УДК 512.544

Н. С. Черников (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Я. Д. Половицкий, В. Л. Чечулин (Перм. ун-т, Россия)

ГРУППЫ С УСЛОВИЕМ ИНЦИДЕНТНОСТИ ДЛЯ НЕЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП

We give a description of groups with incidentical condition for noncyclic subgroups up to minimal noncyclic subgroups. Under this condition, a complete constructive description of locally graded groups (in particular, of arbitrary locally finite groups) is obtained.

Наведено опис груп із вказаною в назві статті умовою з точністю до мінімальних нециклічних підгруп. Одержано повний конструктивний опис локально ступінчастих (зокрема, довільних локально скінченних) груп з цією умовою.

Определение 1. *Будем говорить, что подгруппы A и B группы G инцидентны, если $A \le B$ либо $B < A$.*

Определение 2. *Группу G будем называть I-группой, если любые две ее подгруппы инцидентны.*

Определение 3. *Будем говорить, что в группе G выполняется I_H-условие (т. е. G есть I_H-группа), если она нециклическая и любые две ее нециклические подгруппы инцидентны.*

Нетрудно установить справедливость следующих предложений об I-группах и I_H-группах.

Лемма 1. *I-группы исчерпываются квазициклическими и примарными циклическими группами.*

Лемма 2. *В произвольной I_H-группе существует не более одной минимальной и не более одной максимальной нециклической подгруппы.*

Всюду в дальнейшем p, q, r — простые числа.

Нам понадобится следующее известное описание конечных минимальных нециклических групп (оно легко получается из теоремы Миллера–Морено).

Лемма 3. *Конечные нециклические группы, все истинные подгруппы которых циклические, исчерпываются группами следующих типов:*

1) *элементарная абелева группа порядка p^2;*
2) *группа кватернионов;*
3) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $a^p = b^{q^n} = 1$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$, $p \ne q$, $n \ge 1$.

***Следствие 1.** Конечная минимальная нециклическая группа является разрешимой ступени не выше двух.*

Лемма 4. *Группа G, содержащая минимальную нециклическую подгруппу H, тогда и только тогда является I_H-группой, когда такая ее подгруппа единственна, G/H — примарная циклическая либо квазициклическая группа и все непериодические метабелевы подгруппы G цикличны.*

***Доказательство.** Необходимость.* Пусть I_H-группа G содержит минимальную нециклическую подгруппу H. В силу леммы 2 такая подгруппа единственна. Если A/H и B/H — произвольные подгруппы группы G/H, то они инцидентны, так как подгруппы A и B нециклические. Значит, по лемме 1 G/H является примарной циклической или квазициклической группой. Выполнимость последнего условия вытекает из лемм 6–8.

Достаточность. В силу леммы 1 G/H — I-группа. Если C и D — две нециклические подгруппы группы G, то каждая из них содержит H ввиду единственности последней, локальной конечности нециклических метабелевых подгрупп G. Подгруппы C/H и D/H I-группы G/H инцидентны, и потому C и D инцидентны, т. е. G является I_H-группой. Лемма доказана.

***Следствие* 2.** *Конечная группа тогда и только тогда является I_H-группой, когда ее минимальная нециклическая подгруппа единственна и определяет примарную циклическую фактор-группу.*

Отсюда и из следствия 1 вытекает следующее предложение.

***Следствие* 3.** *Конечная I_H-группа является разрешимой группой ступени не выше трех.*

Перейдем к описанию конечных I_H-групп. Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 5. *2-группа диэдра G не является I_H-группой.*

Доказательство. Достаточно показать, что содержащаяся в G подгруппа диэдра H порядка 8 не является I_H-группой. Как известно, $H = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $a^4 = b^2 = 1$, $bab = a^{-1}$. Отсюда следует $(ba)^2 = (bab)a = 1$. Поэтому $(\langle b\rangle \times \times \langle a^2\rangle)$ и $(\langle ba\rangle \times \langle a^2\rangle)$ — различные и, значит, неинцидентные четверные подгруппы Клейна группы G. Значит, G не является I_H-группой. Лемма доказана.

Теорема 1. *Конечная группа G тогда и только тогда является I_H-группой, когда она — группа одного из следующих типов:*

1) $G = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $|a| = p^n$, $n \geq 1$, $|b| = p$;

2) $G = \langle a\rangle \times \langle b\rangle \times \langle c\rangle$, $|a| = |b| = p$, $|c| = q^n$, $n \geq 1$, $p \neq q$;

3) *группа кватернионов*;

4) $G = Q \times \langle g\rangle$, Q — *группа кватернионов*, $|g| = p^n$, $n \geq 1$, $p \neq 2$;

5) $G = Q \leftthreetimes \langle g\rangle$, Q — *группа кватернионов*, $|g| = 3^n$, $n \geq 1$, *причем* $\langle g\rangle \cap \cap Z(G) = \langle g^3\rangle$;

6) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = p^n$, $n \geq 2$, $p \neq 2$, $|b| = p$, *причем* $b^{-1}ab = = a^{1+p^{n-1}}$;

7) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = 2^n$, $n \geq 3$, $|b| = 2$, *причем* $bab = a^{\pm 1 + 2^{n-1}}$;

8) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle$, $|a| = |b| = p$, $G' \neq 1$, $|c| = q^n$, $n \geq 1$ *и* q *не делит* $p-1$;

9) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = p$, $|b| = q^n$, $n \geq 1$, $G' = \langle a\rangle$ *и* q *делит* $p-1$;

10) $G = (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \times \langle c\rangle$, *где* $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ — *группа типа* 9, *причем* $[a, b^q] = 1$, $|c| = r^m$, $m \geq 1$ *и* $r \neq p$, $r \neq q$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть конечная I_H-группа G содержит минимальную нециклическую подгруппу H. В силу следствия 2 H нормальна в G и фактор-группа G/H — циклическая q-группа.

По лемме 3 H — группа одного из указанных там трех типов. В соответствии с этим рассмотрим случаи 1–3.

1. H — элементарная абелева группа порядка p^2.

1.1. $p \neq q$. Тогда $G = H \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|b| = q^n$. Пусть c — произвольный элемент из $\langle b\rangle$. Покажем, что если $T = H \leftthreetimes \langle c\rangle$ неабелева, то H — минимальная нормальная подгруппа группы T. Действительно, в противном случае в силу теоремы Машке $H = H_1 \times H_2$, $|H_i| = p$ и H_i нормальна в T, $i = 1, 2$. Тогда хотя бы одна из подгрупп $H_1 \leftthreetimes \langle c\rangle$ или $H_2 \leftthreetimes \langle c\rangle$ неабелева и вместе с тем содержит отличную от H минимальную нециклическую подгруппу. Противоречие с леммой 2.

Покажем, что если G неабелева, то q не делит $p-1$. Действительно, в этом случае найдется такой элемент $c \in \langle b\rangle$, что $c \notin Z(G)$, но $c^q \in Z(G)$. Как показано выше, H — минимальная нормальная подгруппа группы T, и потому каждая подгруппа порядка p группы H определяет в группе T класс сопряженных подгрупп порядка q. Но число всех подгрупп порядка p группы H равно $p+1$, и потому q делит $p+1$. Если также q делит $p-1$, то $q=2$. Но тогда, очевидно, для произвольного $h \in H \setminus 1$ либо $c^{-1}hc = h^{-1}$ и $\langle h \rangle$ нормальна в T, либо $|hc^{-1}hc| = p$ и $|hc^{-1}hc| \subseteq Z(T)$ (поскольку $c^2 \in$ $\in Z(T)$). Противоречие с тем, что H — минимальная нормальная подгруппа группы G.

Таким образом, если G неабелева, то она группа типа 8, а если абелева, то она есть группа типа 2.

1.2. $p=q$, т. е. G — p-группа. Пусть c — произвольный элемент порядка p группы G и h — какой-нибудь отличный от единицы элемент из $H \bigcap Z(H\langle c \rangle)$. Тогда либо $\langle h \rangle \langle c \rangle$ — минимальная нециклическая группа, либо $c \in \langle h \rangle$. В любом случае с учетом единственности H имеем $c \in H$. Таким образом, H содержит все элементы порядка p группы G. Так как факторгруппа G/H циклическая, то $G = H\langle a \rangle$ для некоторого a. В силу доказанного $|H \bigcap \langle a \rangle| = p$. Тогда $|G : \langle a \rangle| = p$ и, значит, $\langle a \rangle$ нормальна в G. Пусть $b \in H \setminus \langle a \rangle$. Очевидно, $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $G' \subseteq H \bigcap \langle a \rangle$. В частности, $|G'| \leq p$. Тогда с учетом леммы 5 из описания p-групп, содержащих циклическую подгруппу индекса p (см., например, [1], теорема 12.5.1), вытекает, что G — группа одного из типов 1, 6 или 7.

2. H — группа кватернионов.

2.1. G — 2-группа. Пусть K — подгруппа порядка 2 из H и L — произвольная подгруппа порядка 2 группы G. Поскольку H нормальна в G, то KL — подгруппа порядка, не превышающего 4, группы G. В силу леммы 2 KL не может быть минимальной нециклической подгруппой группы G. Поэтому $|KL| = 2$ и, значит, $L=K$. Таким образом, K — единственная подгруппа порядка 2 группы G. Тогда (см., например, [1], теорема 12.5.2) G — группа кватернионов либо обобщенная группа кватернионов. Если порядок $|G| \geq$ ≥ 16, то G/K является 2-группой диэдра, что противоречит лемме 5. Поэтому $|G| = 8$, и G — группа кватернионов, т. е. группа типа 3.

2.2. G — непримарна. Тогда $G = H \leftthreetimes \langle g \rangle$ для некоторой q-подгруппы $\langle g \rangle \neq 1$, причем $q \neq p$. Как известно, $\operatorname{Out} H \cong S_3$ и потому или $G = H \times \langle g \rangle$ (т. е. G — группа типа 4), или $q=3$ и $\langle g^3 \rangle = \langle g \rangle \bigcap Z(G)$, т. е. G — группа типа 5.

3. $H = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle$, $a^p = d^{q^n} = 1$, $p \neq q$, $d^q \in Z(H)$. Так как H нормальна в G, $\langle d \rangle$ — силовская q-подгруппа группы H и $N_H(\langle d \rangle) = \langle d \rangle$, то ввиду леммы Фраттини $G = \langle a \rangle \leftthreetimes N_G(\langle d \rangle)$. Подгруппа $N_G(\langle d \rangle)$ циклическая, поскольку иначе она содержала бы отличную от H минимальную нециклическую подгруппу. По той же причине для силовской q'-подгруппы $\langle c \rangle$ группы $N_G(\langle d \rangle)$ подгруппа $\langle a \rangle \langle c \rangle$ циклическая. Поэтому $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \times \langle c \rangle$ для силовской q-подгруппы $\langle b \rangle$ группы $N_G(\langle d \rangle)$ и $(p, |c|) = 1$. Если $c=1$, то G — группа типа 9.

Пусть $c \neq 1$. Поскольку G/H примарна по некоторому r (следствие 2) и $H \subseteq \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, то $|c| = r^m$, $m \geq 1$ и $|\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle / H| = r^k$, $k \geq 0$. Но $(p, |c|) =$ $= 1$. Следовательно, $r \neq q$, $r \neq p$ и $H = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, т. е. G — группа типа 10. Необходимость доказана.

Достаточность. В силу следствия 2 для того, чтобы конечная нециклическая группа G была I_H-группой, достаточно проверить, что некоторая ее минимальная нециклическая подгруппа содержится в каждой нециклической подгруппе и определяет примарную циклическую фактор-группу. Проверим это для каждого из приведенных в теореме 1 типов подгрупп.

1. Справедливость теоремы для случаев 1–4, 9 и 10 очевидна.

2. G — группа типа 6 или 7. Пусть p — простое число, делящее $|G|$, $\langle c\rangle$ — подгруппа порядка p группы $\langle a\rangle$ и $H = \langle c\rangle \times \langle b\rangle$. Нетрудно видеть, что H нормальна в G. Очевидно, $G = H\langle a\rangle$ и $H \bigcap \langle a\rangle = \langle c\rangle$. Покажем, что H содержит все элементы порядка p группы G. Пусть $d \in G$ и $|d| = p$. Тогда $d = a^*h$ для некоторых элементов $a^* \in \langle a\rangle$, $h \in H$. Элемент $dH = a^*H$ фактор-группы G/H имеет порядок не выше p. Поэтому $|a^*| \le p^2$ (с учетом того, что $|\langle a\rangle \bigcap H| = p$).

Пусть сначала $p = 2$ (т. е. G — группа типа 7). Тогда, поскольку $|a^*| \le 4$ и $n \ge 3$, то $a^* \in \langle a^2\rangle = Z(G)$ и, значит, $\langle a^*\rangle H$ абелева. Поэтому $1 = d^2 = (a^*)^2 h^2 = (a^*)^2$. Так как $|a^*| \le 2$, то $a^* \in \langle c\rangle \subseteq H$, и, значит, $d = a^*h \in H$. Итак, для $p = 2$ сформулированное выше утверждение о подгруппе H доказано.

Пусть $p > 2$ (т. е. G — группа типа 6). Поскольку G имеет ступень нильпотентности не выше двух, то она, как известно (см., например, [1, с. 205]), регулярна. Поэтому $1 = d^p = (a^*)^p h^p (c^*)^p$ для некоторого $c^* \in \langle c\rangle$. Но $h^p = (c^*)^p = 1$. Следовательно, $(a^*)^p = 1$. Тогда $a^* \in \langle c\rangle \subset H$, и, значит, $d \in H$.

Итак, подгруппа H содержит все элементы порядка p группы G. Пусть теперь K — произвольная нециклическая подгруппа группы G. Покажем, что $K \supseteq H$. Пусть это не так. Тогда $|K \bigcap H| \le p$. Далее, $K/(K \bigcap H) \cong KH/H \subseteq \langle a\rangle H/H \cong \langle a\rangle/(\langle a\rangle \bigcap H)$. Итак, p-группа K — расширение группы простого порядка посредством циклической; поэтому она абелева. Но поскольку H содержит все элементы порядка p группы G, то $(K \bigcap H)$ — единственная подгруппа порядка p группы K. Так как K абелева, то она циклическая — противоречие.

Итак, $K \supseteq H$. Поскольку G/H циклическая, то, как отмечалось выше, G — I_H-группа.

3. G — группа типа 5. Пусть K — произвольная нециклическая подгруппа группы G. Покажем, что $K \supseteq Q$. Пусть это не так; тогда подгруппа $K \bigcap Q$ — циклическая 2-группа порядка не выше четырех, инвариантная в K, и $K/(K \bigcap Q)$ — циклическая 3-группа. Поскольку $|\mathrm{Aut}(K \bigcap Q)| \le 2$, то $K \bigcap Q \subset Z(K)$. Отсюда следует, что группа K — циклическая. Противоречие. Значит, $K \supseteq Q$. Так как G/Q — примарная циклическая группа, то G — I_H-группа (следствие 2).

4. G — группа типа 8. Пусть K — произвольная нециклическая подгруппа группы G. Покажем, что $K \ge H$. Предположим противное. Поскольку $K \bigcap H \ne 1$, то тогда $|K \bigcap H| = p$. Пусть S — силовская q-подгруппа группы K. Тогда S циклическая и, очевидно, $K = (K \bigcap H) \leftthreetimes S$. Поэтому K неабелева, и, значит, S имеет $p = |K \bigcap H|$ сопряженных в K подгрупп. Следовательно, по третьей теореме Силова q делит $p - 1$, что противоречит условию. Значит, $H \subseteq K$. Поскольку G/H — циклическая q-группа, то G — I_H-группа. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению произвольных I_H-групп.

Лемма 6. *Пусть* G *—* I_H*-группа и* $1 < H \le G$. *Тогда фактор-группа* $N_G(H)/H$ *— периодическая.*

Доказательство. Действительно, пусть $N_G(H)/H$ содержит бесконечную циклическую подгруппу S/H. Рассмотрим в S/H подгруппы A/H и B/H индексов 2 и 3 соответственно. Поскольку они неинцидентны, то подгруппы A и B неинцидентны. Поэтому ввиду I_H-условия хотя бы одна из них (например, A) — бесконечная циклическая группа. Так как A и A/H — бесконечные циклические, то $H = 1$ — противоречие с выбором H. Лемма доказана.

Лемма 7. *Бесконечная периодическая абелева группа* G *является* I_H*-группой тогда и только тогда, когда она есть произведение квазициклической* p*-группы и циклической* q*-группы,* $q \ne p$ *(последняя может быть и единичной).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — бесконечная периодическая абелева I_H-группа. Покажем сначала, что она содержит минимальную нециклическую подгруппу. Это очевидно, если в G существует конечная нециклическая подгруппа. Если же все конечные подгруппы группы G циклические, то G — периодическая локально циклическая и потому разлагается в прямое произведение примарных циклических и квазициклических групп. Из I_H-условия видно, что число множителей в этом разложении конечно, и потому G — черниковская группа. Поскольку она бесконечна, то содержит квазициклическую подгруппу P, которая и будет минимальной нециклической подгруппой, причем такая подгруппа в силу леммы 2 единственна. Тогда G/P — конечная группа и в силу леммы 5 является q-группой. Так как G абелева, то $G = P \times Q$, где Q — циклическая q-группа, причем если $Q \ne 1$, то $p \ne q$ (иначе в G существовала бы вторая минимальная нециклическая подгруппа порядка p^2). Необходимость доказана.

Достаточность утверждения леммы очевидна. Лемма доказана.

Лемма 8. *Бесконечная* I_H*-группа* G *не содержит циклических подгрупп конечного индекса.*

Доказательство. Действительно, пусть F — циклическая подгруппа группы G и $|G:F|$ конечен. По теореме Пуанкаре F содержит подгруппу H конечного индекса, нормальную в G. Пусть $H = \langle h \rangle$, и K — произвольная собственная подгруппа группы G. Тогда K бесконечна, так как иначе $\langle h^2 \rangle \curlywedge K$ и $\langle h^3 \rangle \curlywedge K$ — две неинцидентные нециклические подгруппы I_H-группы G. Поскольку индекс $|G:H|$ конечен, K бесконечна и H циклическая, то индекс $|H : K \cap H|$ конечен. Тогда и индекс $|G : K \cap H|$ конечен, а значит, и индекс $|G:K|$ конечен. Следовательно, по теореме Ю. Г. Федорова (см., например, [2, с. 505]) G — бесконечная циклическая группа. Противоречие.

Предложение 1. *Бесконечная минимальная нециклическая группа* G *не содержит собственных подгрупп конечного индекса и либо является квазициклической, либо неабелева и имеет следующие свойства:*

1) *произвольная ее собственная подгруппа содержится в некоторой максимальной подгруппе;*

2) $G/Z(G)$ *— бесконечная простая группа;*

3) $Z(G)$ *совпадает с пересечением любых двух максимальных подгрупп группы* G;

4) G *порождается любыми двумя своими неперестановочными элементами.*

Доказательство. Группа G, очевидно, является I_H-группой и потому в силу леммы 8 не содержит истинных подгрупп конечного индекса. Пусть G неабелева. Тогда произвольная ее собственная (циклическая) подгруппа, в частности, порожденная двумя элементами, содержится в ее максимальной абелевой подгруппе, а последняя является, очевидно, и максимальной собственной подгрупой группы G. Таким образом, G имеет свойства 1 и 4.

Далее, любые две максимальные подгруппы группы G порождают ее и, очевидно, содержат $Z(G)$. Отсюда следует справедливость свойства 3.

Поскольку G неабелева, то по доказанному выше индекс $|G:Z(G)|$ бесконечен. Пусть N нормальна в G, $N < G$ и A — максимальная подгруппа группы G, содержащая N (такая подгруппа существует в силу свойства 1). Тогда A не инвариантна в G, так как иначе ее индекс в G был бы простым числом в противоречие с леммой 8. В таком случае для произвольной сопряженной с A в G подгруппы B, отличной от A, имеем $N \subset B$. Значит, $N \subseteq A \bigcap B = Z(G)$. Таким образом, все собственные инвариантные подгруппы группы G содержатся в $Z(G)$. Следовательно, фактор-группа $G/Z(G)$ — простая и, значит, G имеет свойство 3.

Теперь для завершения доказательства настоящего предложения достаточно показать, что если группа G абелева, то она квазициклическая. Рассмотрим сначала случай, когда G периодическая. Возьмем $p \in \pi(G)$. Пусть P и Q — силовские соответственно p- и p'-подгруппы группы G. Тогда $Q = 1$. Действительно, иначе P и Q были бы собственными и, значит, конечными циклическими подгруппами группы G. Но тогда и группа $G = P \times Q$ была бы конечной. Следовательно, G — бесконечная локально циклическая p-группа и, значит, квазициклическая группа.

Пусть группа G не является периодической. Тогда она содержит некоторую свободную абелеву подгруппу A с периодической фактор-группой G/A (см., например, [2]). Пусть B — подгруппа индекса 6 группы A. Тогда G/B — периодическая абелева непримарная группа, все собственные подгруппы которой циклические. По доказанному выше G/B — конечная группа. Но в таком случае B — собственная подгруппа конечного индекса группы G. Противоречие с леммой 8. Значит, G периодическая и потому квазициклическая. Предложение доказано.

Напомним, что локально ступенчатой называется группа, в которой каждая отличная от единицы конечнопорожденная подгруппа имеет подгруппу отличного от единицы конечного индекса (С. Н. Черников — см., например, [3]).

Группа, в которой каждая подгруппа с двумя порождающими локально ступенчатая, называется бинарно ступенчатой (Н. С. Черников).

***Следствие* 4.** *Пересечение класса бесконечных минимальных нециклических групп с классом бинарно ступенчатых групп совпадает с классом квазициклических групп.*

Доказательство. Действительно, если G принадлежит этому пересечению и не квазициклическая, то в силу предложения 1 она является 2-порожденной и не содержит собственных подгрупп конечного индекса. Противоречие с определением бинарно ступенчатой группы.

Теорема 2. *Произвольная группа G является I_H-группой тогда и только тогда, когда каждая метабелева подгруппа группы G периодическая или циклическая и G содержит единственную минимальную нециклическую подгруппу, причем фактор-группа по ней является либо квазициклической, либо примарной циклической группой.*

Доказательство. *Достаточность* имеет место согласно лемме 4. Докажем *необходимость*. Пусть G — I_H-группа. Ввиду леммы 4 достаточно показать, что G содержит минимальную нециклическую подгруппу. Поскольку произвольная конечная нециклическая группа такую подгруппу, очевидно, содержит, то далее можно ограничиться случаем, когда G — бесконечная группа. Заметим, что произвольная конечная I_H-группа ввиду следствия3 разрешимая ступени не выше трех. Если G абелева, то по доказанному в предложении 1 она квазициклическая.

Пусть G неабелева. Тогда она содержит некоторую неабелеву 2-порожденную подгруппу H. Далее, не теряя общности можно считать, что $G = H$, т. е. G — 2-порождена.

Покажем, что группа G неразрешима. В самом деле, пусть она разрешима и K — последний отличный от единицы член ряда ее коммутантов. Тогда K абелев. По лемме 6 G/K периодическая. Поэтому, будучи конечнопорожденной и разрешимой, она конечна (см., например [3], предложение 1.1). Тогда ввиду конечности индекса $|G:K|$, бесконечности и конечной порожденности G группа K бесконечна и конечнопорождена. Пусть $\langle g\rangle$ — какая-нибудь бесконечная циклическая подгруппа группы K. Тогда по лемме 6 $K/\langle g\rangle$ — периодическая и, значит, конечная. Поскольку индексы $|G:K|$ и $|K:\langle g\rangle|$ конечны, то индекс $|G:\langle g\rangle|$ — конечен, что невозможно (лемма 8). Противоречие. Значит, группа G — неразрешима.

Покажем теперь, что $G^{(3)}$ (третий коммутант группы G) — минимальная нециклическая подгруппа группы G. Так как G неразрешима, то подгруппа $G^{(3)}$ нециклическая. Ввиду леммы 6 фактор-группа $G/G^{(3)}$ периодическая. Поэтому она, будучи конечнопорожденной разрешимой, конечна (см., например, [3], предложение 1.1). Тогда подгруппа $G^{(3)}$ конечнопорождена. Пусть $G^{(3)}$ не является минимальной нециклической. Тогда она содержит некоторую собственную нециклическую подгруппу H. Поскольку $G^{(3)}$ конечнопорождена, то H вкладывается в некоторую ее (нециклическую) максимальную подгруппу L. Ввиду леммы 2 L нормальна в $G^{(3)}$ и потому $G^{(3)}/L$ — группа простого порядка. Рассмотрим подгруппу $R = \bigcap_{g \in G} L^g$. Фактор-группа $G^{(3)}/R$ — элементарная абелева; но тогда G/R — периодическая разрешимая конечнопорожденная I_H-группа ступени 4. Ввиду предложения 1.1 из [3] она конечна. Но в силу следствия 3 конечная I_H-группа разрешима ступени не выше трех. Противоречие. Итак, $G^{(3)}$ — минимальная нециклическая группа. Как отмечено вначале, этого достаточно для завершения доказательства теоремы. Теорема доказана.

Заметим, что при доказательстве теоремы 2 теорема 1 не использовалась.

Из теорем 1 и 2 и следствия 4 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Локально ступенчатая (более широко — бинарно ступенчатая) группа G является I_H-группой тогда и только тогда, когда она либо группа одного из типов в теореме* 1, *либо группа одного из следующих типов*:

11) *квазициклическая группа*;

12) $G = A \times \langle b \rangle$, A — *квазициклическая* p-*группа*, $|b|^{q^n} = q$, $n \geq 1$ *и* $p \neq q$.

1. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
2. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
3. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

Получено 04.07.95