые условия κ-регулярны, то считаем $\kappa > 0$, так как случай $\kappa = 0$ соответствует уже рассмотренному случаю регулярных краевых условий. Далее отдельно рассматриваются случаи n, равного $4d+1$, $4d-1$, $4d-2$ и $4d$.

1. Пусть $n = 4d+1$, $d = 0, 1, \ldots$, а ξ — столь велико, что выполнено утверждение следствия 8 и $\xi > \left|\ln|\theta_1/\theta_0|\right|$, где числа θ_0 и θ_1 взяты из определений 1 – 3 регулярных краевых условий. Установим представление характеристического определителя $\Delta_0(\rho)$ в полуполосе $\Pi^-_0\left(\xi, (ce^\xi)^{1/\kappa_q} + 1\right)$, где полуполоса $\Pi^-_0(\xi, M)$ задана равенством (75). Отметим, что осью симметрии этой полуполосы является прямая $\tilde{\rho}_{2d}$, а в силу равенства (44) индекс $2d$

принадлежит множеству Λ_0^-. Поэтому для характеристического определителя $\Delta_0(\rho)$ справедливо представление (77) при $r=0$. Подставляя в это представление значения чисел ν_0 и ν_{-1}, вычисленные в следствии 6 $(n=4d+1)$, имеем

$$\Delta_0(\rho) = \rho^{\hat{k}}\Big(\theta_0 + e^{\rho\omega_{2d} + i2\pi\hat{k}/n}\theta_1 + \beta_-(\rho)\Big) =$$
$$= \theta_0\rho^{\hat{k}}\Big(1 - e^{\rho\omega_{2d} + \ln(-\theta_1/\theta_0) + i2\pi\hat{k}/n} + \theta_0^{-1}\beta_-(\rho)\Big),$$

причем из асимптотического представления (80) функции $\beta_-(\rho)$ при $\rho \in \in \bigcup_{\xi>0}\Pi_0^-\big(\xi, (ce^{\xi})^{1/\kappa_q}+1\big)$ следует, что эта функция в полуполосе $\Pi_0^-(\xi, (ce^{\xi})^{1/\kappa_q}+1)$ (т. е. при выбранном значении ξ) допускает оценку (28). Отсюда и из леммы 4 вытекает, что все достаточно большие по модулю нули $\rho_{2d+1,v}$ функции $\Delta_0(\rho)$ (а значит, согласно теореме 2, и собственные значения задачи (4)), находящиеся в полуполосе $\Pi_0^-(\xi, M)$, допускают представление

$$\rho_{2d+1,v}\omega_{2d} = i2\pi v - \ln(-\theta_1/\theta_0) - i2\pi\hat{k}/n + O(v^{-\kappa}),$$

где $v=N_+, N_+ + 1, \ldots$, а N_+ — некоторое натуральное число. Из вида (35) корней ω_j следует тождество $\omega_{2d}^{-1} = \omega_{2d+1}$, т. е.

$$\rho_{2d+1,v} = \omega_{2d+1}\left\{i2\pi\left(v - \frac{\hat{k}}{n}\right) - \ln\left(-\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + O(v^{-\kappa})\right\}, \quad v=N_+, N_+ + 1, \ldots. \tag{90}$$

Установим теперь представление функции $\Delta_0(\rho)$ в полуполосе $\Pi_0^+(\xi, (ce^{\xi})^{1/\kappa_q}+1)$, где полуполоса $\Pi_0^+(\xi, M)$ задана равенством (76). Осью симметрии этой полуполосы является прямая $\tilde{\rho}_{2d+1}$, а в силу равенства (44) индекс $2d+1$ принадлежит множеству Λ_r^-. Поэтому для характеристического определителя $\Delta_0(\rho)$ справедливо представление (77) при $r=0$. Подставляя в это представление значения чисел ν_0 и ν_1, вычисленные в следствии 6 $(n= = 4d+1)$, имеем

$$\Delta_0(\rho) = \theta_0\rho^{\hat{k}}\big(1 - e^{\rho\omega_{2d+1} + \ln(-\theta_1/\theta_0)} + \theta_0^{-1}\beta_+(\rho)\big),$$

причем функция $\beta_+(\rho)$ в полуполосе $\Pi_0^+(\xi, (ce^{\xi})^{1/\kappa_q}+1)$ допускает оценку (28). Отсюда и из леммы 4 вытекает, что все достаточно большие по модулю собственные значения $\rho_{2d,v}$ задачи (4), находящиеся в полуполосе $\Pi_0^+(\xi, M)$, допускают представление

$$\rho_{2d,v}\omega_{2d+1} = -i2\pi v - \ln(-\theta_1/\theta_0) + O(v^{-\kappa}),$$

где $v=N_-, N_- + 1, \ldots$, а N_- — некоторое натуральное число. Вибор в данном случае знака „–" перед слагаемым $i2\pi v$ обусловлен видом (76) полуполосы $\Pi_0^+(\xi, M)$, которая содержит лишь точки ρ с $\operatorname{Im}\rho\omega_{2d+1} < 0$. Тем самым

$$\rho_{2d,v} = \omega_{2d}\left\{-i2\pi v - \ln\left(-\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + O(v^{-\kappa})\right\}, \quad v=N_-, N_- + 1, \ldots. \tag{91}$$

Далее, как и в доказательстве теоремы 1 в случае регулярных краевых условий, домножая каждую из серий (90) и (91) собственных значений на $\exp(i2\pi k/n)$, $k=1, \ldots, n-1$, получаем все собственные значения краевой задачи (4). Полученные в результате этих домножений формулы для собственных значений совпадают с формулами (11) при $n=4d+1$, если положить в них $N=\max\left\{N_+-\left[\hat{k}/n\right], N_-\right\}$.

В случае $(o-\kappa)$-регулярных краевых условий функции $\beta_\pm(\rho)$ в полуполосах $\Pi_0^\pm(\xi, M)$ удовлетворяют условию (30) леммы 4, поэтому формулы (90) и (91) справедливы, если в них $O(v^{-\kappa})$ заменить на $o(v^{-\kappa})$.

2. Пусть $n=4d-1$, $d=1, 2, \ldots$, а число ξ — то же, что и ранее. В этом случае полуполосы

$$\Pi_0^-(\xi, M) = \left\{\rho\colon \left|\operatorname{Re}\rho\omega_{2d+1}\right|<\xi,\ -\operatorname{Im}\rho\omega_{2d+1}>M\right\},$$

$$\Pi_0^+(\xi, M) = \{\rho\colon |\operatorname{Re}\rho\omega_{2d}|<\xi,\ \operatorname{Im}\rho\omega_{2d}>M\},$$

причем их осями симметрии являются соответственно прямые $\tilde{\rho}_{2d+1}$ и $\tilde{\rho}_{2d}$, а в силу равенств (46) индексы $2d+1$ и $2d$ принадлежат множеству Λ_0^+. Поэтому в данном случае для характеристического определителя $\Delta_0(\rho)$ справедливо представление (78) при $r=0$, из которого, полностью повторяя те же рассуждения, что и в случае $n=4d+1$, получаем формулы (11) в случае $n=4d-1$.

3. Пусть $n=4d-2$, $d=1, 2, \ldots$, а ξ — столь велико, что выполнено утверждение следствия 8 и $\xi>|\ln|z_l||$, $l=1, 2$, где z_1 и z_2 — корни уравнения (13). Из вида (41) и (48) угла Ξ_0 и множеств мультииндексов $\Lambda_0^\pm$ следует, что нижняя сторона угла Ξ_0 лежит на прямой $\tilde{\rho}_{2d-1}=\tilde{\rho}_{2d}$, индекс $2d-1$ принадлежит множеству Λ_0^-, индекс $2d$ принадлежит Λ_0^+, а полуполоса $\Pi_0^-(\xi, M)$ ширины 2ξ и с осью симметрии, совпадающей с нижней стороной угла Ξ_0, имеет вид

$$\Pi_0^-(\xi, M) = \left\{\rho\colon \left|\operatorname{Re}\rho\omega_{2d-1}\right|<\xi,\ \operatorname{Im}\rho\omega_{2d-1}>M\right\}.$$

Учитывая теперь лемму 11 и следствие 7, получаем представление

$$\Delta_0(\rho) = \rho^{\hat{k}}\left(\theta_0+e^{\rho\omega_{2d-1}}(\theta_{-1}+\theta_1)-e^{2\rho\omega_{2d-1}}\theta_0 e^{i2\pi\hat{k}/n}+\beta_-(\rho)\right),$$

причем функция $\beta_-(\rho)=C_{\xi,\rho}\left(e^{2n\xi}|\rho|^{-\kappa}\right)$ при $\rho\in\bigcup_{\xi>0}\Pi_0^-\left(\xi,(ce^{\xi})^{1/\kappa_q}+1\right)$. Тем самым функция $\beta_-(\rho)$ в полуполосе $\Pi_0^-\left(\xi,(ce^{\xi})^{1/\kappa_q}+1\right)$ (т. е. при выбранном значении ξ) допускает оценку (28). Отсюда, из равенства $\omega_{2d-1}^{-1}=\omega_{2d}$ и из леммы 4 вытекает следующее представление для достаточно больших по модулю собственных значений $\rho_{2d,v}$ задачи (4), находящихся в полуполосе $\Pi_0^-(\xi, M)$:

$$\rho_{2d,v}^{(l)} = \omega_{2d}\left\{i2\pi v+\ln z_l+O\left(v^{-\kappa/2}\right)\right\},\quad l=1, 2,\quad v=N, N+1, \ldots, \tag{92}$$

где N — некоторое натуральное число, причем если корни z_1 и z_2 уравнения (13) различны, то равенства (92) справедливы при замене в них $O\left(v^{-\kappa/2}\right)$ на $O(v^{-\kappa})$. Далее, как и в доказательстве теоремы 1 в случае регулярных краевых условий, домножая серию (92) собственных значений на $\exp(i2\pi k/n)$, $k=1, \ldots, n-1$, получаем все собственные значения краевой задачи (4). Очевидно, что полученные в результате этих домножений формулы для собственных значений совпадают с формулами (12) при $n=4d-2$.

Случай $(o-\kappa)$-регулярных краевых условий рассматривается аналогично.

4. И наконец, пусть $n = 4d$, $d = 1, 2, \ldots$, а ξ — то же, что и в случае $n = 4d - 2$. Тогда рассматривается полуполоса $\Pi_0^+(\xi, M)$, соответствующая верхней стороне угла Ξ_0. Из вида (42) этого угла и из формул (49) для множеств мультииндексов $\Lambda_0^{\pm}$ следует, что эта полуполоса имеет вид

$$\Pi_0^+(\xi, M) = \{\rho\colon |\operatorname{Re}\rho\omega_{2d}| < \xi, \; -\operatorname{Im}\rho\omega_{2d} > M\},$$

ее осью симметрии является прямая $\tilde{\rho}_{2d} = \tilde{\rho}_{2d+1}$, индекс $2d$ принадлежит Λ_0^-, а индекс $2d+1$ принадлежит Λ_0^+. Воспользовавшись теперь леммой 11 и следствием 7, получаем представление

$$\Delta_0(\rho) = \rho^{\hat{k}}\Big(\theta_0 + e^{\rho\omega_{2d}}(\theta_{-1} + \theta_1) - e^{2\rho\omega_{2d}}\theta_0 e^{-i2\pi\hat{k}/n} + \beta_+(\rho)\Big),$$

где для функции $\beta_+(\rho)$ в полуполосе $\Pi_0^+(\xi, M)$ справедлива оценка (28). Отсюда, из равенства $\omega_{2d}^{-1} = \omega_{2d+1}$ и из леммы 4 вытекает следующее представление для достаточно больших по модулю собственных значений $\rho_{2d+1,v}$ задачи (4), находящихся в полуполосе $\Pi_0^+(\xi, M)$:

$$\rho_{2d+1,v}^{(l)} = \omega_{2d+1}\{-i2\pi v + \ln z_l + O(v^{-\kappa/2})\}, \quad l = 1, 2, \quad v = N, N+1, \ldots,$$

причем если корни z_1 и z_2 уравнения (13) различны, то в этих равенствах $O(v^{-\kappa/2})$ заменяется на $O(v^{-\kappa})$ (выбор знака „–" перед слагаемым $i2\pi v$ обусловлен видом полуполосы $\Pi_0^+(\xi, M)$, которая содержит лишь точки ρ с $\operatorname{Im}\rho\,\omega_{2d} < 0$). Далее делая те же пояснения, что и случае $n = 4d - 2$, получаем формулы (12) в случае $n = 4d$.

На этом доказательство теоремы 1 закончено.

***Замечание* 8.** Если отказаться от требований (2) и предположить дополнительно, что все порядки краевых условий $k_h > \gamma - n$, то справедливо такое **утверждение**. *Пусть оператор* F *удовлетворяет при* $q = \infty$ *требованию* (1), *а краевые условия* $U_h(x) = 0$, $h = 1, \ldots, n$, — κ*-регулярны в смысле определения* 3, *причем* $0 \le \kappa \le n - \gamma + k_h$, $h = 1, \ldots, n$, *и* $\kappa \le n + s - 1 - \gamma$. *Тогда справедливы все утверждения теоремы* 1. *Кроме того, если требование* κ*-регулярности краевых условий заменить на требование их* $(o - \kappa)$*-регулярности, считая при этом* $0 \le \kappa < n - \gamma + k_h$, $h = 1, \ldots, n$, *и* $\kappa < n + s - 1 - \gamma$, *то утверждения теоремы* 1 *справедливы с заменой в них* $O(v^{-\kappa})$ *и* $O(v^{-\kappa/2})$ *на* $o(v^{-\kappa})$ *и* $o(v^{-\kappa/2})$ *соответственно.* Доказательство сформулированного здесь утверждения повторяет доказательство теоремы 1, лишь вместо неравенства (23) из работы [1] (теорема 1) используется неравенство (26) из [1] (теорема 2) с теми же пояснениями, что были сделаны к утверждению 7.

1. *Радзиевский Г. В.* Асимптотика по параметру фундаментальной системы решений линейного функционально-дифференциального уравнения // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 6. – С. 811–836.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы. – М.: Мир, 1974. – 662 с.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
5. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. – Баку: Элм, 1985. – 220 с.
6. *Bozhinov N.* Convolutional representations of commutants and multipliers. – Sofia: Bulg. Acad. Sci., 1988. – 310 p.
7. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.

8. *Любич Ю. И.* О собственных и присоединенных функциях оператора дифференцирования // Изв. вузов. Математика. – 1959. –**11**, № 4. – С. 94–108.
9. *Молоденков В. А.* Равносуммируемость по М. Риссу разложений по некоторым системам показательных функций // Мат. заметки. – 1974. –**15**, № 3. – С. 381–386.
10. *Krall A. M.* The development of general differential and general differential-boundary systems // Rocky Mountain J. Math. – 1975. – **5**, № 4. – P. 493–542.
11. *Седлецкий А. М.* Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, № 5. – С. 51–95.
12. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат. – 1982. – № 6. – С. 12–21.
13. *Баскаков А. Г., Кацаран Т. К.* Спектральный анализ интегродифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 8. – С. 1424–1433.
14. *Божинов Н. С.* О корневом разложении нелокального интегродифференциального оператора Штурма – Лиувилля с интегральной частью типа Вольтерра // Докл. РАН. – 1994. – **335**, № 5. – С. 549–552.
15. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 3. – С. 384–396.
16. *Radzievskii G.* The rate of convergence of decompositions of ordinary functional-differential operators by eigenfunctions. – Kiev, 1994. – P. 14–27. – (Preprint/ Nat. Acad. Sci. Ukraine. Inst. Math., 94. 29. – 44 p.).
17. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Асимптотика по параметру решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1460–1469.
18. *Salaff S.* Regular boundary conditions for ordinary differential operators// Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – **134**. – P. 355–373.
19. *Радзиевский Г. В.* Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, № 2. – С. 81–145.
20. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
21. *Радзиевский Г. В.* О базисности производных цепочек // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1975. – **39**, № 5. – С. 1182–1218.
22. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5-ти т. – М.: Гостехтеоретиздат, 1953. – Т. 3, ч.2. – 676 с.
23. *Титчмарш Е. К.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 480 с.
24. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
25. *Маркус А. С.* О голоморфных оператор-функциях // Докл. АН СССР. – 1958. – **119**, № 6. – С. 1099–1102.
26. *Гохберг И. Ц., Сигал Е. И.* Глобальная факторизация мероморфной оператор-функции и некоторые ее приложения // Мат. исслед. – 1971. – **6**, вып. 1. – С. 63–87.
27. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 2. – С. 43–118.
28. *Гохберг И. Ц.* О некоторых вопросах спектральной теории конечномероморфных оператор-функций // Изв. АН АрмССР. Мат. – 1971. – **6**, № 2–3. – С. 160–181.
29. *Verblunsky S.* On an expansion in exponential series // Quart. J. Math. – 1956. – **7**, № 27. – P. 231–240.
30. *Левин Б. Я.* О базисах показательных функций в L^2 // Зап. мат. отд-ния физ.-мат. фак. ХГУ и ХМО. Сер. 4. – 1961. – **27**. – С. 39–48.
31. *Левин Б. Я.* Целые функции (курс лекций). – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. – 124 с.
32. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. – М.: Наука, 1968. – 472 с.
33. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

Получено 04.05.95