УДК 517.956

Е. А. Калита, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА, ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПО ПЕРВЫМ ПРОИЗВОДНЫМ

Divergent type elliptic systems with the natural energy space $W_p^m \cap W_q^1$ are considered. It is proved that, under certain restrictions imposed on the modulus of ellipticity of the lower part of the system, the generalized solutions of the system are continuous according to Hölder and the Liouville theorem holds.

Розглядаються еліптичні системи дивергентного вигляду з природним енергетичним простором $W_p^m \cap W_q^1$. При певних обмеженнях на модуль еліптичності молодшої частини системи встановлюється гельдеровість узагальнених розв'язків і теорема Ліувілля.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ рассматривается эллиптическая система

$$\sum_{|\alpha|=m} (-D)^{\alpha} A_{\alpha}(x, D^m u) - \sum_{k=1}^{n} D_k A_k(x, Du) = f(x) \tag{1}$$

с естественным энергетическим пространством $W_p^m \cap W_q^1$, $m \ge 2$, $q > p \ge 2$ (здесь u, A_α, A_k, f — вектор-функции). Известно, что для нелинейных эллиптических систем произвольного порядка и уравнений высокого порядка обобщенные решения могут быть разрывными даже при аналитических коэффициентах. В связи с этим возникает вопрос о выделении тех или иных классов уравнений и систем, решения которых допускают повышение априорной гладкости. В [1] рассмотрены уравнения вида (1), для которых добавление в “энергию” первых производных позволило получить гельдеровость решений при $q > mp$. С другой стороны, в гильбертовом случае ($p = 2$) в теории регулярности для систем оказалось плодотворной идея Кордеса о зависимости свойств решений от величины отклонения системы от модельного оператора [2–4]. В данной работе для систем вида (1) устанавливаются ограничения на величину отклонения группы членов, содержащих первые производные, от модельного оператора, при которых обобщенные решения гельдеровы и справедлива теорема Лиувилля. Отметим, что в негильбертовом случае ($p \ne 2$) аналогичные результаты не были известны даже для систем второго порядка. Лакунарное строение системы несущественно и выбрано для краткости, все результаты тривиально распространяются на случай, когда система содержит промежуточные члены, подчиненные главным по интерполяционному неравенству.

1. Гельдеровость решений. Пусть коэффициенты системы (1) дифференцируемы и удовлетворяют условиям

$$A_{\alpha\beta}^{ij}(x, \xi)\eta_\alpha^i \eta_\beta^j \ge d_1 |\xi|^{p-2} |\eta|^2, \; |A_{\alpha\beta}^{ij}(x, \xi)| \le d_2 |\xi|^{p-2}, \tag{2}$$

$$\exists\, \nu, \kappa > 0: \; \|\delta^{ij}\delta_{kl} - \kappa |z|^{2-q} A_{kl}^{ij}(x, z)\|^2 \le 1 - \nu^2, \tag{3}$$

$$|\partial A_\alpha / \partial x| \le |\xi|^{p/2} f_1(x), \; |\partial A_k / \partial x| \le |z|^{q/2} f_1(x), \tag{4}$$

где $A_{\alpha\beta}^{ij} = \partial A_\alpha^i / \partial \xi_\beta^j$, $A_{kl}^{ij} = \partial A_k^i / \partial z_l^j$, δ — символ Кронекера, норма матрицы понимается как норма линейного оператора в евклидовом пространстве. Условие (3) равносильно стандартной паре условий [2, с. 33]

$$A_{kl}^{ij}(x, z)\zeta_k^i \zeta_l^j \ge d_3 |z|^{q-2} |\zeta|^2, \; |A_{kl}^{ij}(x, z)| \le d_4 |z|^{q-2},$$

но форма (3) предпочтительнее тем, что в дальнейшем существен показатель ν.

Величина ν выражается через собственные числа матрицы A_{kl}^{ij} [2, с. 34], в частности, если $A_{kl}^{ij} = A_{lk}^{ji}$, $1 \le |\zeta|^{-2}|z|^{2-q}A_{kl}^{ij}(x, z)\zeta_k^i\zeta_l^j \le \lambda$, то $\nu = \dfrac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$.

Введем пространство $W_{q,\omega}^1$ с полунормой $\sup\limits_{y,R}\omega(R)^{1/q}\|Du; L_q(B(y, R))\|$, где $B(y, R)$— шар радиуса R с центром y, а также пространство $L_{q,a}$ с нормой $\|f; L_{q,a}\| = \sup\limits_y \| |x-y|^{a/q} f(x); L_q\|$ при $a<0$ (при $a \ge 0$ полагаем $L_{q,a} = L_q$).

Теорема 1. *Пусть* $2 \le p < \dfrac{n-2}{m-1}$, $q > \dfrac{(n-2)p}{n-2-(m-1)p}$, $u \in W_p^m \cap W_q^1(\Omega)$ — *решение системы* (1). *Тогда* $u \in W_{q,\omega,\mathrm{loc}}^1(\Omega)$, $\omega(r) = r^{a_\nu}$ *при* $a_\nu > a_q$, $\omega(r) = r^{a_q}\ln r^{-1}$ *при* $a_q > a_\nu$, $\omega(r) = r^{a_q}\left(\ln r^{-1}\right)^{q/(q-p)}$ *при* $a_q = a_\nu$, *где* $a_\nu = \dfrac{2(2-n)}{q(\nu^{-1}-1)+2}$, $a_q = 2-n+pq\dfrac{m-1}{q-p}$, $f_1 \in L_{2,a}(\Omega)$, $Df \in L_{q',a+2/(q-1)}(\Omega)$, $a < a_\nu$ *при* $a_\nu > a_q$, $a = a_q$ *при* $a_q \ge a_\nu$.

Отметим, что $a_\nu \in (2-n; 0)$, $a_\nu \to 2-n$ при $\nu \to 1$, $a_\nu \to 0$ при $\nu \to 0$.

Найдем вспомогательные оценки, которые будут использованы при доказательстве теоремы. Обозначим $B_R = B(0, R)$, $Q_R = B_R \setminus B_{R/2}$ и пусть φ — неотрицательная функция из $C^m(B_R)$, $\varphi = 0$ на ∂B_R, $\varphi = 1$ в $B_{R/2}$, $|D^j\varphi| \le cR^{-j}$. Буквой c будем обозначать различные несущественные положительные константы. Обозначим через $W_{2,p}^{m+1}$ пространство функций с конечной энергией

$$\int |D^{m+1}u|^2|D^m u|^{p-2}dx.$$

Лемма 1. *Пусть* $v \in W_{2,q}^1(B_R)$, $w = v\rho^a\varphi^q$, $\rho = (\tau^\delta + r^\delta)^{1/\delta}$, $\delta > 0$, $\tau \in (0; R)$, $a \in (2-n; 0)$. *Тогда*

$$\int v^{q-2}Dv\,Dw\,dx \ge (1-\mu(a)^2)^{1/2}\int v^{q-2}|Dv||Dw|\,dx + \mu_1\tau^\delta\int v^q\rho^{a-2\delta}r^{\delta-2}\varphi^q dx - c\Phi,$$

где $\mu(a) = \dfrac{-aq}{2(a+n-2)-aq}$, $\mu_1(a) > 0$, $\Phi = R^{a-1}\displaystyle\int_{Q_R} v^{q-1}|Dv|\,dx$.

Доказательство. Обозначим $u = v\varphi$, $I = \int u^{q-2}|Du|^2\rho^a\,dx$, $J = -q^{-1}\int u^q\Delta\rho^a dx$. Интегрируя по частям, находим

$$L \equiv \int v^{q-2}Dv\,Dw\,dx + c\Phi \ge \int u^{q-2}Du\,(\rho^a Du + uD\rho^a)dx = I + J,$$

$$P \equiv \int v^{q-2}|Dv||Dw|\,dx - c\Phi \le \Big(\int u^{q-2}|Du|^2\rho^a dx \times$$

$$\times \int u^{q-2}|D(u\rho^a)|^2\rho^{-a}dx\Big)^{1/2} = I^{1/2}\Big(I + 2J + \int u^q|D\rho^a|^2\rho^{-a}dx\Big)^{1/2}.$$

Далее получаем

$$L^2 - (1-\mu^2)P^2 \ge (\mu I - J)^2 + (1+\mu)I\int u^q\Big(\frac{-2\mu}{q}\Delta\rho^a - (1-\mu)|D\rho^a|^2\rho^{-a}\Big)dx \ge$$

$$\ge (1+\mu)\frac{2a^2(\delta+n-2)}{2(a+n-2)-aq}\tau^\delta I\int u^q\rho^{a-2\delta}r^{\delta-2}dx.$$

По неравенству Харди $I \ge ((a+n-2)/q)^2\int u^q\rho^a r^{-2}dx$, поэтому $L - (1 -$

$-\mu^2)^{1/2}P \ge \mu_1\tau^\delta \int u^q\rho^{a-2\delta}r^{\delta-2}dx$ с некоторым $\mu_1 > 0$. Лемма доказана.

Отметим, что a_ν определяется как корень уравнения $\mu(a) = \nu$, так что $\mu(a) <$ $< \nu$ при $a_\nu \lneq a \lneq 0$.

Лемма 2. Пусть $u \in W_p^m \cap W_q^1(B_{2R})$ — *решение системы* (1) *в* B_{2R}. *Тогда при* $a \in (a_\nu; 0)$

$$\int_{B_R} |Du|^q\tau^\delta\rho^{a-2\delta}r^{\delta-2}\,dx + (a-a_\nu)\int_{B_R}(|D^2u|^2|Du|^{q-2} + r^{-2}|Du|^q)\rho^a dx \le$$

$$\le c\int_{B_R}|Du|^p\rho^{a-\delta}r^{\delta-2-(m-1)p}dx + cR^{a-1}\int_{Q_R}|Du|^{q-1}|D^2u|\,dx +$$

$$+ c\int_{B_R}[f_1|Du|^{q/2-1}(|D^2u| + |Du|\rho^{-\delta}r^{\delta-1}) + |Df|\,|Du| + f_1^2]\rho^a dx. \qquad (5)$$

Доказательство. Поскольку коэффициенты системы (1) дифференцируемы с сохранением эллиптичности и подчиненности младших членов, стандартным путем устанавливается, что решение принадлежит $W^{m+1}_{2,p,\mathrm{loc}} \cap W^2_{2,q,\mathrm{loc}}$ [5, с. 246]. Поэтому систему можно продифференцировать по x_t, $t = 1, \dots, n$, в том смысле, что справедливо интегральное тождество

$$\int (D_tA_\alpha D^\alpha v_t + D_tA_kD_kv_t - v_tD_tf)dx = 0,$$

где, в частности, допустимо $v_t = \rho^a\varphi^{s+2}D_tu$. Для старших членов имеем

$$D_tA_\alpha D^\alpha v_t \ge c_1|D^mu|^{p-2}|D^{m+1}u|^2\rho^a\varphi^{s-2} - c\sum_{j=0}^{m-1}|D^{m-j}u|^p\rho^{a-\delta}r^{\delta-2-jp}\varphi^{s-jp} - cf_1^2\rho^a.$$

Обозначим $U_j = \int |D^{m-j}u|^p\rho^{a-\delta}r^{\delta-2-jp}\varphi^{s-jp}dx$, $j \ge 0$, $U_{-1} = \int |D^mu|^{p-2}|D^{m+1}u|^2\rho^a \times$ $\times\varphi^{s+2}dx$. Интегрируя по частям, находим

$$U_j \le c\int |D^{m-j-1}u|(|D^{m-j+1}u|\,|D^{m-j}u|^{p-2} + |D^{m-j}u|^{p-1}r^{-1}\varphi^{-1})\rho^a r^{\delta-2-jp}\varphi^{s-jp}dx \le$$

$$\le \varepsilon U_{j-1} + \varepsilon U_j + c_\varepsilon U_{j+1},$$

$\varepsilon > 0$ произвольно малое. Суммируя по j, получаем

$$\int D_tA_\alpha D^\alpha v_t dx \ge -cU_{m-1} - c\int f_1^2\rho^a dx..$$

Для членов, содержащих первые производные, по условию (3) имеем

$$\kappa D_tA_kD_kv_t = |Du|^{q-2}D_kD_tuD_kv_t - (|Du|^{q-2}D_kD_tu - \kappa D_tA_k)D_kv_t \ge$$

$$\ge |Du|^{q-2}D_kD_tuD_kv_t - (1-\nu^2)^{1/2}|Du|^{q-2}|D^2u|\,|Dv| - c\sum_k|\partial A_k/\partial x|\,|Dv|.$$

Применяя лемму 1, находим

$$\int D_tA_kD_kv_t\,dx \ge c_1\int |Du|^q\rho^{a-2\delta}\tau^\delta r^{\delta-2}\varphi^s dx +$$

$$+ c_2(a-a_\nu)\int(|Du|^{q-2}|D^2u|^2 + r^{-2}|Du|^q)\rho^a\varphi^{s+2}dx -$$

$$- cR^{a-1}\int_{Q_R}(|Du|^{q-1}|D^2u|\,\varphi^{s-1}dx - c\int f_1|Du|^{q/2-1}|Dv|\,dx,$$

поскольку $(1-\mu(a)^2)^{1/2}-(1-\nu^2)^{1/2} \geq c_3(a-a_\nu)$ при $a \geq a_\nu$.

***Доказательство теоремы* 1.** Зафиксируем произвольно малое $R>0$ и пусть $y \in \Omega$, $\operatorname{dist}(y, \partial\Omega) > 2R$.. Применим лемму 2 в шаре $B(y, R) = \{x\colon\ r < R\}$, $r = |x-y|$.

Пусть $a_q \geq a_\nu$. При $a > a_q$ согласно неравенству Юнга получаем

$$\int\limits_{B(y,R)} |Du|^p \rho^a \cdot r^{-2-(m-1)p} dx \leq \varepsilon(a-a_\nu)I + c_\varepsilon (a-a_\nu)^{-p/(q-p)} \int \rho^a \times$$

$$\times r^{-2-pq(m-1)/(q-p)} dx \leq \varepsilon(a-a_\nu)I + c_\varepsilon(a-a_\nu)^{-p/(q-p)}(a-a_q)^{-1}R^{a-a_q},$$

где $I = \int (|D^2u|^2 |Du|^{q-2} + r^{-2}|Du|^q)\rho^a dx$. Для членов, содержащих f, f_1, имеем

$$\int f_1 \ldots \leq \varepsilon(a-a_\nu)I + \frac{c}{a-a_\nu}\int f_1^2 \rho^a dx,$$

$$\int |Df| \ldots \leq \varepsilon(a-a_\nu)I + c(a-a_\nu)^{-1/(q-1)}\int |Df|^{q'} \rho^{a+2/(q-1)} dx.$$

Полагая $a = a_q + \dfrac{1}{\ln 1/\tau}$, из (5) находим

$$\tau^{a_q-2}\int\limits_{B(y,\tau)} |Du|^q dx \leq \begin{cases} c\ln {}^1\!/_\tau, & a_q > a_\nu; \\ c(\ln {}^1\!/_\tau)^{q/(q-p)}, & a_q = a_\nu. \end{cases}$$

Пусть $a_\nu > a_q$. При $a > a_\nu$, применяя полученные выше оценки в (5), при $\tau \to 0$ получаем $\int (|D^2u|^2|Du|^{q-2} + r^{-2}|Du|^q) r^a dx \leq \text{const}$. Полагая $a = a_\nu$, находим

$$\int\limits_{B(y,R)} |Du|^p \rho^a r^{-2-(m-1)p} dx \leq c\int |Du|^q r^{a-2+\varepsilon/p} dx + cR^{a-a_q-\varepsilon/(q-p)}$$

где $\varepsilon > 0$ столь мало, что $a_\nu - a_q - \varepsilon/(q-p) > 0$. Члены с f_1, f оцениваем аналогично. В этом случае из (5) следует

$$\tau^{a_\nu-2}\|Du; L_q(B(y,\tau))\|^q \leq \text{const}.$$

Обозначим через C_σ пространство непрерывных функций с полунормой $\sup\limits_{x,y}\dfrac{|u(x)-u(y)|}{\sigma(|x-y|)}$, где σ — функция типа модуля непрерывности. Через C^γ обозначим пространства Гельдера.

Теорема 2. *Пусть* $p \geq 2$, $q > mp$, $\nu > \max\{1-2/(n-q), 0\}$, $u \in W_p^m \cap W_q^1(\Omega)$ *— решение системы* (1), $f_1 \in L_{2,a}(\Omega)$, $Df \in L_{q', a+2/(q-1)}(\Omega)$, $a < a_\nu$ *при* $a_\nu > a_q$, $a = a_q$ *при* $a_q \geq a_\nu$. *Тогда и гельдерово внутри* Ω, *причем* $u \in C^\gamma$, $\gamma = 1 - \dfrac{(n-2)(1-\nu)}{q(1-\nu)+2\nu}$ *при* $a_\nu > a_q$; $u \in C_\sigma$, $\sigma(r) = r^{(q-mp)/(q-p)}(\ln r^{-1})^{1/q}$ *при* $a_q > a_\nu$, $\sigma(r) = r^{(q-mp)/(q-p)}(\ln r^{-1})^{1/(q-p)}$ *при* $a_q = a_\nu$.

Доказательство. Условие $q > mp$ равносильно $a_q < q+2-n$, условие $\nu > 1-2/(n-q)$ при $n \geq q+2$ равносильно $a_\nu < q+2-n$. Теперь утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1 по вложению пространств Морри.

В случае системы второго порядка

$$D_k A_k(x, Du) = f(x), \tag{6}$$

удовлетворяющей условиям (3), (4), справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $q \ge 2$, $\nu > \max\left\{ 1 - 2/(n-q); 0 \right\}$, $u \in W^1_q(\Omega)$ — *решение системы* (6), $f_1 \in L_{2,a}(\Omega)$, $Df \in L_{q', a+2/(q-1)}(\Omega)$, *с* $a < \dfrac{2(2-n)}{q(\nu^{-1}-1)+2}$. *Тогда* $u \in C^{\gamma}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\gamma = 1 - \dfrac{n-2}{q+2\nu/(1-\nu)}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 с очевидными упрощениями.

2. Теорема Лиувилля. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ систему вида (1), коэффициенты которой не зависят от x, т. е. систему

$$\sum_{|\alpha|=m} (-D)^{\alpha} A_{\alpha}(D^m u) - \sum_{k=1}^{n} D_k A_k(Du) = 0. \tag{7}$$

Предполагаем, что A_{α}, A_k удовлетворяют (2), (3).

Теорема 4. *Пусть* $p \ge 2$, $q > p$, $a_q > a_{\nu}$, $u \in W^m_{p,\mathrm{loc}} \cap W^1_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ — *решение* (7) *такое, что при некотором* $a > a_{\nu}$

$$\liminf_{R\to\infty} R^{a-2-q} \int_{Q_R} |u - [u]_R|^q \, dx = 0, \tag{8}$$

где $[u]_R$ — *среднее значение* u *по* Q_R. *Тогда если* $a_q < 0$, *то при больших* R

$$\int_{B_R} |Du|^{q-2} |D^2 u|^2 dx \le c R^{-a_q}, \tag{9}$$

а если $a_q \ge 0$, *то* u — *константа.*

Доказательство. Применим лемму 2 в шаре B_R. При $a_{\nu} < a < a_q$ согласно неравенству Юнга имеем

$$\int_{B_R} |Du|^p \rho^{a-\delta} r^{\delta-2-(m-1)p} dx \le \varepsilon \int_{B_R} |Du|^q \rho^a r^{-2} dx +$$

$$+ c_{\varepsilon} \int_{B_R} \rho^{a-q\delta/(q-p)} r^{q\delta/(q-p)-2-pq(m-1)/(q-p)} dx \le \varepsilon \int_{B_R} |Du|^q \rho^a r^{-2} dx + c\tau^{a-a_q},$$

где $\delta > 0$ выбрано так, что $\dfrac{q\delta}{q-p} - 2 - pq\dfrac{m-1}{q-p} > -n$. Стандартным путем устанавливаются оценки

$$\int_{\frac{7}{8}R<r<R} |D^2 u|^2 |Du|^{q-2} dx \le cR^{-2} \int_{\frac{3}{4}R<r<\frac{9}{8}R} |Du|^q dx + cR^{n-2-pq(m-1)/(q-p)} \le$$

$$\le cR^{-2-q} \int_{\frac{2}{3}R<r<\frac{4}{3}R} |u - [u]_R|^q dx + cR^{n-2-pq(m-1)/(q-p)}$$

(очевидно, в (5) Q_R можно заменить кольцом $\{x\colon \frac{7}{8}R < r < R\}$). Из (5) при $R \to \infty$, учитывая (8), получаем

$$\tau^a \int\limits_{B_\tau} (|D^2u|^2 |Du|^{q-2} + r^{-2}|Du|^q)dx \le c\tau^{a-a_q}.$$

Если $a_q < 0$, это выражение совпадает с (9). Если $a_q \ge 0$, отсюда при $\tau \to \infty$ следует $r^{-2}|Du|^q \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Используя стандартную оценку

$$\int\limits_{B_{\frac{R}{2}}} |D^2u|^2 |Du|^{q-2}\, dx \le cR^{-2} \int\limits_{Q_R} |Du|^q\, dx + c\Big(R^{-2} \int\limits_{Q_R} |Du|^q\, dx\Big)^{p/q} R^{(n-2)(q-p)/q-(m-1)p},$$

при $R \to \infty$ по абсолютной непрерывности интеграла находим $D^2u \equiv 0$. Следовательно, u — линейная функция, но, поскольку $r^{-2}|Du|^q \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то $u =$ $=$ const.

Замечание. В ряде случаев теорема сохраняет справедливость, если в (8) заменить a на a_ν. Применим лемму 2 с $a = a_\nu$. Согласно неравенству Юнга находим

$$\int\limits_{B_R} |Du|^p \rho^{a-\delta} r^{\delta-2-(m-1)p} dx \le \varepsilon \int\limits_{B_R} |Du|^q \tau^\delta \rho^{a-2\delta} r^{\delta-2} dx +$$

$$+ c \int\limits_{B_R} \rho^{a-\delta+p\delta/(q-p)} \tau^{-p\delta/(q-p)} r^{\delta-2+pq(m-1)/(q-p)} dx,$$

где интеграл от веса оценивается через $c\tau^{a_\nu - a_q}$, если $a_\nu + \delta p/(q-p) - a_q < 0$, $\delta - a_q > 0$. В частности, такое $\delta > 0$ всегда можно выбрать при $a_\nu < a_q \le 0$.

Сформулируем утверждение теоремы 4 отдельно для случая ограниченных решений.

Следствие. *Пусть* $p \ge 2$, $p < q \le \dfrac{(n-2)p}{n-2-(m-1)p}$ (*если* $p \ge \dfrac{n-2}{m-1}$, *то* $p < q < \infty$), $\nu > \max\{1 - 2/(n-q); 0\}$. *Тогда любое решение* (7) *класса* $W^m_{p,\mathrm{loc}} \cap W^1_{q,\mathrm{loc}} \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *является константой.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условий теоремы 4. Для ограниченных решений (8) выполнено при $a_\nu < 2 + q - n$, что следует из $\nu > \max\{1 - 2/(n-q); 0\}$. Условие $a_q \ge 0$ равносильно $q \le \dfrac{(n-2)p}{n-2-(m-1)p}$.

В случае системы второго порядка

$$D_k A_k(Du) = 0, \tag{10}$$

удовлетворяющей условию (3), справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $q \ge 2$, $\nu > \max\{1 - 2/(n-q); 0\}$. *Тогда любое решение* (10) *класса* $W^1_{q,\mathrm{loc}} \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *является константой.*

1. *Скрыпник И. В.* О квазилинейных эллиптических уравнениях высокого порядка с непрерывными обобщенными решениями // Дифференц. уравнения.– 1978.– **14**, № 6.– С. 1104–1119.
2. *Koshelev A. I., Chelkak S. I.* Regularity of solutions of quasilinear elliptic systems. – Leipzig: Teubner, 1985. – 208 p.
3. *Калита Е. А.* Регулярность решений эллиптических систем типа Кордеса произвольного порядка // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 5. – С. 12–15.
4. *Калита Е. А.* Теорема Лиувилля для эллиптических систем типа Кордеса высокого порядка // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 2. – С. 199–205.
5. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 448 с.

Получено 22.10.92