УДК 515.174

С. Е. САМОХВАЛОВ, канд. физ.-мат. наук (Днепродзерж. индустр. ин-т)

О задании связностей в расслоениях действием бесконечных групп Ли

Для главного расслоения $P = X \times V$ с произвольной связностью, база X которого диффеоморфна групповому многообразию некоторой группы Ли, строится бесконечная группа Ли Γ^H, действие которой задает на P его геометрическую структуру. Структурное уравнение пространства P является необходимым условием существования группы Γ^H, задающей данную связность в P.

Для головного розшарування $P = X \times V$ з довільною зв'язністю, база X якого дифеоморфна груповій многостатності деякої групи Лі, будується нескінченна група Лі Γ^H, дія якої задає на P його геометричну структуру. Структурне рівняння простору P є необхідною умовою існування групи Γ^H, яка задає дану зв'язність в P.

Калибровочные поля внутренней симметрии V являются связностями в расслоениях над пространством-временем со структурной группой V [1]. Включение калибровочного взаимодействия производится заменой в лагранжиане материи производных ∂_x ковариантными производными $\partial_x - A = \nabla$, интерпретируемыми как инфинитезимальные горизонтальные трансляции в расслоении со связностью. С другой стороны, в главном расслоении P задано левое действие группы V, которое инфинитезимально определяется правоинвариантными вертикальными векторными полями X_V. Эти преобразования главного расслоения объединяются в бесконечную группу Ли Γ^H, описанную в настоящей работе для случая тривиального главного расслоения $P = X \times V$ с базой X, диффеоморфной групповому многообразию некоторой группы Ли T.

Группы Γ^H играют важную роль в физике [2]. В настоящей работе они рассматриваются с геометрической точки зрения. Группы Γ^H строятся здесь как абстрактные группы заданием закона умножения в их групповых пространствах с помощью центрального в работе понятия деформации пространства P и имеют среди своих генераторов действия на P ковариантные производные ∇ и правоинвариантные вертикальные векторные поля X_V. Генераторы групп Γ^H коммутируют не с помощью структурных констант, как в случае групп Ли, а с помощью структурных функций, как в квазигруппе [3], хотя закон умножения в Γ^H ассоциативен. Группы Γ^H в своих генераторах содержат всю информацию о геометрической структуре пространства P, структурное уравнение оказывается необходимым условием существования группы Γ^H, задающей своим действием данную структуру на P. Этим для расслоенных пространств P со связностью реализуется эрлангенская программа Клейна [4], расширенная следующим образом: построить группу Γ^H преобразований пространства P, действие которой задает на P его геометрическую структуру, хотя Γ^H может и не иметь инвариантов на P.

1. Элементы группы Ли $G = T \times V$ записываем в виде пар $g = (t, v)$, $t \in T$, $v \in V$. Группа Ли T диффеоморфна базе X тривиального расслоения $P = X \times V$, точки которого записываем в виде пар $u = (x, v')$, $x \in X$, $v' \in V$, проекция $\pi(u) = x$. Группа Ли V действует свободно на P справа: $uv = R_v u := (x, v' \cdot v)$. Точкой обозначаем умножение в группах Ли V, T и G.

Группа T просто транзитивно действует на X слева: $t : x \to L_t x$, что определяет левое просто транзитивное действие группы G на P: $g : u \to L_g u := (L_t x, v^{-1} \cdot v')$. С этим действием группы G связано касательное отображение $\xi(u) := \partial_g (L_g u)|_{g=e}$, где e — единица группы G, и инфинитезимальное отображение $X(u) := \xi(u) \cdot \partial_u$ (некоторые термины и обозначения, относящиеся к группам Ли, заимствованы из [5]).

Структурный оператор C группы G определяется соотношением

$$C := (\partial^2_{g_1, g_2} - \partial^2_{g_2, g_1})(g_1 \cdot g_2)\big|_{g_1 = g_2 = e}.$$

Алгебра Ли группы G распадается в прямую сумму $L = L_T \oplus L_V$ алгебр Ли групп T и V соответственно.

Фундаментальное векторное поле $X_R(u)\langle v \rangle$ индуцируется элементом $v \in L_V$ при правом действии R_v группы V на P.

2. Пусть $C_\infty(P, G) = \{g(u)\}$ — пространство гладких отображений P в G, наделенное топологией равномерной сходимости и B — его подпространство, выделяемое условиями

1B) $g(uv) = g(u) \ \forall v \in V, \ u \in P$;

2B) $\det\{\partial_u (L_{g(u)} u)\} \neq 0 \ \forall u \in P$.

По условию 1 B элементы B фактически зависят лишь от $x = \pi(u)$, поэтому для них $g(u) = g(x)$.

Определение 1. *Топологическую группу, заданную на B операцией умножения* $\times$:

$$(g_1 \times g_2)(u) := g_1(u) \cdot g_2(u'), \tag{1}$$

$$u' = L_{g_1(u)} u \tag{2}$$

назовем группой недеформированного пространства P или недеформированной группой и обозначим Γ.

Формула (2) определяет транзитивное действие группы Γ на P. Оно отличается от действия L_g группы Ли G лишь тем, что его параметризуют элементы, зависящие от u.

Пусть $g_i(x) = (t_i(x), v_i(x))$, $i = 1, 2$. Тогда из формулы (1) следует

$$(g_1 \times g_2)(x) = (t_1(x) \cdot t_2(x'), \quad v_1(x) \cdot v_2(x')),$$

$$x' = L_{t_1(x)} x. \tag{3}$$

Эти формулы показывают, что множество элементов $(e_T, v(x)) \in \Gamma$, где e_T — единица группы T, образуют калибровочную группу $V^g = \Pi_{x \in X} V$.

Формула (3) определяет транзитивное, но неэффективное действие группы Γ на X с ядром неэффективности V^g, причем $\Gamma = \mathrm{Diff}\, X \otimes V^g$. Группа Γ является группой aut P автоморфизмов расслоения P.

3. Рассмотрим множество $\tilde{G}$ отображений $H : P \times G \to G$, действующих по формуле $\tilde{g} = H_u(g)$ и обладающих свойствами

1H) $H \in C_\infty(P \times G)$;

2H) $H_u(e) = e \ \forall u \in P$;

3H) отображения $H_u : G \to G$ обратимы для всех $u \in P$, т. е. существуют отображения $H_u^{-1} : G \to G$ такие, что $H_u(H_u^{-1}(\tilde{g})) = \tilde{g} \ \forall \tilde{g} \in G, \ u \in P$;

4H) $H_u(g') = g' \ \forall g' = (e_T, v) \in G$;

5H) $H_{uv} = H_u \ \forall v \in V, \ u \in P$.

Отображения H^{-1}, описываемые свойством 3 Н, обладают свойствами 1 Н—5 Н, что непосредственно проверяется. Свойство 5 Н приводит к тому, что H_u и H_u^{-1} фактически зависят лишь от $x = \pi(u)$, поэтому везде, где понадобится, можно писать H_x и H_x^{-1}.

Введем вспомогательные отображения $A(u): L \to L$, $A(u) := \partial_g H_u(g)|_{g=e}$. Очевидно, $A(u)^{-1} = \partial_g H_u^{-1}(g)|_{g=e}$.

Пусть p — какое-нибудь обратимое линейное отображение $L = L_T \oplus L_V$ на L' и $q = p^{-1}$. Через p_T обозначим отображение L в L', определяемое соотношениями

$$p_T\langle t\rangle = p\langle t\rangle, \quad p_T\langle v\rangle = 0 \quad \forall t \in L_T, \quad v \in L_V.$$

Отображение $q^T : L' \to L$ определяем так: $q^T\langle l'\rangle = \mathrm{pr}_T q\langle l'\rangle$ $\forall l' \in L'$, pr_T — однозначно определенная в L каноническая проекция на L_T. Аналогично задаются отображения p_V и q^V, I — единичный оператор в L.

В силу свойств 1 Н—5 Н отображения $A(u)$ обладают свойствами:

1A) $A(u) \in C_\infty(P)$;

2A) $\operatorname{rank} A(u) = \dim L$ $\forall u \in P$;

3A) $A(u)_V^V = I_V^V$, $A(u)_V^T = 0$;

4A) $A(uv) = A(u)$ $\forall v \in V$, $u \in P$.

Таким образом,

$$A(u) = \begin{bmatrix} A(u)_T^T & 0 \\ & \\ A(u)_T^V & I_V^V \end{bmatrix}.$$

Отображение $A(u)$ можно представить в виде композиции $A(u) = A_X(u) \circ A_S(u)$ отображений

$$A_X(u) = \begin{bmatrix} A(u)_T^T & 0 \\ & \\ 0 & I_V^V \end{bmatrix}, \quad A_S(u) = \begin{bmatrix} I_T^T & 0 \\ & \\ A(u)_T^V & I_V^V \end{bmatrix}.$$

В множестве D отображений $H : P \times G \to G$, обладающих свойствами 1Н — 5Н, естественно вводится операция умножения $*$: произвольным $H^1, H^2 \in D$ сопоставляется отображение $H^3 = H^1 * H^2$, действующее по формуле $H_u^3(g) = H_u^1(H_u^2(g))$ $\forall g \in G$, $u \in P$. Множество D замкнуто относительно операции $*$, которая обладает всеми свойствами операции группового умножения. В частности, обратным к H в смысле умножения $*$ является отображение H^{-1}, определенное в свойстве 3 Н. Таким образом, множество D с операцией умножения $*$ образует группу. Подмножества D_X и D_S отображений H из D, для которых вспомогательными отображениями являются отображения $A_X(u)$ и $A_S(u)$ соответственно, замкнуты относительно умножения и поэтому являются подгруппами группы D.

Определение 2. *Группу D отображений $H : P \times G \to G$, обладающих свойствами 1 Н—5 Н, с законом умножения $*$ называем группой деформаций пространства P, элементы H группы D — деформациями пространства P. Подгруппы D_X и D_S группы деформаций D называем группой неэффективных деформаций и группой деформаций связности пространства P соответственно.*

4. Определение 3. *Топологические группы Γ^H, заданные в $C_\infty(P, G)$ изоморфизмами группе Γ недеформированного пространства P при помощи деформаций $H \in D$ согласно формуле*

$$g^H(u) = H_u(g(u)), \tag{4}$$

будем называть группами деформированного пространства P или деформированными группами.

Умножение $\times^H$ в группе Γ^H определяется соотношениями

$$(g_1^H \times^H g_2^H)(u) = H_u(H_u^{-1}(g_1^H(u)) \cdot H_{u'}^{-1}(g_2^H(u'))), \tag{5}$$

$$u' = L^{H}_{g_1^H(u)} := L_{H_u^{-1}(g_1^H(u))} u. \qquad (6)$$

Действие группы Γ^H на P определяется формулой (6).

Группа деформаций D действует на множестве $D\Gamma$ деформированных групп Γ^H просто транзитивно: любую группу $\Gamma^{H'}$ можно получить из заданной Γ^H единственной деформацией $H' * H^{-1}$.

5. Введем для групп Γ^H, по аналогии с группами Ли, касательное отображение

$$\xi^H(u) := \partial_g (L_g^H u)|_{g=e},$$

где $g \in G$, инфинитезимальное отображение $X^H(u) = \xi^H(u) \cdot \partial_u$, структурный оператор

$$C^H(u) := (\partial^2_{q_1, q_2} - \partial^2_{q_2, q_1}) (g_1^H \times {}^H g_2^H)(u)|_{q_1 = q_2 = e},$$

$$g_1^H(u) = q_1, \quad g_2^H(u) = q_2 \text{ и } q_1, q_2 \in G.$$

Т е о р е м а 1. *Инфинитезимальное отображение $X^H(u)$ и структурный оператор $C^H(u)$ группы Γ^H удовлетворяют уравнению*

$$[X^H(u)\langle l \rangle, \quad X^H(u)\langle h \rangle] = C^H(u)\langle l, h \rangle \cdot X^H(u)$$

при всех $l, h \in L$.

Из (4) — (6) следует

$$X^H(u) = A(u)^{-1} \cdot X(u),$$

$$C^H(u)\langle l, h \rangle = A(u)\langle C\langle A(u)^{-1}\langle l \rangle, A(u)^{-1}\langle h \rangle\rangle + \partial_u A(u)^{-1}\langle \xi(u)\langle A(u)^{-1}\langle l \rangle\rangle, h\rangle - \partial_u A(u)^{-1}\langle \xi(u)\langle A(u)^{-1}\langle h \rangle\rangle, l\rangle.$$

6. Группы Γ^H, действуя на многообразии P, сравнивают все касательные к P пространства T_u друг с другом своими инфинитезимальными отображениями пространства L на каждое из них:

$$X^H(u): L \to T_u$$

и поэтому естественным образом задают на P геометрические структуры. Из свойств деформаций следует

$$X^H(u)_T = A(u)^{-1T}_{T} \cdot (X(u)_T - A(u)^V_T \cdot X(u)_V), \quad X^H(u)_V = X(u)_V.$$

Т е о р е м а 2. *Действуя на тривиальном расслоении $P = X \times V$ по формуле (6), группа Γ^H задает в нем связность S^H с помощью своего инфинитезимального отображения $X^H(u)$, производящего разложение каждого касательного к P пространства T_u в прямую сумму $T\tau_u + T\nu_u$ вертикального и горизонтального подпространств*:

$$T\nu_u = \{X^H(u)\langle v \rangle, v \in L_V\}, \quad T\tau_u = \{X^H(u)\langle t \rangle, t \in L_T\}.$$

Произвольную связность в расслоении P можно задать таким образом: для произвольной связности S в расслоении P существует группа $\Gamma^H \in D\Gamma$, задающая связность S в P.

Деформации из D_X связности не изменяют, группы Γ^{H_1} и Γ^{H_2} задают в P одну и ту же связность, если деформации H_1 и H_2 принадлежат к одному правому смежному классу группы D по подгруппе D_X. Каждый такой класс имеет элемент из D_S. Все элементы группы D_S, принадлежащие к одному смежному классу, имеют одинаковые вспомогательные функции деформации $A_S(u)$. Это объясняет термин «деформация» и названия групп Γ^H, D, D_X и D_S.

7. Пусть отображение $\varepsilon(u)$ определяется равенством $X_R(u)_0\, \varepsilon(u) = X(u)_V$, а L-значная форма $\theta(u)$ — равенством $\theta(u)\langle X(u)\rangle = I$. Тог-

да форма $\omega^H(u)$ связности S^H, задаваемой в P группой Γ^H, определяется равенством

$$\omega^H(u) := \varepsilon(u)\bigcirc(\theta(u)^V + A(u)^V_T\bigcirc\theta(u)^T).$$

Теорема 3. *Структурное уравнение для формы $\omega^H(u)$ связности S^H*

$$d\omega^H(u) = -\frac{1}{2}C^V_{VV}\langle\omega^H(u)\wedge\omega^H(u)\rangle + \Omega(u),$$

где $\Omega(u)$ — форма кривизны для $\omega^H(u)$:

$$\Omega(u) = -\frac{1}{2}\varepsilon(u)\bigcirc C^H(u)^V_{TT}\langle A(u)^T_T\langle\theta(u)^T\rangle\wedge A(u)^T_T\langle\theta(u)^T\rangle\rangle,$$

является необходимым условием существования группы Γ^H деформированного пространства P, задающей связность S^H в P.

Связность в ассоциированных расслоениях задается действием в них представлений группы Γ^H, так как группа содержит в себе всю информацию о связности (см. [2], где строится полевое представление группы Γ^H).

Устранение принятых в данной работе глобально-топологических ограничений — тривиальности расслоения и диффеомерфности его базы некоторой группе Ли, по-видимому, возможно путем рассмотрения псевдогрупп Ли [6].

1. *Даниэль М., Виалле С. М.* Геометрический подход к калибровочным теориям типа Янга — Миллса // Успехи физ. наук.— 1982.— **136**.— С. 377—420.
2. *Самохвалов С. Е.* Теоретико-групповое описание калибровочных полей // Теорет. и мат. физика.— 1988.— **76**.— С. 66—77.
3. *Batalin I. A.* Quasigroup construction anb first class constraints // J. Math. Phys.— 1981.— 22.— P. 1837.— 1856.
4. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа») // Об основаниях геометрии.— М. : Гостехтеоретиздат, 1956.— С. 399— 434.
5. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
6. *Singer I., Sternberg S.* The infinite group of Lie and Cartan // J. Anal Math.— 1965.— **15**.— P. 1—114.

Получено 12,01,91