УДК 517.54

В. С. КУДЬЯВИН, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев),
А. Л. ГОЛЬДБЕРГ, ассист.
(Крым. ин-т природоохран. и курорт. строительства, Симферополь)

Средние коэффициенты квазиконформности пары областей

Вводится понятие средних коэффициентов квазиконформности пары ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и предлагается метод их нахождения. В качестве приложения вычислен внешний β-средний коэффициент пары сферических колец и найдено соответствующее этому коэффициенту экстремальное отображение.

Введено поняття середніх коефіцієнтів квазіконформності пари обмежених областей в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, та запропоновано метод їх знаходження. Для ілюстрації обчислено зовнішній β-середній коефіцієнт пари сферичних кілець та знайдено відповідне цьому коефіцієнту екстремальне відображення.

1. Введение. Пусть D и D^* — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, квазиконформно эквивалентные друг другу.

Величины

$$K_I(D, D^*) = \inf_f K_I(f), \quad K_0(D, D^*) = \inf_f K_0(f), \quad K_e(D, D^*) = \inf_f K_l(f),$$

где точная нижняя грань берется над классом всевозможных квазиконформных отображений $f: D \to D^*$ ($K_I(f)$, $K_0(f)$, $K_l(f)$), отклонения гомеоморфизма f, (см., например, [1, 2]) называются соответственно внутренним, внешним и линейным коэффициентами квазиконформности пары областей D и D^*. Отображения, минимизирующие отклонения, называются экстремальными для $K_I(D, D^*)$, $K_0(D, D^*)$, $K_l(D, D^*)$.

Сложной проблемой теории пространственных квазиконформных отображений является проблема нахождения коэффициентов квазиконформности и соответствующих экстремальных отображений. Внутренний и внешний коэффициенты квазиконформности пары областей и метод их нахождения (метод модулей семейств кривых) введены Герингом и Вяйсяля [2, 3].

Линейный коэффициент квазиконформности и метод его нахождения (метод вращения плоского экстремального отображения) предложен в работах [4, 5] А. В. Сычевым и В. С. Кудьявиным.

В настоящей статье мы вводим понятие средних коэффициентов квазиконформности пары областей D и D^* и предлагаем метод (метод p-модулей семейств кривых) их вычисления. В качестве иллюстрации предложенного метода мы вычисляем один из средних коэффициентов пары областей, когда D и D^* являются сферическими кольцами, т. е. представляют собой прямое произведение открытого интервала и сферы.

2. Средние коэффициенты квазиконформности. Сначала рассмотрим понятие p-модуля семейств кривых. Пусть Γ — семейство жордановых кривых в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Тогда для каждого p, $1 \leqslant p \leqslant n$,

определим p-модуль семейства Γ следующим образом:

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\,dx,$$

где точная нижняя грань берется по всем неотрицательным, борелевским функциям ρ, для которых $\int\limits_{\gamma} \rho d\gamma \geqslant 1$, для любой кривой $\gamma \in \Gamma$. (Подробности см., например, в [1].)

Далее, пусть D и D^* — ограниченные, квазиконформно эквивалентные области в $\mathbb{R}^n$ и $f: D \to D^*$— гомеоморфизм. Для таких отображений определим средние отклонения $I_\alpha(f)$ и $O_\beta(f)$ $(n-1 < \alpha, \beta < \infty)$:

$$I_\alpha(f) = \left(\frac{1}{mD^*} \sup \frac{M_{\frac{n\alpha}{\alpha+1}}^{\alpha+1}(\Gamma^*)}{M_n^\alpha(\Gamma)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad O_\beta(f) = \left(\frac{1}{mD} \sup \frac{M_{\frac{n\beta}{\beta+1}}^{\beta+1}(\Gamma)}{M_n^\beta(\Gamma^*)}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \tag{1}$$

где точная верхняя грань берется по всем семействам кривых Γ, лежащих в D, для которых $M_{\frac{n\alpha}{\alpha+1}}(\Gamma^*)$, $M_n(\Gamma)$, $M_{\frac{n\beta}{\beta+1}}(\Gamma)$, $M_n(\Gamma)^*$ не обращаются одновременно в нуль или бесконечность $(\Gamma^* = f(\Gamma))$.

Нетрудно показать, что для квазиконформных отображений ограниченных областей величины $I_\alpha(f)$ и $O_\beta(f)$ конечны и больше либо равны единице.

На практике находить средние отклонения по формуле (1), вообще говоря, чрезвычайно трудно. Получим более удобные формулы для нахождения этих величин.

Пусть $f: D \to D^*$ — квазиконформное отображение ограниченных областей D, D^* в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Введем в рассмотрение интегральные характеристики отображения f:

$$H_{I,\alpha}(f) = \left(\frac{1}{mD^*} \int\limits_D H_I^\alpha(x, f) \cdot |J(x, f)|\,dx\right)^{1/\alpha},$$

$$H_{O,\beta}(f) = \left(\frac{1}{mD} \int\limits_D H_0^\beta(x, f)\,dx\right)^{1/\beta}, \tag{2}$$

где $H_I(x, f)$, $H_0(x, f)$ — внутренняя и внешняя характеристики квазиконформности отображения f [1].

Если Γ — семейство кривых, соединяющих граничные компоненты произвольной кольцевой области, лежащей в области D, то из результатов работ [6, 7] следует

$$H_{I,\alpha}(f) = I_\alpha(f), \quad H_{O,\beta}(f) = O_\beta(f).$$

Величины

$$I_\alpha(D, D^*) = \inf_f I_\alpha(f), \quad O_\beta(D, D^*) = \inf_f O_\beta(f)$$

назовем соответственно внутренним α-средним и внешним β-средним коэффициентами квазиконформности пары квазиконформно эквивалентных областей D и D^*. (Здесь точная нижняя грань берется над классом всевозможных квазиконформных отображений $f: D \to D^*$). Отображения, минимизирующие средние отклонения, назовем эк тремальными для соответствующих средних коэффициентов.

Учитывая свойство полунепрерывности снизу средних отклонений, установленное В. И. Кругликовым, и компактность класса квазиконформных отображений (в случае, если D или D^* является шаром) отметим, что в этом случае экстремальные отображения всегда существуют.

Как и в случае коэффициентов $K_I(D, D^*)$, $K_0(D, D^*)$, $K_l(D, D^*)$, задача нахождения средних коэффициентов квазиконформности пары областей довольно затруднительна. Чтобы получить оценки сверху для коэффициентов $I_\alpha(D, D^*)$ и $O_\beta(D, D^*)$, нужно построить подходящее квазиконформное отображение области D на D^* и по формуле (2) подсчитать средние отклонения f.

Намного сложнее получить нетривиальные оценки снизу, так как эти оценки нужно определять для средних отклонений всех квазиконформных отображений области D на D^*. Для нахождения этих оценок надо выяснить как изменяются p-модули некоторых семейств кривых при каждом квазиконформном отображении f и затем применить формулу (1).

3. Экстремальные отображения пары сферических колец. Внутренний и внешний коэффициенты пары сферических колец найдены Герингом и Вяйсяля в работах [2, 3]. Для этой пары областей найдем внешний β-средний коэффициент квазиконформности. Учитывая свойство монотонности среднего отклонения по параметру β [6], как следствие будет получен внешний коэффициент квазиконформности пары сферических колец способом, отличным от способа Вяйсяля [3].

Пусть $D_{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < r_0 < |x| < 1\}$, $D_{\rho_0} = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 < \rho_0 < |y| < 1\}$ — сферические кольца, $0 < \rho_0 \leqslant r_0 < 1$. Вычислим коэффициент $O_\beta (D_{r_0}, D_{\rho_0})$. Пусть Γ — семейство всевозможных кривых в D_{r_0}, соединяющих граничные компоненты D_{r_0}, $\Gamma^* = f(\Gamma)$, где f — произвольное квазиконформное отображение $f: D_{r_0} \to D_{\rho_0}$. Тогда по формуле (1) для $n - 1 < \beta \leqslant n$

$$O_\beta (D_{r_0}, D_{\rho_0}) \geqslant \left(\frac{1}{|\omega_{n-1}| (1 - r_0^n)} \frac{M^{\beta+1}_{\frac{n\beta}{\beta+1}} (\Gamma)}{M_n^\beta (\Gamma^*)} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \qquad (3)$$

Применяя формулы для $M_{\frac{n\beta}{\beta+1}} (\Gamma)$ и $M_n (\Gamma^*)$ (см., например, [6]), из (3) получаем

$$O_\beta (D_{r_0}, D_{\rho_0}) \geqslant \frac{\left(\ln \frac{1}{\rho_0} \right)^{n-1}}{(1 - r_0^n)^{\frac{1}{\beta}}} \left(\frac{r_0^{-\frac{n}{n\beta - \beta - 1}} - 1}{\frac{n}{n\beta - \beta - 1}} \right)^{\frac{n\beta - \beta - 1}{\beta}} = M_\beta.$$

Далее, нам необходимо построить квазиконформное отображение $y: D_{r_0} \to D_{\rho_0}$ таким образом, чтобы $H_{O,\beta} = M_\beta$.

Для этого рассмотрим две сферические системы координат в пространствах прообраза и образа соответственно (r, φ_i) и (ρ, ψ_i), $i = \overline{1, n-1}$. Тогда отображение

$$g_\beta (x) = \left\{ \rho = \rho_0^{\frac{r^{-\frac{n}{n\beta-\beta-1}} - 1}{r_0^{-\frac{n}{n\beta-\beta-1}} - 1}}, \quad \psi_i = \varphi_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad r_0 < r < 1 \right\}$$

есть квазиконформное отображение сферического кольца D_{r_0} на сферическое кольцо D_{ρ_0}.

Полуоси характеристического эллипсоида при этом относятся как

$$\frac{d\rho}{dr}; \quad \frac{\rho}{r} \frac{d\psi_1}{d\varphi_1}, \ldots; \frac{\rho}{r} \frac{\sin \psi_i}{\sin \varphi_i} \frac{d\psi_i}{d\varphi_i} \qquad (i = \overline{2, n-1}).$$

Тогда при условии

$$\rho_0 \leqslant \exp \left[\frac{\beta + 1 - n\beta}{n} \left(r_0^{-\frac{n}{n\beta - \beta - 1}} - 1 \right) \right],$$

непосредственным подсчетом по формуле (2) получаем $H_{O,\beta} (g_\beta) = M_\beta$. Таким образом, отображение $g_\beta (x): D_{r_0} \to D_{\rho_0}$ экстремально для коэффициента $O_\beta (D_{r_0}, D_{\rho_0})$ и $O_\beta (D_{r_0}, D_{\rho_0}) = M_\beta$.

Замечание. Пусть $O_\infty (D_{r_0}, D_{\rho_0}) = \lim\limits_{\beta \to \infty} O_\beta (D_{r_0}, D_{\rho_0})$. Непосредственным подсчетом получаем

$$O_\infty(D_{r_0}, D_{\rho_0}) = \left(\frac{\ln\rho_0}{\ln r_0}\right)^{n-1} = K_O(D_{r_0}, D_{\rho_0}),$$

т. е. $O_\infty(D_{r_0}, D_{\rho_0})$ в точности равен внешнему коэффициенту квазиконформности, найденному в [3]. При этом экстремальное отображение $g_\beta(x)$ переходит в экстремальное отображение $g(x)$ из работы [3]

$$g_\infty(x) = g(x) = \{\rho = r^{\frac{\ln\frac{1}{\rho_0}}{\ln\frac{1}{r_0}}},\ \psi_i = \varphi_i,\ i = \overline{1, n-1}\}.$$

Очевидно, все изложенное выше верно и для случая $n = 2$. Отметим, что в случае $n = 2$ аналогичная задача решалась в [8] вариационным методом П. П. Белинского. При этом экстремальным являлось обратное отображение.

1. *Сычев А. В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения.— Новосибирск : Наука, 1983.— 152 с.
2. *Gehring F. W., Vaisala J.* The coefficients of quasiconformality of domains in space // Acta Math.— 1965.— **114**.— P. 1—70.
3. *Vaisala J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math.— 1971.— **229**.— 144 p.
4. *Сычев А. В.* Линейные коэффициенты квазиконформности пары областей // Докл. АН СССР.— 1978.— **239**, № 3.— С. 542—545.
5. *Кудьявин В. С.* Последовательное вращение плоских квазиконформных отображений в $\mathbb{R}^n$ // Динамика сплошной среды.— 1979.— **22**.— С. 110—115.
6. *Кругликов В. И.* Отображения, квазиконформные в среднем // Докл. АН СССР.— 1985. — **283**, № 6.— С. 1309—1311.
7. *Ziemer W. P.* Extremal length as a capacity // Michigan Math. J.— 1970.— **17**, N 2.— P. 117—128.
8. *Билута П. А.* Некоторые экстремальные задачи в классе отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР.— 1964,— **155**, № 3,— С. 503—505.

Получено 11.12.90