УДК 517.9

Ю. В. Теплинский, В. Е. Лучик

О приводимости дифференциальных уравнений с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей

Рассмотрен аналог теоремы Еругина для дифференциальных уравнений с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей. Приведены достаточные условия редукции задачи о приводимости уравнений указанного вида с периодическими коэффициентами к случаю конечномерных систем периодических импульсных уравнений растущей размерности.

Розглянуто аналог теореми Єругіна для диференціальних рівнянь з імпульсами в просторі обмежених числових послідовностей. Подано достатні умови редукції задачі про звідність рівнянь вказаного вигляду з періодичними коефіцієнтами до випадку скінченновимірних систем періодичних імпульсних рівнянь, розмірність яких необмежено зростає.

В пространстве $\mathfrak{M}$ ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с нормой $\|x\| = \sup_i \{|x_i|, \ i = 1, 2, \ldots\}$ рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсами

$$dx/dt = A(t)x, \quad t \neq \tau_j; \qquad \Delta x|_{t=\tau_j} = B_j x(\tau_j - 0), \tag{1}$$

где $x \in \mathfrak{M}$, $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^{\infty}$ и $B_j = [b_{ik}]_{i,k=1}^{\infty}$ — бесконечные матрицы, $\ldots < \tau_{-2} < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_j < \ldots$ — возрастающая последовательность действительных чисел из множества $R^1 = (-\infty, +\infty)$.

Под нормой матрицы $A(t)$ будем понимать выражение

$$\| A(t) \| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} | a_{ij}(t) |.$$

Предположим, что уравнение (1) таково, что выполняются условия:

1°. Функции $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots$, непрерывны по t на отрезке $T = R^1$, причем на любом конечном сегменте $T_1 = [a, b] \subset T$

$$\| A(t) \|_0 \stackrel{\text{dif}}{=} \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \max_{T_1} | a_{ij}(t) | \leqslant \psi_{[a,b]} = \text{const} < \infty. \tag{2}$$

2°. Матрицы B_j, $j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, постоянны и ограничены по норме $\|\cdot\|$, причем матрицы $B_j + E$, где E — единичная матрица, обратимы, и обратные матрицы $(B_j + E)^{-1}$ также ограничены.

3°. Моменты импульсов разделены, т. е. $\tau_{j+1} - \tau_j \geqslant c = \text{const} > 0$, $j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$.

Теорема 1. *Для любой точки (x_0, t_0) области $D = \mathfrak{M} \times T$ существует единственное решение $x = x(x_0, t)$, $x_0 = x(x_0, t_0)$ уравнения (1), продолжимое на весь отрезок T, причем для $t \geqslant t_0$*

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\sigma) x(\sigma, x_0) \, d\sigma + \sum_{t_0 < \tau_j < t} B_j x(\tau_j - 0, x_0).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 6.1 из [1] с учетом того, что уравнение

$$dx/dt = A(t)x \tag{3}$$

без импульсов имеет единственное решение, проходящее через точку $(x_0, t_0) \in D$, не выходящее из $\mathfrak{M}$ при всех $t \in T$ [2].

Множество всех бесконечных постоянных матриц, ограниченных по норме (для постоянной матрицы нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_0$ совпадают), обозначим через $\mathfrak{B}$.

Справедливы следующие три леммы, доказательства которых не приводим ввиду их элементарности.

Лемма 1. *Множество $\mathfrak{B}$ образует пространство Банаха над полем действительных чисел.*

Лемма 2. *Если матрица $P \in \mathfrak{B}$, то:*

1) $e^P \stackrel{\text{dif}}{=} E + P + P^2/2! + \ldots + P^k/k! + \ldots$ *существует и принадлежит $\mathfrak{B}$;*

2) *матрицы P и e^P коммутативны в смысле умножения;*

3) *матрица e^{-P} является обратной для e^P;*

4) *производная $(e^{Pt})'_t = e^{Pt} \cdot P$.*

Лемма 3. *Если матрицы $P_k(t) = [p_{ij}^{(k)}(t)]_{i,j=1}^{\infty} \in \mathfrak{B}$ при всех $t \in T$, $k = 1, 2, \ldots, s$, где s — произвольное натуральное число большее двух, то*

$$\prod_{k=1}^{s} P_k(t) = P_1(t) \left(\prod_{k=2}^{s} P_k(t) \right).$$

Определение 1. *Матричное решение $X(t)$ уравнения (1) назовем фундаментальной матрицей, если любое его решение можно представить в виде $X(t)c$, где $c \in \mathfrak{M}$.*

З а м е ч а н и е 1. Понятие фундаментальной системы решений уравнения как счетного базиса множества $\mathfrak{X}$ всех решений этого уравнения определить нельзя, так как это пространство не сепарабельно.

Предположим противное. Пусть пространство $\mathfrak{X}$ сепарабельно. Тогда в нем существует базис $x_1(t), x_2(t), \ldots$. Зафиксируем $t = t_0$. При этом постоянные векторы $x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots$ образуют базис в пространстве $\mathfrak{X}(t_0)$ всех решений уравнения (1) при $t = t_0$. Легко видеть, что $\mathfrak{X}(t_0) \equiv \mathfrak{M}$, а последнее не сепарабельно и счетного базиса иметь не может. Пришли к противоречию, которое и доказывает справедливость замечания.

Л е м м а 4. *Фундаментальные матрицы уравнения* (1) *существуют.*

Действительно, составим матрицу $X(t)$, i-м столбцом которой является решение $x_i(t)$ уравнения (1) с начальными условиями t_0, $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, 0, \ldots)$. Это означает, что $X(t_0) = E$. Как принято, эту матрицу будем называть матрицантом уравнения (1).

Покажем, что матрицант $X(t)$ является фундаментальной матрицей уравнения (1). Поскольку столбцы матрицы $X(t)$ являются решениями уравнения (1), то совершенно ясно, что и сама матрица $X(t)$ является его решением. Проверим теперь, что $X(t)c$, где $c \in \mathfrak{M}$, является решением уравнения (1), т. е. $X(t)c$ удовлетворяет ему при всех $t \in T$ и $X(t)c \in \mathfrak{M}$ при $t \in T$. Зафиксируем произвольное значение $t \in T$ и обозначим сегмент, включающий в себя t и t_0 через $T_1 = [a, b] \subset T$, а матрицант уравнения (3) без импульсов $U(t, \tau)$, $U(\tau, \tau) = E$. Строится он аналогично матрицанту $X(t)$. Учитывая, что

$$dU(t, \tau)/dt = A(t)\,U(t, \tau),$$

имеем $U(\tau, t) = E + \int\limits_{\tau}^{t} A(\sigma)U(\sigma, \tau)\,d\sigma$, откуда $\|U(t, \tau)\|_0 \leqslant 1 + \int\limits_{\tau}^{t} \Psi_0 \| \times U(\sigma, \tau)\|_0 d\sigma$, $(\Psi_0 = \Psi_{[a,b]})$. Используя неравенство Гронуолла — Беллмана [3], получаем оценку

$$\|U(t, \tau)\|_0 \leqslant e^{\Psi_0|t-\tau|} \leqslant e^{\Psi_0(b-a)} = \mathrm{const} < \infty, \quad t, \tau \in T_1. \tag{4}$$

Предположим, что моменты импульсов разместились на отрезке T_1 таким образом:

$$a < \tau_{j-l} < \ldots < \tau_{j-2} < \tau_{j-1} < \tau_j < \ldots \tau_{j+k} < \tau_{j+k+1} < \ldots < \tau_{j+s} < b,$$

разбив сегмент $[a, b]$ на $s + l + 2$ промежутка. Оценим матрицант $X(t, t_0)$ по норме $\|\cdot\|_0$ на отрезке T_1. Пусть для определенности $t_0 \in (\tau_{j-1}, \tau_j]$, $t \in (\tau_{j+k}, \tau_{j+k+1})$.

Учитывая лемму 3, а также равенство $d/dt\,(U(t)\,c) = d/dt\,(U(t))\,C$ (C — произвольная постоянная матрица из пространства $\mathscr{B}$), справедливость которого обеспечивается оценкой (4), получаем такое же, как и в [1], соотношение

$$X(t, t_0) = U(t, \tau_{j+k})(E + B_{j+k})\,U(\tau_{j+k}, \tau_{j+k-1}) \ldots (E + B_j)\,U(\tau_j, t_0).$$

Для значения t, лежащего левее t_0, например $t \in (\tau_{j-l}, \tau_{j-l+1}]$, имеем

$$X(t, t_0) = U(t, \tau_{j-l+1})(E + B_{j-l+1})^{-1}U(\tau_{j-l+1}, \tau_{j-l+2}) \ldots (E + B_{j-1})^{-1}U(\tau_{j-1}, t_0).$$

Из неравенства (4) и последних соотношений следуют оценки

$$\|X(t, t_0)\|_0 \leqslant e^{\Psi_0(b-a)(k+2)} \max_{j \leqslant i \leqslant j+k} \|E + B_i\|^{k+1}, \quad t \in (\tau_{j+k}, \tau_{j+k+1}];$$

$$\|X(t, t_0)\|_0 \leqslant e^{\Psi_0(b-a)l} \max_{j-l+1 \leqslant i \leqslant j-1} \|(E + B_i)^{-1}\|^{l-1}, \quad t \in (\tau_{j-l}, \tau_{j-l+1}],$$

в правых частях которых стоят положительные постоянные. Поскольку на T_1 рассматриваемых интервалов конечное число, то найдется такая константа $0 < K^0 < \infty$, что

$$\|X(t, t_0)\|_0 \leqslant K^0 \quad \forall t \in T_1.$$

Используя эту оценку и утверждение леммы 3, получаем равенства

$$\Delta (X(t)c)|_{t=\tau_j} = B_j(X(\tau_j - 0)c),$$

$$\frac{d}{dt}(X(t)c) = A(t)(X(t)c), \quad t \neq \tau_j, \quad c \in \mathfrak{M},$$

т. е. $X(t)c$ — решение уравнения (1) при любом $c \in \mathfrak{M}$. Теперь доказательство того, что для любого решения $x(t)$ уравнения (1) найдется такое $c \in \mathfrak{M}$, что $x(t) = X(t)c$, становится очевидным в силу теоремы 1. Лемма доказана.

Определение 2. *Матрицу $L(t)$ назовем матрицей Ляпунова, если она:*

1) *кусочно непрерывна на отрезке T и в точках τ_j, $j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, имеет разрывы первого рода;*

2) *обратима на T и непрерывно дифференцируема на множестве $T \setminus \{\tau_j\}$, причем на каждом конечном сегменте $T_1 \subset T$*

$$\| L(t) \|_0 < \infty; \qquad \| L^{-1}(t) \|_0 < \infty; \qquad \left\| \frac{d}{dt} L(t) \right\|_0 < \infty.$$

Замечание 2. В случае конечного отрезка T достаточно положить в определении $T_1 = T$ и указать конечное число точек разрыва τ_j.

Следуя Ляпунову, будем говорить, что уравнение (1) на отрезке T приводится к виду

$$dy/dt = Py, \quad y \in \mathfrak{M}, \tag{5}$$

где P — постоянная матрица из пространства $\mathcal{B}$, если существует такая матрица Ляпунова $L(t)$, что любое решение $x(t)$ уравнения (1) представимо в виде $x(t) = L(t)y(t)$, $t \in T$, где $y(t)$ — решение уравнения (5).

Теорема 2 (Еругина). *Уравнение (1) приводимо к виду (5) тогда и только тогда, когда некоторая фундаментальная матрица его $X(t)$ может быть представлена в виде $X(t) = L(t)e^{Pt}$, где $L(t)$ — матрица Ляпунова.*

Доказательство. Справедливо утверждение: если матрицы $Z(t) = [z_{ij}(t)]_{i,j=1}^{\infty}$ и $G(t) = [g_{ij}(t)]_{i,j=1}^{\infty}$ дифференцируемы на отрезке T_1, причем сами они и их производные ограничены на T_1 по норме $\|\cdot\|_0$, то

$$\frac{d}{dt}(Z(t)G(t)) = \frac{d}{dt}(Z(t))G(t) + Z(t)\frac{d}{dt}(G(t)), \quad t \in T_1.$$

Для этого достаточно доказать, что для всех $i, j = 1, 2, \ldots$

$$\left(\sum_{s=1}^{\infty} z_{is}(t) g_{sj}(t)\right)' = \sum_{s=1}^{\infty} z'_{is}(t) g_{sj}(t) + \sum_{s=1}^{\infty} z_{is}(t) g'_{sj}(t), \quad t \in T_1.$$

Последнее равенство действительно справедливо, ибо ряды в правой его части сходятся абсолютно и равномерно по $t \in T_1$, так как они мажорируются сходящимися числовыми рядами

$$\sum_{s=1}^{\infty} \max_{T_1} | z'_{is}(t) | \| G \|_0, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} \max_{T_1} | z_{is}(t) | \| G'(t) \|_0$$

соответственно [4].

С учетом отмеченного утверждения, а также леммы 3 формальная запись доказательства достаточности повторяет соответствующие выкладки теоремы 11.1 из [1], и мы ее здесь не приводим.

Остановимся лишь на доказательстве необходимости. Итак, пусть уравнение (1) приводится к виду (5) с помощью приводящей матрицы Ляпунова $L(t)$. Согласно лемме 2 матрица e^{Pt} существует и удовлетворяет уравнению (5). Очевидно, что любое решение этого уравнения $y(t)$ с начальными условиями $t_0 \in T$, $y_0 \in \mathfrak{M}$ можно представить в виде $y(t) = \exp\{P(t - t_0)\} y_0$. Поскольку матрицы Pt и Pt_0 коммутируют, то легко показать, что $e^{P(t-t_0)} = e^{Pt} \cdot e^{-Pt_0}$ [5, 6]. Обозначим матрицу $e^{-Pt_0} = C$. Ясно, что $C \in \mathscr{B}$. Отсюда следует, что каждое решение $y(t)$ уравнения (5) можно представить в виде $y(t) = e^{Pt} \cdot c$, $c \in \mathfrak{M}$. Произведение $L(t)\, e^{Pt}$ обозначим через $X(t)$. Очевидно, что $X(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (1), так как в множестве $X(t)\, c$, $c \in \mathfrak{M}$, содержатся все его решения, ибо $X(t)\, c = (L(t)\, e^{Pt})\, c = L(t)\,(e^{Pt} \cdot c)$, а $e^{Pt} \cdot c$ описывает все решения уравнения (5). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь ω-периодическое уравнение с импульсами

$$dx/dt = A(t)\, x,\ t \neq \tau_j; \qquad \Delta x\,|_{t=\tau_j} = B_j x(\tau_j - 0), \tag{6}$$

где $A(t)$ — ω-периодическая матрица и существует такое натуральное число p, что $B_{i+p} = B_i$, $\tau_{i+p} = \tau_i + \omega$ при всех целых числах i, причем моменты импульсов занумерованы так, что $t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p < \omega + t_0$. В остальном уравнение (6) подчинено тем же условиям, что и уравнение (1).

Запишем укороченное уравнение, соответствующее уравнению (6):

$$d\overset{(n)}{x}/dt = \overset{(n)}{A}(t)\,\overset{(n)}{x}, \quad t \neq \tau_j; \qquad \Delta\overset{(n)}{x}\,\big|_{t=\tau_j} = \overset{(n)}{B}_j\,\overset{(n)}{x}(\tau_j - 0). \tag{7}$$

Здесь $\overset{(n)}{A}(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^{n}$, $\overset{(n)}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overset{(n)}{B}_j = [b_{sl}^{(j)}]_{s,l=1}^{n}$.

Известно [1], что при любом натуральном n уравнение (7) приводимо, а для уравнения (6) в бесконечномерном пространстве прямого аналога теоремы Флоке — Ляпунова нет.

Не ограничивая общности, положим $T = [t_0, +\infty)$, а моментам τ_j присвоим номера $1, 2, 3, \ldots$ Решение $\overset{(n)}{x}(t, \overset{(n)}{x^0}, t_0)$ уравнения (7) имеет вид

$$\overset{(n)}{x}(t, \overset{(n)}{x^0}, t_0) = \overset{(n)}{x^0} + \int_{t_0}^{t} \overset{(n)}{A}(\sigma)\,\overset{(n)}{x}(\sigma, \overset{(n)}{x^0}, t_0)\, d\sigma + \sum_{t_0 < \tau_j < t} \overset{(n)}{B}_j\overset{(n)}{x}(\tau_j - 0, \overset{(n)}{x^0}, t_0).$$

Лемма 5. *Из последовательности $\{\overset{(n)}{x}\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к решению $x(t, x^0, t_0)$ уравнения (6) равномерно по координатам на каждом из отрезков $[t_0, \tau_1]$, $(\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 2, 3, 4, \ldots$.*

Доказательство. На отрезке $[t_0, \tau_1]$ для последовательности $\{\overset{(n)}{x}\}$ имеет оценку

$$\|\overset{(n)}{x}\| \leqslant \|x^0\| + \int_{t_0}^{t} \Psi_{[t_0,\tau_1]}\,\|\overset{(n)}{x}(\sigma)\|\, d\sigma, \quad \|\overset{(n)}{x}\| \leqslant \|\overset{(n)}{x^0}\|\, e^{\Psi_{[t_0,\tau_1]}(\tau_1 - t_0)} = K_0,$$

а на отрезке $(\tau_j, \tau_{j+1}]$ соответственно получаем

$$\|\overset{(n)}{x}\| \leqslant \|\overset{(n)}{x^0}\| + \int_{t_0}^{t} \Psi_{[t_0,\tau_{j+1}]}\,\|\overset{(n)}{x}(\sigma)\|\, d\sigma + \sum_{1 \leqslant k \leqslant j} \|B_k\|\,\|\overset{(n)}{x}(\tau_k - 0)\|,$$

откуда, учитывая лемму 2.1 из [1], выписываем неравенства

$$\|\overset{(n)}{x}\| \leqslant \|\overset{(n)}{x^0}\| \exp\{\Psi_{[t_0,\tau_{j+1}]}(\tau_{j+1} - t_0) \prod_{1 \leqslant k \leqslant j} (1 + \|B_k\|) = K_j = \mathrm{const} < \infty.$$

Это значит, что последовательность $\{\overset{(n)}{x}\}$ равномерно ограничена на каждом из сегментов $[t_0, \tau_1]$, $(\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = 2, 3, 4, \ldots$. Кроме того, она на каждом из них равностепенно непрерывна, что следует из соотношения

$$\|\overset{(n)}{x}(t_1) - \overset{(n)}{x}(t_2)\| \leqslant \left| \int_{t_1}^{t_2} \|\overset{(n)}{A}(\sigma)\|\,\|\overset{(n)}{x}(\sigma)\|\, d\sigma \right| \leqslant \Psi_{[t_0,\tau_{j+1}]} K_j\, |t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \in$$
$$\in (\tau_j, \tau_{j+1}], \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\tau_0 = t_0$.

В таком случае на отрезке $[t_0, \tau_1]$ из последовательности $\{\overset{(n)}{x_1}\}$ (первых координат $\overset{(n)}{x}$) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_1^{\alpha_s}, \ldots$. Из последовательности вторых координат $x_2^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots$ $\ldots, x_2^{\alpha_s}, \ldots$ выбираем сходящуюся подпоследовательность $x_2^{\beta_1}, x_2^{\beta_2}, \ldots, x_2^{\beta_s}, \ldots$ Этот процесс продолжим неограниченно. Применив прием диагонализации (см., например, [7]), из последовательности $\{\overset{(n)}{x}\}$ выберем подпоследовательность $\overset{(\alpha_1)}{x}, \overset{(\beta_2)}{x}, \overset{(\gamma_3)}{x}, \ldots$, которая сходится равномерно по координатам на отрезке $[t_0, \tau_1]$. Обозначим эту последовательность $\{\overset{(n_1)}{x}\}$.

Рассмотрим теперь отрезок $(\tau_1, \tau_2]$ и последовательность $\{\overset{(n_1)}{x}\}$ на нем. Рассуждая аналогично, из нее выделим подпоследовательность $\{\overset{(n_2)}{x}\}$, сходящуюся на этом отрезке равномерно по координатам. Этот процесс продолжим неограниченно. Используя тот же процесс диагонализации, получаем последовательность $\{\overset{(s)}{x}\}$, являющуюся подпоследовательностью $\{\overset{(n)}{x}\}$ и сходящуюся равномерно по координатам на каждом из отрезков, указанных в условии леммы 5, к некоторой вектор-функции $z(t)$, причем очевидно, что $z(t) \in \mathfrak{M}$ при любом $t \in T$.

Остается доказать, что $z(t) \equiv x(t, x^0, t_0)$, $t \in T$. Зафиксируем произвольное значение $t \in T$ и обозначим сегмент, содержащий t_0 и $t[t_0, b] = T_2$. Очевидно

$$dx_i^{(s)}(t)/dt = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}^{(s)}(t)\, x_k^{(s)}(t), \quad t \neq \tau_j; \qquad \Delta x_i^{(s)}|_{t=\tau_j} = \sum_{t_0<\tau_j<t} \sum_{k=1}^{s} b_{ik}^{(s)} x_k^{(s)}(\tau_j - 0).$$

Заменяя $a_{ik}^{(s)}(t)\, x_k^{(s)}(t)$ при $k > s$ нулями, получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{s} a_{ik}^{(s)}(t)\, x_k^{(s)}(t) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}^{(s)}(t)|\, \|x^{(s)}(t)\| \leqslant K^0 \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant K^0 \sum_{k=1}^{\infty} \max_{T} |a_{ik}(t)| \leqslant K^0 \|A(t)\|_0 = K^0 \Psi_{[t_0, b]},$$

которая дает возможность воспользоваться леммой 1 из [7], ибо последовательность $a_{ik}^{(s)}(t)\, x_k^{(s)}(t)$ сходится равномерно по $t \in T_2$ к $a_{ik}(t)\, z_k(t)$. Действительно, $|a_{ik}(t)\, z_k(t) - a_{ik}^{(s)}(t)\, x_k^{(s)}(t)| \leqslant |a_{ik}(t)|\, |z_k(t) - x_k^{(s)}(t)| \leqslant \|A(t)\|_0 \times$ $\times |z_k(t) - x_k^{(s)}(t)|$, а $x_k^{(s)} \to z_k(t)$ равномерно по $t \in T_2$. Тогда

$$\lim_{s\to\infty} \frac{dx_i^{(s)}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}_i(t)\right) = \frac{dz_i(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(t)\, z_k(t)$$

при $t \neq \tau_j$, $t \in T_2$. И, наконец, справедливо равенство

$$\lim_{s\to\infty} \Delta x_i^{(s)} = \sum_{t_0<\tau_j<t} \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{(s)} x_k^{(s)}(\tau_j - 0) = \sum_{t_0<\tau_j<t} \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} z_k(\tau_j - 0),$$

которое заканчивает доказательство леммы, ибо $z(t)$ — решение уравнения (6) и $z(t_0) = x^0$, а значит, $z(t) \equiv x(t, x^0, t_0)$ при всех $t \in T_2$, в том числе и при зафиксированном нами значении t.

Обозначим матрицу, приводящую уравнение (7) к виду

$$dy^{(n)}/dt = \overset{(n)}{P}\, \overset{(n)}{y}, \tag{8}$$

через $L^{(n)}$.

В определении приводимости уравнения (6) к виду (5) откажемся от условия, что приводящая матрица должна быть матрицей Ляпунова, а потребуем лишь ее обратимости на отрезке T. В таком случае условия теоремы Еругина достаточны для приводимости уравнения (6) к виду (5), но не необходимы.

З а м е ч а н и е 3. Пусть уравнение (6) приводимо к виду (5) с помощью матрицы $\Phi(t)$. Тогда существует такая фундаментальная матрица $X(t)$ уравнения (6), что $X(t) = \Phi(t)\, e^{Pt}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а м е ч а н и я. Пусть $y(t) = y(t, t_0, y^0)$ — решение уравнения (5). Рассмотрим решение $x = x(t, t_0, \Phi(t_0) y^0)$ уравнения (6). Существует такое решение $\tilde{y}(t)$ уравнения (5), что $x(t, t_0, \Phi(t_0) y^0) = \Phi(t)\tilde{y}(t)$. Но при $t = t_0$ $\Phi(t_0) y^0 = \Phi(t_0)\tilde{y}(t_0)$ и в силу обратимости матрицы $\Phi(t)$ $y^0 = \tilde{y}(t_0)$. Отсюда следует, что $\tilde{y}(t) = y(t)$ тождественно на T. Это означает, что для любого решения $y(t)$ уравнения (5) $\Phi(t)\, y(t)$ — решение уравнения (6). Но любое решение $y(t) = e^{Pt}c$, $c \in \mathfrak{M}$. Учитывая, что $(\Phi(t)\, e^{Pt})\, c = \Phi(t)(e^{Pt}c)$, получаем, что любое решение $x(t) = (\Phi(t)\, e^{Pt})c = X(t)\, c$, т. е. $X(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (6).

Т е о р е м а 3. *Если последовательности матриц* $\{L^{(n)}(t)\}$, *приводящих укороченные уравнения* (7) *к виду* (8), *а также обратных матриц* $\{\overset{(n)}{L^{-1}}(t)\}$ *равномерно правильные на каждом из отрезков* $[t_0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \ldots$, *причем последовательность* $\{\overset{(n)}{P}\}$ — *правильная, то уравнение* (6) *приводимо к виду* (5), *причем* $P = \lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$, $L(t) = \lim\limits_{n\to\infty} L^{(n)}$ *в слабом смысле, где* $L(t)$ — *приводящая матрица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим сначала, что определения правильных и равномерно правильных матричных последовательностей введены в работе [7].

Доказательство теоремы 3 проводится по аналогии с доказательством теоремы 1 из работы [7]. Отличие состоит в следующем: условие 2 теоремы 1 из [7] заменено более слабым условием 2° настоящей работы. Это приводит к тому, что для каждого решения $x(t)$ уравнения (6) сходящаяся к нему в слабом смысле последовательность $\{\overset{(s)}{x}(t)\}$ решений укороченных уравнений вида (7) своя, откуда следует, что для каждого решения $x(t)$ уравнения (6) существуют свои последовательности $\{\overset{(s)}{L}(t)\}$ и $\{\overset{(s)}{P}(t)\}$, соответствующие последовательности $\{\overset{(s)}{x}(t)\}$, сходящейся к $x(t)$. Но любая подпоследовательность правильной (равномерно правильной) матричной последовательности правильна (равномерно правильна) и слабо сходится к тому же пределу. Это означает, что для любого решения $x(t)$ уравнения (6) приводящая матрица $L(t)$ и матрица P в уравнении (5) одни и те же, а именно такие, как указано в условии теоремы.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев: Вища шк., 1987.— 287 с.
2. *Персидский К. П.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах.— Алма-Ата: Наука, 1976.— 247 с.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 427 с.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т.— М.: Физматгиз, 1962.— Т. 2.— 807 с.
5. *Шварц Л.* Анализ: В 2-х т.— М.: Мир, 1972.— Т. 1.— 824 с.
6. *Шварц Л.* Анализ: В 2-х т.— М.: Мир, 1972.— Т. 2.— 528 с.
7. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* О приводимости дифференциальных уравнений в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 2.— С. 194—201.

Каменец.-Подол. пед. ин-т

Получено 04.09.89