УДК 517. 5

С. И. Новиков, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т математики и механики Урал. отд-ния АН России, Свердловск)

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ РОЛЛЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ $\mathcal{L}$-СПЛАЙНАМИ

An analog of the Rolle theorem is proved for linear differential operators with continuos periodic coefficients. By applying this theorem, the exact estimates for approximation by interpolational $\mathcal{L}$-splines are established on certain classes of functions which are given by a linear differential operator.

Одержано аналог теореми Ролля для лінійних диференціальних операторів з неперервними періодичними коефіцієнтами. За його допомогою знайдені точні значення відхилень інтерполяційних періодичних $\mathcal{L}$-сплайнів на деяких класах функцій, які задаються лінійним диференціальним оператором.

Пусть $D = d/dt$,

$$\mathcal{L}_n(D) = D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \ldots + a_1(T)D + a_0(t) \tag{1}$$

— произвольный линейный дифференциальный оператор порядка n с непрерывными 2π-периодическими коэффициентами. Предполагаем, что оператор $\mathcal{L}_n(D)$ на $\mathbb{R}$ можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{L}_n(D) = Q_k(D)Q_{k-1}(D) \ldots Q_1(D), \tag{2}$$

где $Q_r(D)$ $(r = 1, 2, \ldots, k)$ — линейные дифференциальные операторы не выше второго порядка с достаточно гладкими на $\mathbb{R}$ 2π-периодическими коэффициентами и старшим коэффициентом равным единице. Достаточные (а при некоторых малых n — необходимые и достаточные) условия представимости дифференциального оператора (1) в виде суперпозиции нескольких дифференциальных операторов можно найти в [1]. В настоящей работе мы доказываем периодический аналог теоремы Ролля в наиболее общем случае — для дифференциальных операторов (1), (2), а затем в качестве примера применяем его для решения задачи нахождения точных значений верхних граней уклонения интерполяционных периодических $\mathcal{L}$-сплайнов. Введем необходимые обозначения. Через $C_{[a;\, b]}$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ обозначим пространство непрерывных на $[a; b]$ вещественных функций, через $C_{2\pi}^{(j)}$ будем обозначать множество 2π-периодических функций с непрерывной на $\mathbb{R}$ j-й производной, $C_{2\pi}^{(0)} = C_{2\pi}$; $AC_{2\pi}$ — множество абсолютных непрерывных 2π-периодических функций; $\operatorname{mes} A$ — мера Лебега множества $A \subset \mathbb{R}$. Кроме того, пусть, как обычно, $\gamma(f)$ — число существенных перемен знака 2π-периодической вещественной функции f на периоде ($\nu(f)$ — четное число); $\mu(f)$ — максимальное расстояние между соседними разделенными нулями функции f; $\kappa(f)$ — максимальное расстояние между соседними существенными переменами знака функции f. Очевидно, $\mu(f) \le \kappa(f)$.

Вспомогательные утверждения. Приведем необходимые далее понятия и теоремы из теории дифференциальных операторов. Их можно найти в [2 – 4].

***Определение* 1.** *Промежуток $I = [a; b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$ называется промежутком неосцилляции дифференциального оператора $\mathcal{L}_n(D)$, если каждое нетривиальное решение уравнения $\mathcal{L}_n(D)y = 0$ имеет на I не более $n-1$ нулей, где каждый нуль учитывается столько раз, какова его кратность.*

Очевидно, если I — промежуток неосцилляции $\mathcal{L}_n(D)$, то любой $I_1 \subset I$

также является таковым.

Критерий неосцилляции. *$I = [a;\ b)$ есть промежуток неосцилляции дифференциального оператора $\mathcal{L}_n(D)$ в том и только в том случае, когда оператор $\mathcal{L}_n(D)$ может быть представлен в виде*

$$\mathcal{L}_n(D) = h_n D h_{n-1} D \ldots h_1 D h_0, \quad a < t < b, \tag{3}$$

где $h_i \in C^{(n-i)}_{(a;\ b)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — вещественные отличные от нуля на $(a;\ b)$ функции, и операции проводятся справа налево.

Представление (3) обычно называют разложением Пойа – Маммана. Из него легко получить такое следствие.

***Следствие* 1.** *Дифференциальный оператор первого порядка $\mathcal{L}_1(D) = D + a_0(t)$, где $a_0(t) \in C_{(-\infty, +\infty)}$, является неосциллирующим на $\mathbb{R}$.*

***Следствие* 2 (аналог теоремы Ролля для промежутка неосцилляции).** *Если дифференцильный оператор $\mathcal{L}_n(D)$ является неосциллирующим на $I = [a;\ b)$ и функция f с непрерывной n-й производной имеет на I не мене $n + 1$ нулей с учетом кратностей, то $\mathcal{L}_n(D) f(t)$ не менее одного раза меняет знак на $(a;\ b)$.*

***Определение* 2.** *Промежуток $I_{\max} = [a;\ b)$ называется максимальным промежутком неосцилляции дифференциального оператора $\mathcal{L}_n(D)$, если он является промежутком неосилляции этого оператора и существует нетривиальное решение уравнения $\mathcal{L}_n(D) Y = 0$, которое обращается в нуль на $[a;\ b]$ в точности n раз, считая кратности. Если же нет числа b с указанным выше свойством, то полагаем $I_{\max} = [a; +\infty)$.*

Через $\delta(\mathcal{L}_n;\ a)$ обозначим длину максимального промежутка неосцилляции дифференциального оператора $\mathcal{L}_n(D)$ с левым концом в точке $a \in \mathbb{R}$. Простым следствием ([2, с. 94], утверждение 8) является такое предложение.

***Предложение* 1.** *Пусть дифференциальный оператор $\mathcal{L}_n(D)$ имеет факторизацию (2) и $Q_{S_1}(D), Q_{S_2}(D), \ldots, Q_{S_l}(D)$ — дифференциальные операторы второго порядка в (2), тогда*

$$\delta(\mathcal{L}_n;\ a) \geq \min\{\delta(Q_{S_1};\ a), \delta(Q_{S_2};\ a), \ldots, \delta(Q_{S_l};\ a)\}.$$

Для дифференциальных операторов с постоянными вещественными коэффициентами длина максимального промежутка неосцилляции не зависит от выбора начальной точки промежутка на вещественной оси. Для указанных операторов оценки длины максимального промежутка неосцилляции получены в [4]. Оптимальным оценкам длины промежутка для дифференциальных операторов других классов посвящены работы [5, 6]. Конструктивная характеристика класса неосциллирующих дифференциальных операторов дана в [7].

***Предложение* 2.** *Если $\mathcal{L}_n(D)$ — линейный дифференциальный оператор порядка n с непрерывными 2π-периодическими коэффициентами имеет разложение (2), то существует такое число $\varepsilon > 0$, определяемое дифференциальным оператором $\mathcal{L}_n(D)$ и не зависящее от точки $a \in \mathbb{R}$, что при всех $a \in \mathbb{R}$ $\delta(\mathcal{L}_n;\ a) \geq \varepsilon$.*

Доказательство. Для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами предложение 2 фактически содержится в ([4], теорема 1). Для дифференциальных операторов первого порядка $\mathcal{L}_1(D) = D + a_0(t)$, где $a_0(t) \in C_{2\pi}$, в силу следствия 1 $\delta(\mathcal{L}_1;\ a) = +\infty$ при всех $a \in \mathbb{R}$.

Пусть $\mathcal{L}_2(D)$ — произвольный линейный дифференциальный оператор второго порядка с непрерывными 2π-периодическими коэффициентами. Зафиксируем произвольное число $a \in \mathbb{R}$. Предположим, что уравнение $\mathcal{L}_2(D)y = 0$ имеет осциллирующие решения; в противном случае полагаем $\delta(\mathcal{L}_2; a) = +\infty$. Через $U(\mathcal{L}_2)$ обозначим множество всех осциллирующих решений уравнения $\mathcal{L}_2(D)y = 0$, обращающихся в нуль в точке a. Тогда (см., например, [3], § 3; [6] и имеющиеся там ссылки)

$$\delta(\mathcal{L}_2; a) = \inf_{\varphi \in U(\mathcal{L}_2)} (a'(\varphi) - a), \tag{4}$$

где $a'(\varphi)$ — ближайший справа к точке a нуль функции $\varphi \in U(\mathcal{L}_2)$.

В силу известной теоремы Валле — Пуссена (см., например, [8], §17) для расстояний между любыми двумя последовательными нулями любого осциллирующего решения уравнения $\mathcal{L}_2(D)y = 0$ существует положительная нижняя граница $\varepsilon(\mathcal{L}_2)$, т. е.

$$\inf_{\varphi \in U(\mathcal{L}_2)} \inf_i (x_i(\varphi) - x_{i-1}(\varphi)) = \varepsilon(\mathcal{L}_2), \tag{5}$$

где $x_i(\varphi)$ $(i \in \mathbb{Z})$ — нули функции $\varphi \in U(\mathcal{L}_2)$, взятые в порядке возрастания.

Из (4), (5) следует, что $\delta(\mathcal{L}_2; a) \geq \varepsilon(\mathcal{L}_2) \geq 0$, и тем самым при $n = 2$ предложение 2 доказано. При $n > 2$ для завершения доказательства воспользуемся предложением 1. Отметим, что оценка снизу величины $\varepsilon(\mathcal{L}_2)$ получена в ([8], § 17), а ее точное значение на некотором классе дифференциальных уравнений с ограничениями на коэффициенты найдено в [5]. Обозначим $\delta(\mathcal{L}_n) = \inf\{\delta(\mathcal{L}_n; a) | a \in \mathbb{R}\}$. В силу предложения 2 $\delta(\mathcal{L}_n) \geq \varepsilon(\mathcal{L}_n) > 0$. Величина $\delta(\mathcal{L}_n)$ играет важную роль во всех последующих исследованиях.

Теорема Ролля для операторов (1), (2).

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{L}_2(D) = D^2 + p_1(t)D + p_0(t)$, $p_i \in C[a; b]$, $i = 0; 1$; φ — *произвольная вещественная функция такая, что* $\varphi \in C^{(2)}_{[a;b]}$, $\operatorname{mes}\{t \in [a; b]: \mathcal{L}_2(D)\varphi(t) = 0\} = 0$. *Тогда если* φ *имеет на* $[a; b]$ $N + 2$ *различных нулей* $(N \geq 1)$: $a \leq \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{N+1} \leq b$, $\xi_{j+1} - \xi_j < \delta(\mathcal{L}_2)$, *то* $\mathcal{L}_2(D)\varphi(t)$ *имеет на* $(a; b)$ *не менее* N *перемен знака.*

Для операторов Штурма – Лиувилля $\mathcal{L}_2(D) = D(p_1 D) + p_0$, $p_1(t) > 0$, при всех $t \in [a; b]$ этот факт доказан в работе М. Г. Крейна [9]. Для того чтобы получить утверждение леммы 1 для произвольного линейного дифференциального оператора второго порядка, достаточно вместо функции φ рассмотреть функцию $\psi(t) = \varphi(t) \exp(\omega(t))$, $\omega(t) = \int_a^t p_1(\tau) d\tau$, которая удовлетворяет условиям леммы 1, и воспользоваться результатом М. Г. Крейна.

Лемма 2. *Пусть* $\mathcal{L}_2(D) = D^2 + a_1(t)D + a_0(t)$, $a_i \in C_{2\pi}$, $i = 0; 1$; $f \in C^{(2)}_{2\pi}$, $\operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R}: \mathcal{L}_2(D)f(t) = 0\} = 0$ *и функция* f *имеет на периоде* $2m$ *различных нулей, причем* $\mu(f) < \delta(\mathcal{L}_2)$. *Тогда* $\nu(\mathcal{L}_2(D)f) \geq 2m$.

Доказательство. Пусть $-\pi \leq \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{2m-1} < \pi$ — нули функции f. Тогда в силу периодичности $\xi_{2m} = \xi_0 + 2\pi$ также является нулем функции f и на $[\xi_0; \xi_{2m}]$ мы имеем $2m + 1$ различных нулей. Согласно лемме 1 $\nu(\mathcal{L}_2(D)f) \geq 2m - 1$. Однако число перемен знака периодической функции на периоде четно, следовательно, $\nu(\mathcal{L}_2(D)f) \geq 2m$. Лемма 2 доказана.

Через H обозначим произвольное положительное число не больше $\delta(\mathcal{L}_n)$.

Лемма 3. *Пусть* $\mathcal{L}_n(D)$ *— произвольный линейный дифференциальный оператор вида* (1), $f \in C_{2\pi}^{(n)}$ *— вещественная функция такая, что* $\operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R}: \mathcal{L}_n(D)f(t) = 0\} = 0$, *нули которой удовлетворяют неравенству* $\mu(f) < H(2(n + 1))^{-1}$. *Тогда* $\kappa(\mathcal{L}_n(D)f) < H$.

Доказательство основано на идее теоремы 1.3 из [10]. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $I_{a,n} = [a; a + (n+1)\mu(f)]$. Очевидно, что на $I_{a,n}$ находятся не менее $n + 1$ различных нулей функции f. Поскольку $\operatorname{mes} I_{a,n} = (n+1)\mu(f) < H/2$, то $I_{a,n}$ является промежутком неосцилляции оператора $\mathcal{L}_n(D)$, и в силу следствия 2 функция $\mathcal{L}_n(D)f$ имеет на $I_{a,n}$ не менее одной перемены знака. Таким образом, на любом интервале длины $(n+1)\mu(f)$ функция $\mathcal{L}_n(D)f$ имеет не менее одной перемены знака. Осюда следует $\kappa(\mathcal{L}_n(D)f) \leq 2(n+1)\mu(f) < H$, и лемма 3 доказана.

Пусть дифференциальный оператор $\mathcal{L}_n(D)$ $(n \geq 2)$ вида (1) имеет факторизацию (2) и $Q_{S_1}(D), Q_{S_2}(D), \ldots, Q_{S_l}(D)$ — входящие в нее дифференциальные операторы второго порядка такие, что $\delta(Q_{S_j}) < +\infty$, $j = 1, 2, \ldots, l$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C_{2\pi}^{(n)}$, $\operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R}: \mathcal{L}_n(D)f(t) = 0\} = 0$. *Если функция* f *имеет на периоде* $2m$ *различных нулей, причем* $\mu(f) < \delta(\mathcal{L}_n)$ *при* $n = 2$ *и* $\mu(f) < (2(n+1))^{-1}\min\{\delta(Q_{S_1}), \ldots, \delta(Q_{S_l})\}$ *при* $n > 2$, *то* $\nu(\mathcal{L}_n(D)f) \geq 2m$.

Доказательство проводится индукцией по порядку дифференциального оператора. Если $n = 2$, то достаточно использовать лемму 2. Пусть теперь $n > 2$. Предположим, что крайним слева оператором в правой части (2) является $Q_{S_l}(D)$. (Смысл такого допущения становится ясным из замечания 1 после теоремы 2.) Пусть для всех дифференциальных операторов (1), (2) порядка $\leq n-2$ теорема 1 доказана. Установим ее справедливость для операторов порядка n. Ясно, что $\mathcal{L}_n(D) = Q_{S_l}(D)\mathcal{L}_{n-2}(D)$. Обозначим $H_j = \min\{\delta(Q_{S_1}), \ldots, \delta(Q_{S_j})\}$, $j = 1, 2, \ldots, l$. Так как $\mu(f) < (2(n+1))^{-1}H_l \leq H_{l-1} \cdot (2(n-1))^{-1}$, то в силу предположения индукции $\nu(\mathcal{L}_{n-2}(D)f) \geq 2m$. Оценим величину $\mu(\mathcal{L}_{n-2}(D)f)$. Поскольку $H_l \leq H_{l-1}$, то, применив предположение 1, будем иметь $H_l \leq \delta(\mathcal{L}_{n-2})$. Кроме того, $\mu(f) < H_l \cdot (2(n-1))^{-1}$. Воспользовавшись леммой 3, получим $\kappa(\mathcal{L}_{n-2}(D)f) < H_l$, откуда $\kappa(\mathcal{L}_{n-2}(D)f) < \delta(Q_{S_l})$, а значит, $\mu(\mathcal{L}_{n-2}(D)f) < \delta(Q_{S_l})$. Применяя лемму 2, завершаем доказательство теоремы.

Теорема 2. *Пусть дифференциальный оператор* $\mathcal{L}_n(D)$ *вида* (1) *имеет факторизацию* (2), *состоящую только из операторов порядка* 1. *Если* $f \in C_{2\pi}^{(n)}$, $\operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R}: \mathcal{L}_2(D)f(t) = 0\} = 0$ *имеет* $2m$ *различных нулей на периоде, то* $\nu(\mathcal{L}_n(D)f) \geq 2m$.

Доказательство этой теоремы при $n = 1$ легко получить, если рассуждать так же, как при доказательстве леммы 2, воспользовавшись вместо леммы 1 следствием 2. Для других n теорема 2 доказывается по индукции.

***Замечание* 1.** Пусть дифференциальный оператор $\mathcal{L}_n(D)$ вида (1) имеет факторизацию (2), в которой $Q_k(D), Q_{k-1}(D), \ldots, Q_{k-j}(D)$ — операторы первого порядка, а $Q_{S_1}(D), Q_{S_2}(D), \ldots, Q_{S_l}(D)$ — операторы второго порядка и $\delta(Q_{S_i}) < +\infty$, $i = 1, 2, \ldots, l$, причем $S_l = k - j - 1$. Если функция $f \in C_{2\pi}^{(n)}$ такая, что $\operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R}: \mathcal{L}_2(D)f(t) = 0\} = 0$, имеет на периоде $2m$ различных нулей и $\mu(f) < (2(n-j))^{-1} \min\{\delta(Q_{S_1}), \ldots, \delta(Q_{S_l})\}$, то $\nu(\mathcal{L}_n(D)f) \geq 2m$.

Для того чтобы убедиться в справедливости замечания 1, достаточно сначала применить к оператору $\mathcal{L}_{n-j-1}(D) = Q_{k-j-1}(D) \ldots Q_1(D)$ теорему 1, а затем к оператору $\mathcal{L}_{j+1}(D) = Q_k(D) \ldots Q_{k-j}(D)$ — теорему 2. Замечание 1 показывает, что для некоторых дифференциальных операторов ограничение на величину $\mu(f)$ в теореме 1 может быть ослаблено.

***Замечание* 2.** Для линейных дифференциальных операторов с вещественными коэффициентами аналог теремы Ролля впервые доказал М. Г. Крейн [9] в предположении $\mu(f) < \pi 3^{-(s/2-1)}(\max \alpha_\nu)^{-1}$ (s — число невещественных нулей характеристического полинома дифференциального оператора, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — модули мнимых частей этих нулей). Позже в работах Нгуен Тхи Тхьеу Хоа [10, 11] это ограничение было заменено на существенно более слабое: $\mu(f) < \pi / 2(s - 1) \max \alpha_\nu$. Необходимо отметить, что задачи, связанные с теоремой Ролля для дифференциальных операторов, непосредственно примыкают к исследованию ядер, не увеличивающих осцилляцию [12, 13], и ядер класса $C \vee D[\delta]$ [14].

Интерполирование $\mathcal{L}$-сплайнами. Пусть $\mathcal{L}_n(D)$ — произвольный линейный дифференциальный оператор порядка $n (n \geq 2)$ с непрерывными на $\mathbb{R}$ 2π-периодическими коэффициентами. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\Delta_{2m}^t: -\pi \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{2m-1} < \pi$ — произвольное разбиение $[-\pi, \pi)$, состоящее из $2m$ точек, которое предполагаем периодически продолженным на $\mathbb{R}$ по правилу $t_{2m+k} = 2\pi + t_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Приведем некоторые известные определения.

***Определение* 3.** *Функция $s_{m,n}$ называется $\mathcal{L}$-сплайном, соответствующим дифференциальному оператору $\mathcal{L}_n(D)$, с узлами в точках разбиения Δ_{2m}^t, если она удовлетворяет следующим условиям:* 1) $s_{m,n} \in C_{2\pi}^{(n-2)}$; $\forall t \in (t_i, t_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{L}_n(D)s_{m,n}(t) = 0$.

Множество $S(\mathcal{L}_n; \Delta_{2m}^t)$ всех $\mathcal{L}$-сплайнов, соответствующих оператору $\mathcal{L}_n(D)$, с узлами в точках Δ_{2m}^t является линейным пространством.

***Определение* 4.** *Функцию $\Phi_{m,n}$ будем назывть совершенным $\mathcal{L}$-сплайном, если:* 1) $\Phi_{m,n}^{(n-1)} \in AC_{2\pi}$; 2) $|\mathcal{L}_n(D)\Phi_{m,n}(t)| = 1$ *для почти всех* $t \in \mathbb{R}$; 3) $\nu(\mathcal{L}_n(D)\Phi_{m,n}) \leq 2m$. *Точки перемены знака $\mathcal{L}_n(D)\Phi_{m,n}$ обычно называют узлами совершенного $\mathcal{L}$-сплайна.*

Следуя [15, с. 211], мы говорим, что пространство $\mathcal{L}$-сплайнов $S(\mathcal{L}_n \Delta_{2m}^t)$ интерполирует в системе точек $\Delta_{2m}^\tau: -\pi \leq \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{2m-1} < \pi$, $\tau_{2m+j} = \tau_j + 2\pi$, если для любой $f \in C_{2\pi}$ существует единственный $\mathcal{L}$-сплайн $s_{m,n} \in S(\mathcal{L}_n; \Delta_{2m}^t)$, для которого $s_{m,n}(f)(\tau_j) = f(\tau_j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Пусть $1 \leq p \leq \infty$,

$$W_p(\mathcal{L}_n) = \{f \in C_{2\pi}: f^{(n-1)} \in AC_{2\pi},\ \| \mathcal{L}_n(D)f \|_{L_p[0,\,2\pi]} \le 1\}.$$

Предполагаем, что существует совершенный $\mathcal{L}$-сплайн $\Phi_{m,\,n}$ с $2m$ узлами на периоде в точках сетки Δ^t_{2m}, имеющий на заданной периодической последовательности точек $\Delta^\tau_{2m} = \{\tau_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ простые нули и не имеющий других нулей. (Существование совершенного $\mathcal{L}$-сплайна с нулями нужной кратности в заданных точках для дифференциальных операторов (1), (2) является предметом самостоятельного исследования, результаты которого будут опубликованы в отдельной статье.)

Лемма 4. *Если дифференциальный оператор $L_n(D)$ имеет факторизацию* (2) *и множество Δ^τ_{2m} нулей совершенного L-сплайна $\Phi_{m,\,n}$ с $2m$ узлами на периоде Δ^t_{2m} удовлетворяет условию* $\max(\tau_{j+1} - \tau_j) < (2(n+1))^{-1} \times \min\{\delta(Q_{S_1}), \ldots, \delta(Q_{S_l})\}$, *то пространство периодических L-сплайнов $S(\mathcal{L}_n\Delta^t_{2m})$ интерполирует в точках Δ^τ_{2m}.*

Для $\mathcal{L}_n(D) = D^n$ лемма 4 известна (см., например, [15], теорема 2.4.9).

Доказательство. Достаточно установить, что если $s_{m,n} \in S(\mathcal{L}_n;\, \Delta^t_{2m})$, $s_{m,\,n}(\tau_j) = 0$, $j \in \mathbb{Z}$, то $s_{m,\,n}(t) \equiv 0$. Предположим противное: пусть $s_{m,\,n}(\tau_j) = 0$, $\tau_j \in \Delta^\tau_{2m}$, однако $s_{m,\,n}(t) \not\equiv 0$. Положим $r_\alpha(t) = \Phi_{m,\,n}(t) - \alpha s_{m,\,n}(t)$. Тогда, учитывая, что все $2m$ нулей совершенного $\mathcal{L}$-сплайна $\Phi_{m,\,n}$ простые при некотором $\alpha = \alpha_0$ имеем, что $\nu(r_{\alpha_0}(t)) \ge 2m + 2$. Это неравенство остается справедливым для второго усреднения по Стеклову с достаточно малым шагом $h > 0$ функции r_{α_0}, т. е. $\nu((r_{\alpha_0})_{hh}) \ge 2m + 2$. Отсюда следует, что $(r_{\alpha_0})_{hh}$ имеет на периоде не менее $2m + 2$ различных нулей, причем, как нетрудно видеть, расстояние между последовательными нулями удовлетворяет условию леммы 4. Это обстоятельство позволяет применить теорему 1, согласно которой

$$\nu(\mathcal{L}_n(D)(r_{\alpha_0})_{hh}) \ge 2m + 2. \tag{6}$$

Пусть при достаточно малом $h > 0$ $v_h(t) = (2h)^{-1}$ при $t \in [-h, h]$, $v_h(t) = 0$ при $t \in [-\pi, \pi] \setminus [-h, h]$ и затем 2π-периодически продолжим функцию v_h на $\mathbb{R}$. Положим $v_{hh}(t) = (2h)^{-1} \int_{t-h}^{t+h} v_h(x)dx$ и заметим, что $\mathcal{L}_n(D)(s_{m,\,n})_{hh}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{hh}(t - t_k)$. Тогда, как нетрудно видеть, выбирая $h > 0$ достаточно малым, можно добиться, чтобы

$$\nu(\mathcal{L}_n(D)(r_{\alpha_0})_{hh}(t)) = \nu(\mathcal{L}_n(D)(\Phi_{m,\,n})_{hh}(t) - \alpha_0 \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{hh}(t - t_k)) \le 2m. \tag{7}$$

Противоречие между (6) и (7) доказывает лемму 4.

Теорема 3. *Пусть $s_{m,\,n} \in S(\mathcal{L}_n \Delta^t_{2m})$ интерполирует в нулях Δ^τ_{2m} совершенного L-сплайна $\Phi_{m,\,n}$. Тогда если дифференциальный оператор $L_n(D)$ порядка n $(n \ge 2)$ имеет факторизацию* (2) *и* $\max(\tau_{j+1} - \tau_j) < (2(n+1))^{-1} \min\{\delta(Q_{S_1}), \ldots, \delta(Q_{S_l})\}$, *то для любой функции $f \in W_\infty(\mathcal{L}_n)$ при всех $t \in \mathbb{R}$*

$$|f(t) - s_{m,\,n}(f)(t)| \le |\Phi_{m,\,n}(t)|, \tag{8}$$

и неравенство (8) *точное. Кроме того,*

$$\sup_{\substack{f \in W_\infty(\mathcal{L}_n) \\ 1 \le q \le \infty}} \| f - s_{m,n}(f) \|_{L_q[-\pi,\pi]} = \|\Phi_{m,n}\|_{L_q[-\pi,\pi]}. \tag{9}$$

Для $\mathcal{L}_n(D) = D^n$ *теорему* 3 *можно найти, например, в* ([15], § 5.22), *а приводимое ниже доказательство базируется на идее В. М. Тихомирова* [6].

Доказательство. Существование и единственность $\mathcal{L}$-сплайн-интерполянта $s_{m,n}(f)$, о котором идет речь в настоящей теореме, следует из леммы 4.

Обозначим $\varphi = f - s_{m,n}(f)$. Предположим противное: пусть для некоторой функции $f \in W_\infty(\mathcal{L}_n)$ в некоторой точке $t^* \in [-\pi, \pi]$ выполняется неравенство $|\varphi(t^*)| > |\Phi_{m,n}(t^*)|$. В силу того, что все нули $\Phi_{m,n}$ простые, можно выбрать число $0 < \lambda_0 < 1$ так, чтобы при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ таких, что $\lambda_0 < |\lambda| < 1$ функция $\Delta_\lambda(t) = \lambda\varphi(t) - \Phi_{m,n}(t)$ меняла знак на периоде не менее $2m + 2$ раз. Этот факт имеет место и для второго усреднения по Стеклову с достаточно малым шагом $h > 0$, т. е. $\nu((\Delta_\lambda)_{hh}) \ge 2m + 2$. Тогда функция $(\Delta_\lambda)_{hh}$ имеет на периоде не менее $2m + 2$ различных нулей. Применяя теорему 1, получаем

$$\nu(\mathcal{L}_n(D)(\Delta_\lambda)_{hh}) \ge 2m + 2. \tag{10}$$

С другой стороны, при достаточно малом $h > 0$ для всех λ $(\lambda_0 < |\lambda| < 1)$

$$\nu(\mathcal{L}_n(D)(\Delta_\lambda)_{hh}(t)) = \nu(\lambda\mathcal{L}_n(D)f_{hh}(t)) - \lambda \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{hh}(t - tk) - \mathcal{L}_n(D)(\Phi_{m,n})_{hh}(t)) \le 2m, \tag{11}$$

где функция v_{hh} определена в доказательстве леммы 4. Противоречие между (10) и (11) доказывает неравенство (8). Точность (8) проверяется подстановкой $f = \Phi_{m,n}$ и применением леммы 4; (9) легко следует из (8). Теорема 3 доказана.

1. *Zettl A.* General theory of the factorization of ordinary linear differential operators // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **197**. – P. 345 – 353.
2. *Coppel W.* Disconjugacy // Lect. Notes Math. – 1971. – **220**. – P. 1 – 147.
3. *Левин А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = 0$ // Успехи мат. наук. – 1969. – **24**, №2 (146). – С. 43 – 96.
4. *Troch I.* On the interval of disconjugacy of linear autonomous differential equations // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – **12**, №1. – P. 78 – 89.
5. *Мильштейн Г. Н.* О краевой задаче для системы двух дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1965. – **1**, №12. – С. 1628 – 1639.
6. *Меленцова Ю. А., Мильштейн Г. Н.* К оптимальной оценке промежутка неосцилляции для линейных дифференциальных уравнений с ограниченными коэффициентами // Там же. – 1981. – **17**, №12. – С. 2160 – 2175.
7. *Zettl A.* An algorithm for the construction of all disconjugate operators // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. – 1976. – **76**, №4. – P. 33 – 40.
8. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 351 с.
9. *Крейн М. Г.* Об одном новом свойстве оператора Штурма – Лиувилля // Тр. Одес. ун-та.– 1941. – **3**.– С. 15 – 22.
10. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* Наилучшие квадратурные формулы и методы восстановления на классах функций, задаваемых свертками, не увеличивающими осцилляцию: дис. … канд. физ.-мат. наук. – Москва, 1985. – 125 с.
11. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* Некоторые экстремальные задачи на классах функций, задаваемых линейными дифференциальными операторами // Мат. сб. – 1989. – **180**, №10. – С. 1355 – 1395.
12. *Karlin S.* Total positivity. – Stanford: Stanford Univ. Press, 1968. – Vol. 1. – 576 p.
13. *Mairhuber J., Schoenberg I., Williamson R.* On variation diminishing transformations on the circle // Rend. Circ. mat. Palermo. – 1959. – **8**. – P. 241 – 270.
14. *Бабенко В. Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и несимметричные нормы: дис. … д-ра физ.-мат. наук, Киев, 1989. – 275 с.
15. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
16. *Тихомиров В. М.* Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в $C_{[-1,1]}$ // Мат. сб. – 1969. – №2(10). – С. 290 – 304.

Получено 09.04.90