УДК 512.8

В. М. УСЕНКО, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Подгруппы полупрямых произведений

Вводится понятие приведенного скрещенного гомоморфизма и с его помощью описываются подгруппы полупрямого произведения. Охарактеризованы подполупрямые произведения и полупрямые произведения с заданной структурой нормальных подгрупп.

Вводиться поняття зведеного зхрещеного гомоморфізму, за допомогою якого описуються підгрупи півпрямого добутку. Охарактеризовані піднапівпрямі добутки, а також півпрямі добутки, що мають задану структуру нормальних підгруп.

Полупрямое произведение — одна из наиболее часто используемых теоретико-групповых конструкций, эффективность применения которой существенно ограничивается отсутствием описания строения ее подгрупп.

В работе [1] предложен метод обозрения подгрупп полупрямого произведения, послуживший основой техники решения некоторых задач теории групп [2, 3]. Независимо в [4] аналогичный метод был использован для описания подгрупп диэдральной группы. Цель настоящей работы состоит в развитии метода, предложенного в работах [1, 4], и применении его к описанию полупрямых произведений с заданными свойствами структуры нормальных подгрупп.

1. Скрещенные гомоморфизмы и слойноскрещенные произведения. В настоящем пункте вводится понятие

приведенного скрещенного гомоморфизма и с его помощью дается описание подгрупп полупрямого произведения (п. 1.3). В п. 1.4 приводится характеризация приведенных скрещенных гомоморфизмов, обобщающая результат, анонсированный в [5].

1.1. Пусть U и H — группы, φ: $H \to \operatorname{Aut} U$ — антигомоморфизм. Для $u \in U$, $h \in H$ полагаем $h\varphi = \varphi_h$, $u\varphi_h = u^h$. Множество всех упорядоченных пар $(u; h)$, $u \in U$, $h \in H$, с операцией $(u_1; h_1)(u_2; h_2) = (u_1 u_2^{h_1}; h_1 h)$ есть группа, которая называется полупрямым произведением групп U и H с антигомоморфизмом связи φ и обозначается через $U \times_\varphi H$. При этом U нормальна в $U \times_\varphi H$ и называется пассивным множителем, а H — активным множителем полупрямого произведения (для упрощения обозначений как обычно, отождествляем группы U и H с соответственно изоморфными им подгруппами $U_1 = \{(u; 1) | u \in U\} \leqslant U \times_\varphi H$ и $H_1 = \{(1; h) : h \in H\} \leqslant U \times_\varphi H$).

1.2. Пусть $G = U \times_\varphi H$ — полупрямое произведение групп U и H с антигомоморфизмом связи φ, а $\Gamma \leqslant G$ — подгруппа группы G. Введем следующие обозначения:

$$\Gamma_U = \{u \in U \mid \exists h \in H : (u; h) \in \Gamma\},$$
$$\Gamma_H = \{h \in H \mid \exists u \in U : (u; h) \in \Gamma\},$$
$$U_\Gamma = \Gamma \cap U, \quad H_\Gamma = \Gamma \cap H.$$

$\Gamma_H (\Gamma_U)$ называется проекцией Γ на H (соответственно на U), а $H_\Gamma (U_\Gamma)$ — H-компонентой (соответственно U-компонентой) подгруппы Γ в группе G.

Легко проверить, что Γ_H, U_Γ, H_Γ — подгруппы в G, причем U_Γ нормальна в Γ. Проекция Γ_U подгруппой в G, вообще говоря, не является. Это обстоятельство не позволяет перенести описание подгрупп прямого произведения двух групп (см., например, [6]) на полупрямые произведения.

Рассматривая отображение $\Gamma \to H : (u; h) \mapsto h$, $u \in \Gamma_U$, $h \in \Gamma_H$, замечаем, что $\Gamma / U_\Gamma \cong \Gamma_H$.

1.3. Пусть $G = U \times_\varphi H$. Групповые мономорфизмы $\rho : R \to H$, $\lambda : L \to U$ назовем φ_U^H-парой групп, если существует короткая точная последовательность групп

$$1 \to L \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} R \to 1$$

с мономорфизмом $\mu : T \to G$ таким, что групповая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & U \times_\varphi H & \\ L \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[r, "\alpha"] & T \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\beta"] & R \arrow[ul, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна. Для φ_U^H-пары групп $\lambda : L \to U$, $\rho : R \to H$ используем обозначение $\langle L^\lambda, R^\rho; \varphi_U^H \rangle$.

Ясно, что группы L и R определяют некоторую φ_U^H-пару, если существует расширение T группы L с помощью R такое, что вложения $\lambda : L \to U$, $\rho : R \to H$ индуцируют вложение T в G. Иными словами, любая φ_U^H-пара групп определяет некоторую подгруппу полупрямого произведения $G = U \times_\varphi H$. С другой стороны, любая подгруппа $\Gamma \leqslant G$ определяет некоторую φ_U^H-пару групп $\langle U_\Gamma^\pi, \Gamma_H^\tau; \varphi_U^H \rangle$, где $\pi : U_\Gamma \to U$, $\tau : \Gamma_H \to H$ — естественные вложения.

1.3.1. Пусть U и H — группы, $\varphi : H \to \operatorname{Aut} U$ — антигомоморфизм, L — подгруппа группы U. Отображение $f : H \to U$ называется L-приведенным скрещенным $\mathfrak{R}_\varphi$-гомоморфизмом (или скрещенным $\mathfrak{R}_\varphi^L$-гомоморфизмом), если для любых $g, h \in H$ найдется $u \in L$, для которого

$$(gh) f = u \cdot gf \cdot (hf)^g. \qquad (1)$$

Если L — единичная группа, то L-приведенные скрещенные гомоморфизмы — просто скрещенные гомоморфизмы групп (см., например, [6]). Если Ker $\varphi = 1$, то f называется L-приведенным гомоморфизмом.

1.3.2. Пусть $\langle L^{\lambda}, R^{\rho}; \varphi_U^H\rangle$ — φ_U^H-пара групп. Скрещенный $\mathfrak{R}_{\varphi}^{L}$-гомоморфизм $\theta : R \to U$ назовем нормальным, если

$$h\theta \cdot x^{h} \cdot (h\theta)^{-1} \in L \tag{2}$$

для всех $x \in L$, $h \in R$. С помощью понятия нормального скрещенного $\mathfrak{R}_{\varphi}^{L}$-гомоморфизма φ_U^H-пары групп характеризуюся следующим образом.

Предложение. *Пусть $G = U \times_{\varphi} H$. Групповые вложения*

$$\lambda : L \to U, \quad \rho : R \to H \tag{3}$$

тогда и только тогда образуют φ_U^H-пару групп, когда существует нормальный скрещенный $\mathfrak{R}_{\varphi}^{L}$-гомоморфизм $\theta : R \to U$.

Доказательство. Для упрощения выкладок будем отождествлять группы L и R с их образами $L\lambda$ и $R\rho$ в U и соответственно в H.

Пусть $\theta : R \to U$ — некоторый нормальный скрещенный R_{φ}^{L}-гомоморфизм. В $G = U \times_{\varphi} H$ рассмотрим подмножество $T = \{(u \cdot h\theta;\ h) |\ u \in L,\ h \in R\}$. Используя свойства (1), (2), нетрудно проверить, что T — подгруппа в G, проекция на H которой совпадает с R, а U-компонента — с L. Это означает (см. п. 1.2), что T — искомое расширение L с помощью R и, таким образом, вложения (3) образуют φ_U^H-пару групп.

Пусть, обратно, (3) — φ_U^H пара групп, T — соответствующее расширение L с помощью R и с мономорфизмом $\mu : T \to G$. В каждом смежном классе Lx группы $T\mu$ по ее нормальной подгруппе $L\lambda$ выберем по одному элементу $\bar{x}$ в качестве представителя. Обозначив $l_g = a$ для $g = (a;\ b) \in G$, положим $h\,\theta = l_{\bar{x}}$ для всех $x = (u;\ h) \in T\mu$. Получим отображение $\theta : R \to U$, причем для любого $x = (u;\ h) \in T\mu$ значение $h\theta$ не зависит от $l_x = u$. Кроме того, $(u;\ h) = (u \cdot (h\theta)^{-1} \cdot h\theta;\ h)$, где $u \cdot (h\theta)^{-1} \in L$.

Покажем, что θ — нормальный скрещенный $\mathfrak{R}_{\varphi}^{L}$-гомоморфизм. Если $g_1 = (u_1 \cdot h_1\theta;\ h_1)$, $g_2 = (u_2 \cdot h_2\theta;\ h_2)$ — элементы из $T\mu$, то $g_1 g_2 = (u_1 \cdot h_1\theta \times \times (u_2 \cdot h_2\theta)^{h_1};\ h_1 h_2) = (u_1 v_1 v_2 (h_1 h_2\theta);\ \ h_1 h_2)$, где $v_1 = h_1\theta \cdot u_2^{h_1} \cdot (h_1\theta)^{-1}$, $v_2 = h_1\theta \cdot (h_2\theta)^{h_1} \cdot ((h_1 h_2)\,\theta)^{-1}$. Элемент v_1 принадлежит подгруппе L в силу ее инвариантности в $T\mu$, а $v_2 \in T\mu$, так как $v_1 v_2 \in T\mu$, $v_1 \in T\mu$. Это означает, что для θ выполнены условия (1), (2). Предложение доказано.

1.3.3. Будем говорить, что подгруппы $L \leqslant U$ и $R \leqslant H$ образуют в группе $G = U \times_{\varphi} H$ внутреннюю φ_U^H-пару (или, для краткости, I-пару подгрупп группы G), если существует нормальный скрещенный $\mathfrak{R}_{\varphi}^{L}$-гомоморфизм $\theta : R \to U$). I-пару подгрупп L и R группы $G = U \times_{\varphi} H$ обозначим через $\langle L, R;\ \varphi_U^H\rangle$.

Если $\langle L, R;\ \varphi_U^H\rangle$ — I-пара в $G = U \times_{\varphi} H$, то в G естественно возникает подгруппа $L \underset{\times}{\times} {}^{\theta}_{\varphi} R = \{(u \cdot h\theta;\ h)$, которую назовем слойноскрещенным произведением этой пары. Из предложения п. 1.3.2 вытекает следующее внутреннее описание подгрупп полупрямого произведения.

Теорема. *Подгруппами группы $G = U \times_{\varphi} H$ являются слойноскрещенные произведения всевозможных ее I-пар и только они.*

1.4. Поточечное произведение $\alpha * \beta$ двух групповых отображений $\alpha : A \to B$, $\beta : A \to B$ определим как отображение, действующее по правилу $x\,(\alpha * \beta) = x\alpha \cdot x\beta$, $x \in A$.

Через $\hat{g}$ обозначим внутренний автоморфизм группы A, определяемый ее элементом g (т. е. $x\hat{g} = g^{-1}xg$ для всех $x \in A$).

Скрещенные R_{φ}^{L}-гомоморфизмы характеризуются следующим образом.

Теорема. *Для групп U, H, $L \leqslant U$ антигомоморфизма $\varphi : H \to \operatorname{Aut} U$ и отображения $f : H \to U$ следующие утверждения равносильны:*

1) *f — скрещенный $\mathfrak{R}_{\varphi}^{L}$-гомоморфизм;*

 ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1991, т. 43, № 7—8

2) *существуют группа* Γ, *мономорфизм* $\mu: U \to \Gamma$, $L\mu$-*приведенный гомоморфизм* $\pi: H \to \Gamma$ *и антигомоморфизм* $\sigma: H \to \Gamma$ *такие, что* $\varphi_h = (\mu(\widehat{h\sigma}))\mu^{-1}$, *а* $\bar{f} = (\pi * \sigma)\mu^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\bar{f}: H \to U$ — скрещенный $\mathfrak{R}_\varphi^{\varepsilon}$-гомоморфизм, а $\operatorname{Hol} U$ — голоморф группы U, т. е. $\operatorname{Hol} U = \{(u; \alpha) \mid u \in U, \ \alpha \in \operatorname{Aut} U\}$ и $(u_1; \alpha_1)(u_2; \alpha_2) = (u_1 \cdot \alpha_1 u_2; \alpha_1\alpha_2)$ для всех $(u_1; \alpha_1)$, $(u_2; \alpha_2) \in \operatorname{Hol} U$. Положим $\Gamma = \operatorname{Hol} U$, $\bar{\varphi}_x$ — автоморфизм группы U такой, что $\bar{\varphi}_x u = u\varphi_x = u^x$ для всех $u \in U$ при каждом $x \in H$. Определим отображения $\mu: U \to \Gamma$, $\pi: H \to \Gamma$, $\sigma: H \to \Gamma$ равенствами $u\mu = (u; 1)$, $h\pi = (h\bar{f}; \bar{\varphi}_h)$, $h\sigma = (1; \bar{\varphi}_h^{-1})$, $u \in U$, $h \in H$. Для всех $u \in U$, $h \in H$ получим $u\varphi_h = (u\varphi_h; 1)\mu^{-1} = ((1; \bar{\varphi}_h) \times (u; \bar{1})(1; \varphi_h^{-1}))\mu^{-1}$, откуда $\varphi_h = (\mu(\widehat{h\sigma}))\mu^{-1}$. Кроме того, $h\bar{f} = (h\bar{f}; 1)\mu^{-1} = ((h\bar{f}; \varphi_h^{-1})(1; \bar{\varphi}_h^{-1}))\bar{\mu}^{-1} = h(\pi * \sigma)\mu^{-1}$. Это означает, что из утверждения 1 следует утверждение 2.

Предположим, что выполнено утверждение 2. Тогда для всех $x, y \in H$ при подходящем $u \in L\mu$ будем иметь

$$(xy)\bar{f} = ((xy)(\pi * \sigma))\mu^{-1} = ((xy)\pi \cdot (xy)\sigma)\mu^{-1} = (u \cdot x\pi \cdot y\pi \cdot y\sigma \cdot x\sigma)\mu^{-1} =$$
$$= u\mu^{-1} \cdot (x(\pi * \sigma) \cdot (x\sigma)^{-1} \cdot y(\pi * \sigma) \cdot x\sigma)\mu^{-1} = u\mu^{-1} \cdot x(\pi * \sigma)\mu^{-1} \times$$
$$\times (y(\pi * \sigma)\mu^{-1})\mu(\widehat{x\sigma})\mu^{-1} = u\mu^{-1} \cdot x\bar{f} \cdot (y\bar{f})^x.$$

Таким образом, из утверждения 2 следует утверждение 1. Теорема доказана.

2. Подполупрямые произведения. Отмеченная в п. 1.2 особенность проекции Γ_U подгруппы Γ полупрямого произведения $U \times_\varphi H$ позволяет среди подгрупп последнего выделить те, для которых эта проекция сама является подгруппой в U. В п. 2.1 такие подгруппы охарактеризованы как подполупрямые произведения своих компонент. В п. 2.3 описываются те подполупрямые произведения, которые могут быть описаны с помощью аналога конструкции из работы [7].

2.1. Подгруппу Γ группы $G = U \times_\varphi H$ назовем подполупрямым произведением групп U и H, если ее проекции L_U и L_H (см. п. 1.2) совпадают с U и соответственно с H.

Подгруппу $\Gamma \leqslant G$ назовем регулярной, если ее проекция Γ_U является подгруппой в U.

Лемма. *Для того чтобы подгруппа* $\Gamma \leqslant U \times_\varphi H$ *была подполупрямым произведением своих проекций* Γ_U *и* Γ_H, *необходимо и достаточно, чтобы* Γ *была регулярна в* $G = U \times_\varphi H$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Если $(v; h)$, $(u; g) \in \Gamma$, то $(vu^h; hg) \in \Gamma$. Это означает, что $u^h \in \Gamma_U$ для всех $u \in \Gamma_U$, $h \in \Gamma_H$. Отсюда следует $\Gamma \leqslant \Gamma_U \times_{\varphi_{\Gamma_H}} \Gamma_H \leqslant G$, где φ_{Γ_H} — ограничение φ на Γ_H. Лемма доказана.

2.2. Пусть A — группа, B — ее неинвариантная подгруппа. Для всех $(u; v)$, $(g; h) \in A \times A$ положим $(u; v)(g; h) = (u \cdot g\,\widehat{v}^{-1}; vh)$. Получим полупрямое произведение $D = A \times_\varepsilon A$, где $\varepsilon: a \to \widehat{a}^{-1}$ — антигомоморфизм группы A в группу $\operatorname{Int} A$ ее внутренних автоморфизмов. $\Gamma = \{(ug^{-1}; g) \mid u \in B, \ g \in A\}$ — подгруппа группы D, проекции которой на полупрямые множители совпадают с A. Таким образом, Γ — подполупрямое произведение своих проекций. С другой стороны, пассивная компонента Γ в D совпадает с В. Этот пример показывает, что в отличие от случая подпрямого произведения пересечения подполупрямого произведения с полупрямыми множителями, вообще говоря, не являются нормальными подгруппами в этих множителях. Естественно поэтому в классе всех подполупрямых произведений групп U и H выделить подполупрямые произведения, U-компоненты которых нормальны в U.

2.3. Регулярную подгруппу Γ полупрямого произведения $U \times_\varphi H$ назовем вполне регулярной, если ее U-компонента нормальна в проекции Γ_U.

Теорема. *Пусть* $G = U \times_\varphi H$. *Для подгруппы* $\Gamma \leqslant G$ *следующие утверждения равносильны:*

1) Γ — *вполне регулярная подгруппа группы* G;

2) *существуют группа* F, *антигомоморфизм* $\psi: \Gamma_H \to \operatorname{Aut} F$, *эпиморфизм* $\sigma: \Gamma_U \to F$ *и сюръективный скрещенный гомоморфизм* $\eta: \Gamma \to F$ *такие, что* $\varphi_h\sigma = \sigma\psi_h$ *для всех* $h \in \Gamma_H$ *и* $\Gamma = \{(u, h) \in G \mid u\sigma = h\eta\}$.

Доказательство. Пусть $\Gamma \leqslant G$ — вполне регулярная подгруппа. Согласно лемме п. 2.1 без ограничения общности можно принять $\Gamma_U = U$, $\Gamma_H = H$. Положим $F = U/U_\Gamma$ и обозначим через σ естественный эпиморфизм U на F. Так как Γ — подполупрямое произведение своих проекций, то для каждого $h \in H$ найдется $u \in U$ такой, что $(u; h) \in F$. Положим в этом случае $h\eta = u\sigma$. Значение $h\eta$ не зависит при этом от выбора $u \in U$, для которого $(u; h) \in \Gamma$. Таким образом, определено сюръективное отображение $\eta: H \to F$, для которого при любых $(u_1; h_1)$, $(u_2; h_2) \in \Gamma$ имеем $(h_1h_2)\eta = (u_1u_2^{h_1})\sigma = u_1\sigma\cdot(u_2^{h_1})\sigma = h_1\eta\cdot(u_2^{h_1})\sigma$. Положив для всех $u \in U$, $h \in H$ $(u\sigma)\psi_h = (u^h)\sigma$, получим $((u_1u_2)\sigma)\psi_h = ((u_1u_2)^h)\sigma = (u_1\sigma)\psi_h\cdot(u_2\sigma)\psi_h$, каковы бы ни были $u_1, u_2 \in U$, $h \in H$. Кроме того, если $(u_1\sigma)\psi_h = (u_2\sigma)\psi_h$, то $(u_1^h)\sigma = (u_2^h)\sigma$ и, следовательно, ψ_h является автоморфизмом группы F для каждого $h \in H$. Отображение $\psi: H \to \operatorname{Aut} F$; $h \mapsto \psi_h$ является антигомоморфизмом. Действительно, $(u\sigma)\psi_{h_1h_2} = (u^{h_1h_2})\sigma = ((u^{h_2})^{h_1})\sigma = (u\sigma)\psi_{h_2}\psi_{h_1}$ для всех $h_1, h_2 \in H$. Таким образом, $(h_1h_2)\eta = h_1\eta\cdot(h_2\eta)\psi_{h_1}$ для всех $h_1, h_2 \in H$, т. е. η — скрещенный гомоморфизм H на F и при этом $\Gamma = \{(u; h) \in G \mid u\sigma = h\eta\}$.

Пусть, наоборот, выполнено утверждение 2. В силу того, что σ — эпиморфизм, Γ_U оказывается подгруппой группы U и снова по лемме п. 2.1 можем считать, что $\Gamma_U = U$, $\Gamma_H = H$. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что Γ — подгруппа в G. Вполне регулярность ее будет следовать из того, что $U_\Gamma = \operatorname{Ker} \sigma$.

Пусть $(u_1; h_1)$, $(u_2; h_2) \in \Gamma$. Тогда $(u_1; h_1)(u_2; h_2) = (u_1u_2^{h_1}; h_1h_2)$ и $(u_1u_2^{h_1})\sigma = u_1\sigma\cdot(u_2\sigma)\psi_{h_1} = h_1\eta\cdot(h_2\eta)\psi_{h_1} = (h_1h_2)\eta$ в силу того, что $u_1\sigma = h_1\eta$, $u_2\sigma = h_2\eta$ и η — скрещенный гомоморфизм.

Для доказательства того, что $(u; h)^{-1} \in \Gamma$ для всех $(u; h) \in \Gamma$, отметим одно свойство скрещенных гомоморфизмов. А именно: $h\eta = (h\cdot 1)\eta = h\eta(1\eta)^h$, т. е. $1\eta = 1$. Далее $1 = 1\eta = (hh^{-1})\eta = h\eta\cdot(h^{-1})\eta^h$, откуда $(h\eta)^{-1} = ((h^{-1})\eta)\psi_h$. Используя это свойство для $(u; h)^{-1} = ((u^{-1})^{h-1}; h^{-1})$, будем иметь $((u^{-1})^{h-1})\sigma = (u^{-1})\sigma\psi_{h-1} = ((u\sigma)^{-1})\psi_{h-1} = ((h\eta)^{-1})\psi_h^{-1} = (((h^{-1})\eta)\psi_h)\psi_h^{-1} = (h^{-1})\eta$, т. е. $(u; h)^{-1} \in \Gamma$. Теорема доказана.

3. А-детерминированные полупрямые произведения. Простейшими примерами нормальных подгрупп в полупрямом произведении $G = U \times_\varphi H$ являются подгруппы вида $U \times_{\varphi_N} N$, где N — нормальная подгруппа группы H, а φ_N — ограничение антигомоморфизма φ на N. Другой пример — централизатор пассивной группы полупрямого произведения, описание которого также несложно получить. Основная цель настоящего пункта — охарактеризовать полупрямые произведения, нормальные подгруппы которых исчерпываются подгруппами двух типов — подгруппами вида $U \times_{\varphi_N} N$ и нормальными подгруппами, принадлежащими централизатору пассивной группы. Такие полупрямые произведения названы здесь A-детерминированными (см. п. 3.3.1).

В пп. 3.1, 3.2 описывается централизатор пассивной группы и его подгруппы. В п. 3.3 вводится понятие, обобщающее понятие квазипростой группы [8], и с его помощью решается основная задача пункта.

3.1. Лемма. *Любая нормальная подгруппа полупрямого произведения вполне регулярна.*

Доказательство. Пусть Γ — нормальная подгруппа группы $G = U \times_\varphi H$ и $(u; h) \in \Gamma$. Тогда $(u^h; h) = (1; h)(u; h)(1; h)^{-1} \in \Gamma$, откуда для $g_1 = (u_1; h_1)$, $g_2 = (u_2; h_2) \in \Gamma$ получаем $g_1'\cdot g_2 = ((u_1u_2)^{h_1}; h_1h_2) \in \Gamma$, где $g_1' = (u_1^{h_1}; h_1) \in \Gamma$. Отсюда $(u_1u_2; h_1h_2) = (1; h_1)^{-1}\cdot g_1'g_2\cdot(1; h_1) \in \Gamma$, а это означает, что из u_1, $u_2 \in \Gamma_U$ следует $u_1 u_2 \in \Gamma_U$. Кроме того, если $g = (u; h) \in \Gamma$, то $(1; h) g^{-1} (1; h)^{-1} = (u^{-1}; h^{-1}) \in \Gamma$, а это, в свою очередь, означает, что из $u \in \Gamma_U$ следует $u^{-1} \in \Gamma_U$. Таким образом, Γ — регулярная подгруппа группы G. Инвариантность U_Γ в U очевидна. Лемма доказана.

3.2. Централизатор пассивной группы полупрямого произведения, будучи централизатором нормальной подгруппы, сам, следовательно, оказывается нормальной подгруппой этого полупрямого произведения. Обозначая централизатор пассивной группы полупрямого произведения $G = U \times_\varphi H$ через $C_G(U)$, непосредственными вычислениями устанавливаем следующее его описание.

Лемма. $C_G(U) = \{(u; h) \in U \times_\varphi H \mid \hat{u} = h_\varphi\}$.

3.2.1. Охарактеризуем подгруппу $C_G(U)$ в терминах слойноскрещенных произведений.

Пусть $G = U \times_\varphi H$, $\operatorname{Int} U$ — группа внутренних автоморфизмов группы U, $\overline{H} = \{h \in H \mid h\varphi \in \operatorname{Int} U\}$, $C(U)$ — центр группы U.

Предложение. *Пусть* $\Gamma = L \mathop{\times}\limits_{\times\varphi}^{\theta} R$ — *слойноскрещенное произведение I-пары* $\langle L, R; \varphi_U^H \rangle$ *полупрямого произведения* $G = U \times_\varphi H$. *Равенство*

$$C_G(U) = L \mathop{\times}\limits_{\times\varphi}^{\theta} R \tag{4}$$

справедливо тогда и только тогда, когда выполняется каждое из следующих четырех условий:

$$L = C(U), \tag{5}$$

$$R = \overline{H}, \tag{6}$$

$$H_\Gamma = \operatorname{Ker} \varphi, \tag{7}$$

$$(h_1 h_2)\theta = u \cdot h_2\theta \cdot h_1\theta, \quad u \in L, \ h_1, \ h_2 \in R. \tag{8}$$

Доказательство. Если равенство (4) выполнено, то выполнение условий (5)—(8) очевидно. Нетрудно заметить, что из условий (5)—(8) следует $\Gamma \leqslant C_G(U)$. Кроме того, из (5), (6) и (8) получаем $x^h = (h\theta)^{-1} \cdot x \cdot h\theta$ для всех $x \in U$, $h \in R$. Отсюда для $g = (u; h) \in C_G(U)$, $x \in U$ имеем

$$(u \cdot (h\theta)^{-1}; 1)(x; 1) = (u; h)(x; 1)(h\theta; h)^{-1} = (x; 1)(u \cdot (h\theta)^{-1}; 1),$$

т. е. $u \cdot (h\theta)^{-1} \in C(U)$. Таким образом, для любого $g = (u; h) \in C_G(U)$ найдется $v \in C(U)$ такой, что $g = (v \cdot h\theta; h)$, т. е. $g \in \Gamma$ и $C_G(U) \leqslant \Gamma$. Предложение доказано.

3.2.2. В качестве следствия предложения п. 3.2.1 приведем описание подгрупп группы $G = U \times_\varphi H$, принадлежащих подгруппе $C_G(U)$.

Следствие. *Подгруппа* $\Gamma = L \mathop{\times}\limits_{\times\varphi}^{\theta} R$ *группы* $G = U \times_\varphi H$ *тогда и только тогда принадлежит централизатору подгруппы* U *в* G, *когда* $L \leqslant C(U)$, а θ *является* L-*приведенным антигоморфизмом. Если* $\Gamma \leqslant C_G(U)$, *то* Γ *вполне регулярна.*

Доказательство. Если $\Gamma \leqslant C_G(U)$, то требуемые свойства L и θ непосредственно следуют из предложения п. 3.2.1. Более того, если при этом элементы $g_1 = (u_1 \cdot h_1\theta; h_1)$, $g_2 = (u_2 \cdot h_2\theta; h_2)$ принадлежат Γ (т. е. u_1, $u_2 \in L$, h_1, $h_2 \in R$), то $v_1 = u_1 \cdot h_1\theta$, $v_2 = u_2 \cdot h_2\theta$ — элементы проекции Γ_U и для них при некотором $v \in L$ получаем $v_1 v_2 = u_1 u_2 v (h_2 h_1)\theta$. Но $g_2 g_1 = (u_2 \cdot h_2\theta \cdot u_1^{h_2} \cdot (h_1\theta)^{h_2}; h_2 h_1) = (v u_1 u_2 (h_2 h_1)\theta; h_2 h_1)$. Отсюда следует, что $v_1 v_2 \in \Gamma_U$. Аналогично проверяется, что если $u \in \Gamma_U$, то $u^{-1} \in \Gamma_U$. Таким образом, Γ регулярна в G, а поскольку $U_\Gamma = L$ — подгруппа центра, то Γ и вполне регулярна.

Пусть, обратно, $L \leqslant C(U)$, а θ — L-приведенный антигомоморфизм. Из второго условия получаем $(h_1\theta)^{h_2} = (h_2\theta)^{-1} \cdot h_1\theta \cdot h_2\theta$ для всех h_1, $h_2 \in R$. Тогда $x^h = (h\theta)^{-1} \cdot x \cdot h\theta$ для всех $x \in U$, $h \in R$, так как $L \leqslant C(U)$. Это немедленно влечет за собой перестановочность элементов $(u \cdot h\theta; h) \in \Gamma$ со всеми элементами $(x; 1) \in U$, т. е. $\Gamma \leqslant C_G(U)$. Следствие доказано.

3.2.3. Следствие. *Пусть $G = U \times_{\varphi} H$. Подгруппа $\Gamma = L \,{}^{\times\theta}_{\times\varphi} R \leqslant G$ тогда и только тогда является нормальной подгруппой группы G такой, что $\Gamma \leqslant C_G(U)$, когда $L \leqslant C(U)$, θ — L-приведенный антигомоморфизм, а R нормальна в H.*

3.3. Напомним (см., например, [8]), что группа A называется квазипростой, если ее фактор-группа по центру проста, а сама она совпадает со своим коммутантом A'.

Если $\Phi \leqslant \operatorname{Aut} A$, то подгруппа $B \leqslant A$ называется Φ-допустимой в A, если $B\alpha = B$ для всех $\alpha \in \Phi$.

Естественным обобщением понятия квазипростоты группы является понятие Φ-квазипростоты. А именно: пусть $\Phi \subseteq \operatorname{Aut} A$. Группу A назовем Φ-квазипростой, если $A = A'$, а ее центр является наибольшей собственной нормальной Φ-допустимой в A подгруппой.

3.3.1. Полупрямое произведение $G = U \times_{\varphi} H$ назовем A-детерминированным, если любая его нормальная подгруппа Γ либо содержится в $C_G(U)$, либо содержит U (т. е. $U_{\Gamma} = U$, что равносильно тому, что $\Gamma = U \times_{\varphi_N} N$, где N — нормальная подгруппа группы H, $\varphi_N = \varphi|_N$ — ограничение φ на N).

3.3.2. Полупрямое произведение $G = U \times_{\varphi} H$ назовем P-квазипростым, если U — $H\varphi$-квазипростая группа.

3.3.3. Теорема. *Полупрямое произведение $G = U \times_{\varphi} H$ тогда и только тогда A-детерминировано, когда оно P-квазипросто.*

Доказательство. Пусть $G = U \times_{\varphi} H$ — P-квазипростое полупрямое произведение, а $\Gamma = L \,{}^{\times\theta}_{\times\varphi} R$ — его нормальная подгруппа. Тогда L нормальна в G и, следовательно, $H\varphi$-допустима в U. В силу $H\varphi$-квазипростоты группы U это означает, что либо $L = U$, либо $L \leqslant C(U)$.

Если $L = U$, то, очевидно, $\Gamma = U \times_{\varphi_N} N$, где $N = R$ — нормальная подгруппа группы H.

Пусть $L \leqslant C(U)$. Для каждого $h \in R$ положим $x\sigma_h = x^{-1} \cdot h\theta \cdot x^h \times (h\theta)^{-1}$, $x \in U$. Непосредственно проверяется, что σ_h для каждого $h \in R$ является скрещенным эндоморфизмом группы U в ее центр. При этом для всех x, $y \in U$ справедливо равенство $(xy)\sigma_h = (x\sigma_h)\widehat{y} \cdot y\sigma_h$. Но из $x\sigma_h \in C(U)$ следует, что $(x\sigma_h)\widehat{y} = x\sigma_h$, т. е. все σ_h — эндоморфизмы. Поскольку при любом $h \in R$ $\operatorname{Im} \sigma_h \leqslant L \leqslant C(U)$, то ядра всех эндоморфизмов σ_h должны содержать коммутант U' группы U. В силу условия $U' = U$ получаем $x\sigma_h = 1$ для всех $x \in U$, $h \in R$, а это означает, что $x^h = (h\theta)^{-1} \times x \cdot h\theta = x\widehat{(h\theta)}$. Из леммы п. 3.2 следует, что $\Gamma \leqslant C_G(U)$.

Предположим теперь, что справедливо обратное утверждение: группа $G = U \times_{\varphi} H$ A-детерминирована. Для коммутанта U' группы U отсюда сразу получаем, что либо $U' = U$, либо $U' \leqslant C(U)$, поскольку U' допустима относительно любого автоморфизма группы U, и в противном случае оказывается нормальной подгруппой группы $G = U \times_{\varphi} H$, противоречащей ее A-детерминированности.

Если предположить, что $U' \leqslant C(U)$, то группа $K = U' \times_{\varphi} H$ будет нормальной подгруппой группы G. При этом $K \leqslant C_G(U)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \varphi = H$. В нетривиальных же случаях $\operatorname{Ker} \varphi \neq H$ и группа K — пример, противоречащий A-детерминированности группы $G = U \times_{\varphi} H$. Таким образом, $U = U'$.

Если, наконец, предположить, что существует собственная $H\varphi$-допустимая подгруппа D пассивной группы, содержащая $C(U)$ и $D \neq C(U)$, то примером, противоречащим A-детерминированности группы G, будет подгруппа $D \times_{\varphi} H$ (разумеется, при условии $\operatorname{Ker} \varphi \neq H$).

Таким образом, если $G = U \times_{\varphi} H$ A-детерминирована, то она P-квазипростая. Теорема доказана.

3.3.4. Отметим, что структурные свойства полной линейной группы (см., например, [9]) позволяют получить теорему о ее нормальном строении в качестве следствия теоремы п. 3.3.3.

1. *Усенко В. М.* Полупрямые произведения моноидов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1984.— 18 с.
2. *Усенко В. М.* О группе коллинеаций // IX Всесоюзн. симп. по теории групп (М., сент. 1984 г.): Тез. докл.— М. : Мат. ин-т АН СССР, 1984.— С. 246.
3. *Усенко В. М.* Про напівпрямі добутки груп // Вісн. Київ. ун-ту. Мат. і мех.— 1985.— 27.— С. 87—90.
4. *Rosenbaum K.* Die untergruppen von halbdirekten Produkten // Rostock. Math. Kollocq.— 1988.— 35.— P. 21—30.
5. *Усенко В. М.* Скрещенные гомоморфизмы и полупрямые произведения // Междунар. конф. по алгебре (Новосибирск, 21—26 августа 1989 г.): Тез. докл. по теории групп.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989.— С. 126.
6. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
7. *Fuchs L.* On subdirect unions, I // Acta Math. Acad. sci. hung.— 1952.— 3.— P. 103—120.
8. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию.— М. : Мир, 1985.— 352 с.
9. *Дьедонне Ж.* Геометрия классических групп.— М. : Мир, 1974.— 204 с.

Получено 22.03.91