УДК 519.145

Н. Д. ПОДУФАЛОВ, д-р физ.-мат. наук (ВЦ СО АН СССР, Красноярск)

О подплоскостях конечных проективных плоскостей

Изучаются вопросы наследственности свойства (γ, γ)-транзитивности (свойства быть плоскостью трансляций) конечной проективной плоскости для ее подплоскостей. В частности, показано, что наследственность имеет место для подплоскостей, содержащих точку γ.

Вивчаються питання спадковості властивості (γ, γ)-транзитивності (властивості бути площиною трансляцій) скінченної проективної площини для її підплощин. Зокрема, показано, що спадковість має місце для підплощин, що містять точку γ.

Пусть Γ — (γ, γ)-транзитивная конечная проективная плоскость для некоторой точки γ, порядок Γ равен q. Являются интересными следующие вопросы. В каких случаях подплоскости из Γ сами являются (γ', γ')-транзитивными плоскостями для некоторых точек γ'? И аналогичный вопрос для дуальных плоскостей: в каких случаях подплоскости плоскости трансляций сами являются плоскостями трансляций?

В настоящей работе мы докажем следующие результаты, дающие ответы на эти вопросы в некоторых важных случаях.

Теорема. *Любая проективная подплоскость из Γ, содержащая точку γ, является (γ, γ)-транзитивной плоскостью порядка, делящего q.*

Следствие 1. *Любая афинная подплоскость конечной афинной плоскости трансляций сама является плоскостью трансляций. Причем порядок подплоскости делит порядок плоскости.*

Следствие 2. *Пусть α — планарная коллинеация плоскости Γ. Тогда $C_\Gamma(\alpha)$ — (γ, γ)-транзитивная плоскость.*

И дуальный результат:

Следствие 3. *Множество фиксированных элементов планарной коллинеации конечной проективной плоскости трансляций само является проективной плоскостью трансляций.*

В дальнейшем будем использовать обозначения из [1].

Доказательство теоремы. Пусть Δ — проективная подплоскость плоскости Γ, содержащая точку γ; k — порядок Δ. Так как Δ содержит γ, то существует ровно $k+1$ прямых плоскости Γ, проходящих через точку γ и лежащих в Δ: $\{l_i \mid i \in I \subseteq \overline{1, \ldots, q+1}$ и $|I| = k+1\}$. Все точки Δ расположены на этих прямых, на каждой из них по k точек, отличных от γ. Пусть u — некоторый элемент из I. Рассмотрим действие группы W_u на Δ (через W_u в [1] обозначена группа элаций плоскости Γ, имеющих ось l_u и центр γ). Пусть $w \in W_u$. Очевидно, что множество точек $\Delta \cap l_u$ лежит в пересечении $\Delta \cap \Delta^w$. Предположим, что эти пересечения не совпадают как множества точек. Пусть точка $a \in \Delta \cap \Delta^w$ и $a \notin l_u$. Пусть $l_{s,t}$ — прямая плоскости Γ, проходящая через точку a и некоторую точку из $\Delta \cap l_u$, отличную от γ. Тогда $l_{s,t} \in \Delta \cap \Delta^w$. Далее, $l_{s,t} \cap \Delta$ как точечное множество совпадает со множеством точек $\{l_{s,t} \cap l_i \mid i \in I\}$. Так как W_u фиксирует все прямые, проходящие через точку γ, то очевидно совпадение следующих точечных множеств:

$$l_{s,t} \cap \Delta^w = \{l_{s,t} \cap l_i \mid i \in I\} = l_{s,t} \cap \Delta.$$

Так как пересечение подплоскостей $\Delta \cap \Delta^w$ — замкнутое множество и содержит точечные подмножества $l_u \cap \Delta$ и $l_{s,t} \cap \Delta$, то нетрудно проверить, что $\Delta \cap \Delta^w$ — невырожденная подплоскость. Очевидно, что точечное множество $l_u \cap \Delta$ является прямой в этой подплоскости и содержит $k+1$ точку. Значит, порядки подплоскостей Δ и $\Delta \cap \Delta^w$ совпадают. Отсюда $\Delta = \Delta \cap \Delta^w = \Delta^w$. Мы показали, что для любого элемента $w \in W_u$ либо $\Delta \cap \Delta^w = \Delta \cap l_u$ (как точечные множества), либо $\Delta = \Delta^w$. Пусть $v \in I \setminus \{u\}$. Рассмотрим действие группы W_u на точках прямой l_v, отличных от γ. Нетрудно проверить, что множество D точек пересечения $\Delta \cap l_v$ является областью импримитивности для W_u. Так как W_u действует транзитивно на точках $l_v \setminus \{\gamma\}$, то $W_u^* = N_{W_u}(D)$ действует транзитивно на точках D. В силу предыдущих рассуждений W_u^* нормализует подплоскость Δ. Положим $W^* = \langle W_u^* \mid u \in I \rangle$. Очевидно, что W^* нормализует подплоскость Δ и действие W^* на Δ удовлетворяет предположению 1 из [1]. Следовательно, подплоскость Δ является (γ, γ)-транзитивной плоскостью. Нетрудно проверить, что k делит q. Доказательство теоремы закончено.

Доказательство следствия 1. Пусть $A = P^L$ — афинная плоскость, полученная из проективной плоскости P удалением прямой L. По определению любая афинная подплоскость из A имеет вид P_I^L, где P_I — проективная подплоскость из P, содержащая прямую L. Если A — плоскость трансляций (относительно прямой L), то дуальная к P плоскость $\overline{P}$ будет (L, L)-транзитивной, где L — точка плоскости $\overline{P}$. Следовательно, дуальный образ $\overline{P}_I$ подплоскости P_I содержит точку L и по теореме является (L, L)-транзитивной плоскостью. Следовательно, P_I является плоскостью трансляций относительно прямой L, т. е. P_I^L — афинная плоскость трансляций. Очевидно, что порядок P_I^L делит порядок $A = P^L$. Следствие 1 доказано.

Доказательство следствия 2. Если плоскость Γ является дезарговой, то доказательство очевидно. Пусть теперь Γ не является дезарговой плоскостью. В этом случае точка γ является инвариантной под действием любой коллинеации, в частности $\gamma \in C_\Gamma(\alpha)$. Применение теоремы завершает доказательство.

Доказательство следствия 3 легко вытекает из предыдущего следствия.

В заключение сформулируем следующий вопрос: будет ли бэровская подплоскость плоскости трансляций сама плоскостью трансляций?

1. *Подуфалов Н. Д.* О (γ, γ)-транзитивных конечных проективных плоскостях // Вопросы алгебры.— 1989.— Вып. 4.— С. 129—146.

Получено 23.01.91