УДК 517.4

Ю. Н. БЕСПАЛОВ, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О самосопряженных представлениях алгебр Склянина

Изучаются самосопряженные представления в гильбертовом пространстве семейства квадратичных алгебр, построенных Е. К. Скляниным. Для алгебр, соответствующих точкам второго порядка эллиптических кривых, получены полные наборы классов унитарной эквивалентности неприводимых представлений.

Вивчаються самоспряжені представлення в гільбертовому просторі сімейства квадратичних алгебр побудованих Є. К. Скляніним. Для алгебр, що відповідають точкам другого порядку еліптичної кривої, одержані повні набори класів унітарної еквівалентності незвідних представлень.

В работах [1, 2] Е. К. Склянин исследовал двухпараметрическое семейство градуированных $*$-алгебр, связанных с эллиптическими R-матрицами: $\Lambda = \mathbb{C}\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(i[S_0, S_\alpha] + J_{\beta\gamma}[S_\beta, S_\gamma]_+,\ i[S_\alpha, S_\beta] + [S_0, S_\gamma]_+)$ (здесь и далее (α, β, γ) пробегает все циклические перестановки $(1, 2, 3)$) с дополнительным ограничением на параметры $J_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$:

$$J_{12} + J_{23} + J_{31} + J_{12}J_{23}J_{31} = 0, \tag{1}$$

с антиинволюцией $S_i^* = S_i$, $i = \overline{0, 3}$. Построены серии примеров представлений.

В этой работе наряду с алгеброй Λ рассматривается алгебра $\widetilde{\Lambda} = \mathbb{C}\langle \widetilde{S}_0, \widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, \widetilde{S}_3\rangle/([\widetilde{S}_0, \widetilde{S}_\alpha] + J_{\beta\gamma}[\widetilde{S}_\beta, \widetilde{S}_\gamma],\ [\widetilde{S}_\alpha, \widetilde{S}_\beta]_+ - [\widetilde{S}_0, \widetilde{S}_\gamma]_+)$ с антиинволюцией $\widetilde{S}_i^* = \widetilde{S}_i$, $i = \overline{0, 3}$. В п. 1 устанавливается соответствие между $*$-представлениями этих алгебр. Показано, что если условие (1) не выполняется, то алгебра $\widetilde{\Lambda}$ не имеет неприводимых представлений размерности больше 2.

В п. 2 описаны множества $\widehat{\Lambda}$ классов унитарной эквивалентности неприводимых $*$-представлений алгебр Λ в случае

$$(1 + J_{12})(1 + J_{23})(1 + J_{31}) = (1 - J_{12})(1 - J_{23})(1 - J_{31}) = 0,$$

т. е. когда $\{J_{12}, J_{23}, J_{31}\} = \{1, -1, J\}$. (Для $J_{\alpha\beta} \neq 0$, записанных в виде

$$J_{12} = (-1)^j \varepsilon\theta_i^2(\eta)\,\theta_j^2(\eta)/\theta_k^2(\eta)\,\theta_l^2(\eta),$$

$$J_{23} = (-1)^k \varepsilon\theta_i^2(\eta)\,\theta_k^2(\eta)/\theta_j^2(\eta)\,\theta_l^2(\eta),$$

$$J_{31} = (-1)^l \varepsilon\theta_i^2(\eta)\,\theta_l^2(\eta)/\theta_j^2(\eta)\,\theta_k^2(\eta),$$

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\},$$

θ_i — функции Якоби, соответствующие решетке L, это означает, что $2\eta \in (1/2)\,L \setminus L$, т. е. рассматриваемые алгебры соответствуют ненулевым точкам второго порядка эллиптических кривых.) В зависимости от циклического порядка $(1, -1, J)$ есть две возможности: либо существуют неприводимые представления сколь угодно большой размерности, в том числе бесконечномерные, либо, как в случае $J_{12} = 1$, $J_{23} = J$, $J_{31} = -1$, размерность неприводимых представлений не выше 4, и при этом представления «общего положения» (для которых совместный спектр S_i^2 четырехточечный) образуют 4-параметрическое семейство.

Таким образом, среди представлений, построенных в [2] для $J_{12} = 1$, $0 < J_{23} < 1$, $J_{31} = -1$ имеются приводимые. Случай $J_{12} = J_{23} = 1$, $J_{31} = -1$ рассматривался в работах [3, 4]. В п. 2 развивается метод, предложенный в [3]. Однако в [3] говорится лишь о 3-параметрическом семействе представлений «общего положения», в [4] представления «общего положения» отсутствуют.

1. Пусть $\rho:\Lambda\to\mathcal{B}(H)$ — представление алгебры Λ ограниченными операторами в гильбертовом пространстве H. Обозначим через $\widetilde{\rho}$ представление алгебры $\widetilde{\Lambda}$ в гильбертовом пространстве $H\otimes\mathbb{C}^2\simeq H\oplus H$, заданное на образующих следующим образом: $\widetilde{\rho}(\widetilde{S}_i)=\rho(S_i)\otimes\sigma_i$, $i=\overline{0,3}$, где $\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$, $\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ — матрицы Паули. Аналогично по представлению $\rho:\widetilde{\Lambda}=\mathcal{B}(H)$ определим представление $\widetilde{\rho}:\Lambda\to\mathcal{B}(H\oplus H):\widetilde{\rho}(S_0)=\rho(\widetilde{S}_0)\otimes\sigma_0$, $\widetilde{\rho}(S_i)=-\rho(\widetilde{S}_i)\otimes\sigma_i$, $i=\overline{1,3}$.

В группе автоморфизмов алгебры Λ (соответственно $\widetilde{\Lambda}$) выделим подгруппу, изоморфную группе Клейна $K=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2: K\ni g\neq e$, действует умножением на -1 на двух из трех образующих S_1, S_2, S_3 (соответственно $\widetilde{S}_1$, $\widetilde{S}_2$, $\widetilde{S}_3$) и тождественно на двух других. Действие группы K продолжается: а) на множества представлений этих алгебр: $g:\rho\mapsto\rho^g$; б) на множества $\widehat{\Lambda}$, $\widehat{\widetilde{\Lambda}}$ классов унитарной эквивалентности неприводимых $*$-представлений (мощность орбиты из $\widehat{\Lambda}/K$ или $\widehat{\widetilde{\Lambda}}/K$ может быть равна 1, 2, 4; размерности всех представлений из одной орбиты равны, поэтому можно говорить о размерности орбиты).

Теорема 1. *Существует биекция $w\subset\Lambda/K\times\widehat{\widetilde{\Lambda}}/K$ между орбитами группы K на множествах $\widehat{\Lambda}$, $\widehat{\widetilde{\Lambda}}$ классов унитарной эквивалентности неприводимых $*$-представлений такая, что если $(x,x')\in w$ и $\rho\in x$ (соответственно $\rho'\in x'$), то $\widetilde{\rho}=\bigoplus_{i=1}^{n}\rho_i$, где $\rho_i\in x'$, $n=2\dim x/\dim x'$ (соответственно $\widetilde{\rho}'=\bigoplus_{i=1}^{n}\rho_i'$, где $\rho_i'\in x$, $n'=2\dim x'/\dim x$). При этом $\dim x/\dim x'$ может принимать значения* 1/2, 1, 2.

Доказательство. Определим отношения $w\subset\widehat{\Lambda}/K\times\widehat{\widetilde{\Lambda}}/K$ и $w'\subset\widehat{\widetilde{\Lambda}}/K\times\widehat{\Lambda}/K$ следующим образом: $(x,x')\in w\overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}\exists\rho\in x$, $\exists\rho'\in x'$ (ρ' — прямое слагаемое $\widetilde{\rho}$); $(x',x)\in w'\overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}\exists\rho'\in x'$, $\exists\rho\in x$ (ρ — прямое слагаемое $\widetilde{\rho}'$). Заметим, что если $\rho\in\widetilde{\Lambda}$ или $\rho\in\widehat{\widetilde{\Lambda}}$, то $\widetilde{\widetilde{\rho}}=\bigoplus_{g\in K}\rho^g$ (так как наборы матриц $(\sigma_0\otimes\sigma_0$, $-\sigma_1\otimes\sigma_1$, $-\sigma_2\otimes\sigma_2$, $\sigma_3\otimes\sigma_3)$ и $(\mathrm{diag}(1,1,1,1)$, $\mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$, $\mathrm{diag}(1,-1,1,-1)$, $\mathrm{diag}(1,-1,-1,1))$ унитарно эквивалентны). Это означает, что w и w' взаимно обратны относительно композиции, т. е. w — биекция, и если $\rho\in\widetilde{\Lambda}$ или $\rho\in\widehat{\widetilde{\Lambda}}$, то $\widetilde{\rho}$ содержит не более четырех неприводимых слагаемых.

Проиллюстрируем этот результат для случая $J_{12}=J_{23}=J_{31}=0$; S_0, $\widetilde{S}_0$ принадлежат центрам соответствующих алгебр. Рассмотрим $\Lambda/(S_0-1)\simeq U(\mathrm{su}(2))$, $\widetilde{\Lambda}/(\widetilde{S}_0-1)\simeq\mathbb{C}\langle S_1,S_2,S_3\rangle/([S_\alpha,S_\beta]_+=S_\gamma)$. Первая алгебра имеет по одному неприводимому представлению каждой размерности. Представлениям нечетной размерности соответствует по одному представлению той же размерности второй алгебры, представлениям четной размерности $2n$ — по 4 представления второй алгебры размерности n.

Элемент $Z=\widetilde{S}_0^2+\widetilde{S}_1^2+\widetilde{S}_2^2+\widetilde{S}_3^2=(-\widetilde{S}_0+\widetilde{S}_1+\widetilde{S}_2+\widetilde{S}_3)^2=(\widetilde{S}_0-\widetilde{S}_1+$

$+ \widetilde{S}_2 + \widetilde{S}_3)^2 = (\widetilde{S}_0 + \widetilde{S}_1 - \widetilde{S}_2 + \widetilde{S}_3)^2 = (\widetilde{S}_0 + \widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2 - \widetilde{S}_3)^2$ принадлежит центру алгебры $\widetilde{\Lambda}$, т. е. при неприводимых представлениях переходит в скалярный оператор. Выбирая новые образующие $R_i = (1/a)\left(\sum_{j=0}^{3} S_j - 2S_i\right)$, $i = \overline{0, 3}$, $a > 0$, имеем $\widetilde{\Lambda}/(Z - a^2) \simeq \mathbb{C}\langle R_0, R_1, R_2, R_3\rangle/(R_i^2 - 1,\ (1 - J_{\beta\gamma}) \times ([R_0, R_\beta] - [R_\alpha, R_\gamma]) + (1 + J_{\beta\gamma})([R_0, R_\gamma] - [R_\alpha, R_\beta]))$. Взяв антикоммутатор некоторого R_k с каждым из трех элементов идеала вида $(1 - J_{\beta\gamma}) \times ([R_0, R_\beta] - [R_\alpha, R_\gamma]) + (1 + J_{\beta\gamma})([R_0, R_\gamma] - [R_\alpha, R_\beta]))$, получим три однородных линейных соотношения между тремя элементами вида $[[R_i, R_j], R_k]_+$, $i < j$; $i, j \neq k$. Определитель матрицы такой системы $\Delta = \pm (J_{12} + J_{23} + J_{31} + J_{12}J_{23}J_{31})$. Т. е. если $\Delta \neq 0$, то для любого $\{i, j, k\} \subset \{0, 1, 2, 3\} : [[R_i, R_j], R_k]_+ = 0$, а тогда, как легко показать, $R_iR_jR_k = R_kR_jR_i$. Группа, заданная образующими и соотношениями $\langle R_i, i = \overline{0, 3} \mid R_i^2 = e,\ i = \overline{0, 3};\ \ R_iR_jR_k = R_kR_jR_i,\ \ \{i, j, k\} \subset \{0, 1, 2, 3\}\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z})^3$ (элемент $\mathbb{Z}_2 \ni g \neq l$ действует на $(\mathbb{Z})^3$ как взятие обратного), имеет лишь одномерные и двумерные неприводимые представления. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $J_{12} + J_{23} + J_{31} + J_{12}J_{23}J_{31} \neq 0$, *то размерности неприводимых* $*$*-представлений алгебры* $\widetilde{\Lambda}$ *не превышают* 2.

2. Изучим неприводимые представления алгебры Λ при условии: $(1 + J_{12})(1 + J_{23})(1 + J_{31}) = (1 - J_{12})(1 - J_{23})(1 - J_{31}) = 0$. С точностью до циклической перестановки индексов 1, 2, 3 это возможно в одном из двух случаев:

А) $J_{12} = 1$, $J_{23} = J$, $J_{31} = -1$. Соотношения удобнее переписать так:

$$iS_0S_1 = ((1 - J)/2)\, S_2S_3 - ((1 + J)/2)\, S_3S_2, \tag{2}$$

$$iS_0S_2 = S_3S_1, \quad iS_0S_3 = -S_2S_1 \tag{3}$$

и им сопряженные. В дальнейшем предполагаем $J \neq 0$;

В) $J_{12} = -1$, $J_{23} = J$, $J_{31} = 1$. Соотношения: (2),

$$iS_0S_2 = -S_1S_3, \quad iS_0S_3 = S_1S_2 \tag{4}$$

и им сопряженные. В дальнейшем предполагаем $J \neq 0, \pm 1$. (При $J = \pm 1$ после циклической перестановки индексов получается алгебра вида А).)

Лемма 1. *В обоих перечисленных случаях* S_i^2, $i = \overline{0, 3}$, *порождают коммутативную подалгебру, а для элементов*

$$X \in V := \mathbb{R}S_0^2 + \mathbb{R}S_1^2 + \mathbb{R}S_2^2 + \mathbb{R}S_3^2 \subset \Lambda$$

выполняются коммутационные соотношения

$$S_iX = s_i(X)\, S_i, \tag{5}$$

где s_i — *некоторые линейные операторы на* V, $s_i^2 = \mathrm{id}$. *Точнее, в случае А) в базисе* S_i^2, $i = \overline{0, 3}$,

$$s_0 = s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = s_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

в частности $S_0^2 + S_1^2$, $S_2^2 + S_3^2$ *центральны; в случае В) элементы*

$$Z_1 = S_0^2 + S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad Z_2 = S_0^2 - S_1^2 + J(S_2^2 - S_3^2)$$

центральны, а на элементах

$$A = S_0^2 + S_1^2 - S_2^2 - S_3^2, \quad B = S_0^2 - S_1^2 - J(S_2^2 - S_3^2)$$

действие следующее:

$$s_0(A) = B, \quad s_1(A) = -B,$$

$$s_2(JA) = B, \quad s_3(JA) = -B.$$

Кроме того,

$$AB = Z_1 Z_2. \tag{6}$$

Доказательство. Соотношения $S_i X = s_i(X) S_i$ легко получаются как линейные комбинации (2)—(4) и их сопряженных, домноженных на некоторое S_i слева или справа, а уже из таких соотношений сразу же вытекает коммутация S_i^2 между собой. Соотношение (6) с учетом коммутации S_i^2 перепишется в виде

$$((1-J)/2)\, S_0^2 S_3^2 + ((1+J)/2)\, S_0^2 S_2^2 = ((1-J)/2)\, S_2^2 S_1^2 + ((1+J)/2)\, S_3^2 S_1^2.$$

Применяя (2), (4) имеем

$$((1-J)/2)\, S_0^2 S_3^2 + ((1+J)/2)\, S_0^2 S_2^2 = -iS_0 S_1 (((1-J)/2)\, S_2 S_3 -$$

$$-((1+J)/2)\, S_3 S_2) = -S_0 S_1 S_0 S_1 = -i(((1-J)/2)\, S_2 S_3 - ((1+J)/2)\, S_3 S_2) \times$$

$$\times S_0 S_1 = ((1-J)/2)\, S_2^2 S_1^2 + ((1+J)/2)\, S_3^2 S_1^2.$$

Замечание. В случае В), если соотношение (2) записать в виде $X = 0$, соотношение

$$Z_1 X = (S_0^2 + S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)(iS_0 S_1 - ((1-J)/2)\, S_2 S_3 + ((1+J)/2 S_3 S_2) = 0$$

является следствием соотношений (4) и (5). Рассмотрим соотношения

$$S_2 S_0^2 S_2 = S_1 S_3^2 S_1, \quad S_3 S_0^2 S_3 = S_1 S_2^2 S_1, \tag{7}$$

$$S_2 S_0^2 S_2 = S_3 S_1^2 S_3, \quad S_3 S_0^2 S_3 = S_2 S_1^2 S_2, \tag{8}$$

которые получаются из соотношений (3) и (4) соответственно, если их правые и левые части умножить на выражения, им сопряженные. В случае А) соотношения (7) являются следствием соотношений (5). В случае В) соотношения (8) являются следствием соотношений (5) и (6).

Операторы s_i порождают некоторую дискретную подгруппу $G < < \mathrm{GL}(V)$. В случае А) $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. В случае В) $G \simeq \langle s_i,\ i = \overline{0,3} \mid s_i^2 = e,$ $s_0 s_1 = s_1 s_0 = s_2 s_3 = s_3 s_2 \rangle \cong \mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$. Действие группы G естественным образом переносится на $V^* : s_i(x)(X) := x(s_i(X))$, $x \in V^*$, $X \in V$. Точку $x \in V^*$ отождествляем с точкой $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, где $x_i := x(S_i^2)$. В случае В) нам понадобятся другие координаты: $z_1 = x(Z_1)$, $z_2 = x(Z_2)$, $a = = x(A)$, $b = x(B)$, которые, чтобы избежать путаницы, будем записывать в угловых скобках:

$$x = \langle z_1, z_2, a, b \rangle : (x_0 = (1/4)(z_1 + z_2 + a + b),$$

$$x_1 = (1/4)(z_1 - z_2 + a - b),$$

$$x_2 = (1/4)(z_2 + J^{-1} z_2 - a - J^{-1} b),$$

$$x_3 = (1/4)(z_1 - J^{-1} z_2 - a + J^{-1} b).$$

Орбита $[x]$ точки $x \in V^*$ имеет вид

$$[x] = \{(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, x_0, x_2, x_3), \quad (x_0, x_1, x_3, x_2), \quad (x_1, x_0, x_3, x_2)\}$$

в случае А);

$$[\langle z_1, z_2, a, b \rangle] = \{\langle z_1, z_2, \varepsilon J^n a, \varepsilon J^{-n} b \rangle,$$

$$\langle z_1, z_2, \varepsilon J^{-n} b, \varepsilon J^n a \rangle \mid n \in \mathbb{Z}, \ \varepsilon = \pm 1\}$$

в случае В).

Из леммы 1, а также из того, что действие G на V^* имеет измеримое сечение K (например, $K = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \mid x_0 \geqslant x_1,\ x_2 \geqslant x_3\}$ в случае А);

$$K = \{\langle z_1, z_2, a, b\rangle | z_1, z_2 \in \mathbb{R}; \quad (a > 0 \,\&\, a \leqslant |b| \leqslant |J|^{\varepsilon} a) \vee (a = 0 \,\&\, 1 \leqslant \leqslant b < |J|^{\varepsilon}) \vee (a = b = 0)\},$$

где $\varepsilon = 1$, если $|J| > 1$; $\varepsilon = -1$, если $0 < |J| < 1$, в случае B)) вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *В случаях A) и B) для всякого неприводимого $*$-представления $\rho : \Lambda \to \mathfrak{B}(H)$ совместный спектр $\rho(S_i^2)$ дискретен и является подмножеством некоторой орбиты α группы G на $V^* \simeq \mathbb{R}^4$. В случае B) точки $\langle z_1, z_2, a, b\rangle$ совместного спектра удовлетворяют дополнительному условию $z_1 z_2 = ab$.*

По орбите $\alpha \subset V^*$ строим граф Γ_α, для каждого $i = \overline{0, 3}$ соединяя ориентированными ребрами $S_{i;x,y}$ пары точек $(x, y) \in \alpha \times \alpha$ такие, что $s_i(x) = y$ (для таких точек $x_i = y_i$). Пусть Λ_α — категория над полем $\mathbb{C}$, порожденная графом Γ_α, с соотношениями: 1) получающимися при всевозможных $x \in \alpha$ из соотношений в алгебре Λ, если в них каждый моном $S_i S_j$ заменить мономом $S_{i;x',x''} S_{j;x,x'}$ где $x' = s_j(x)$, $x'' = s_i(x')$ (заметим, что при этом точка x'' будет одинаковой для всех мономов, входящих в одно соотношение); 2)

$$S_{i;y,x} S_{i;x,y} = x_i I, \tag{9}$$

где $y = s_i(x)$. На Λ_α определим инволюцию $S^*_{i;x,y} = S_{i;y,x}$.

По представлению $\rho : \Lambda \to \mathfrak{B}(H)$ такому, что совместный спектр операторов $\rho(S_i^2)$ лежит на орбите $\alpha \in \mathbb{R}^4$, определим представление ρ_α категории Λ_α:

$$\alpha \ni x \mapsto H_x = \bigcap_{i=0}^{3} \ker(\rho(S_i^2) - x_i I),$$

$$\rho_\alpha(S_{i;x,y}) = P_{H_y} \rho(S_i) P_{H_x}.$$

Обратно по представлению ρ_α категории Λ_α строим представление

$$\rho : \Lambda \to \mathfrak{B}(H), \quad H = \bigoplus_{x \in \alpha} H_x, \quad \rho(S_i) = \sum_{y = s_i(x)} \rho_\alpha(S_{i;x,y}),$$

где $\rho_\alpha(S_{i;x,y})$ рассматриваются как операторы в пространстве H.

Лемма 3. *Описанные выше отображения $\rho \mapsto \rho_\alpha$, $\rho_\alpha \mapsto \rho$ сохраняют отношение унитарной эквивалентности представлений и устанавливают взаимно однозначное соответствие между $\hat{\Lambda}$ и $\bigcup_\alpha \hat{\Lambda}_\alpha$. При этом в случае B) $\hat{\Lambda}_\alpha \neq \varnothing$ лишь для орбит $\alpha \subset \{\langle z_1, z_2, a, b\rangle | z_1 z_2 = ab\}$.*

Модифицируем определения категории Λ_α и графа Γ_α, не изменяя при этом множества представлений. Образующие $S_{i;x,y}$ такие, что $x_i > 0$, заменим на $U_{i;x,y} := (x_i)^{-1/2} S_{i;x,y}$. Соотношения (9) преобразуются при этом в условия унитарности $U_{i;x,y} U^*_{i;x,y} = I$, $U^*_{i;x,y} U_{i;x,y} = I$ (если, кроме того, $x = y$, то $U^*_{i;x,y} = U_{i;x,y}$). В случае $x_i = 0$ соотношения (9) влекут $\rho(S_i; x, y) = 0$ для любого $*$-представления ρ. Удалим все такие ребра в графе Γ_α, а в соотношениях категории Λ_α опустим все мономы, содержащие эти образующие. Граф Γ_α, вообще говоря, распадется на компоненты связности $\Gamma_{\alpha,j}$, $j \in \mathbb{N}$, а категория Λ_α — в объединение соответствующих подкатегорий $\Lambda_{\alpha,j}$, между точками которых нет ненулевых стрелок. При этом $\hat{\Lambda}_\alpha = \bigcup_j \hat{\Lambda}_{\alpha,j}$. Если $\Gamma_{\alpha,j}$ содержит вершину x, у которой некоторая координата $x_i < 0$, то в силу соотношения (9) при всех представлениях соответствующее пространство $H_x = 0$, а из-за связности $\Gamma_{\alpha,j}$ любой вершине соответствует нулевое пространство. Такие компоненты связности будем называть «отрицательными». Соответствующая подкатегория не имеет представлений положительной размерности: $\hat{\Lambda}_{\alpha,j} = \varnothing$. Если у каждой вершины x графа $\Gamma_{\alpha,j}$ все координаты $x_i > 0$ (назовем такую компоненту связности «положительной»), то все образующие $U_{i;x,y}$ категории $\Lambda_{\alpha,j}$ унитарные. Каждое из соотношений (3), (4) эквивалентно двум, выражающим равенство: 1) унитарных; 2) самосопряженных сомножителей в полярных разложениях левой и правой частей. Первые запишутся в виде

$$iU_0U_2 = U_3U_1, \quad iU_0U_3 = -U_3U_1 \tag{10}$$

для соотношений (3) и в виде

$$iU_0U_2 = -U_1U_3, \quad iU_0U_3 = U_1U_2, \tag{11}$$

для соотношений (4). (Мы опускаем индексы, указывающие между какими точками действуют образующие $U_{i;\,x,\,y}$. Все индексы однозначно могут быть восстановлены по одному из них.) Вторые можно переписать в виде (7) и (8) соответственно; в силу замечания после леммы 1 в категориях $\Lambda_{\alpha,j}$ они выполняются автоматически. Точно так же в случае B) можно отбросить соотношения (2), которые являются следствием остальных. И последнее: категория $\Lambda_{\alpha,\,j}$, соответствующая «положительной» компоненте связности $\Gamma_{\alpha,j}$, эквивалентна одноточечной. (Мы можем отождествить все точки, полагая некоторые из унитарных стрелок равными единичным.) Таким образом, описание $\hat{\Lambda}_{\alpha,\,j}$ сведется к унитарной классификации наборов унитарных операторов в одном пространстве, связанных простыми соотношениями.

Введем обозначения

$$R(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad U(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Ниже для случая* A) *перечислены орбиты* $\alpha \subset \mathbb{R}^4_{\geqslant 0}$ *и соответствующие им неприводимые представления алгебры* Λ *(по одному представителю для каждого класса унитарной эквивалентности)*:

1) *Представления «общего положения»*:

$$\alpha = \{(a^2, b^2, c^2, d^2), \quad (a^2, b^2, d^2, c^2), \quad (b^2, a^2, c^2, d^2), \quad (b^2, a^2, d^2, c^2)\},$$

$$a > b \geqslant 0, \quad c > d \geqslant 0;$$

$$S_0 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & be^{i\varphi} \\ 0 & 0 & be^{-i\varphi} & 0 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0 & -be^{i\varphi} & 0 & 0 \\ -be^{-i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & de^{i\psi} \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & de^{-i\psi} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ide^{i\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ic \\ -ide^{-i\psi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ic & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\varphi, \psi \in [0, 2\pi],$$

$$ab\cos\varphi = cd\cos\psi,$$

$$ab\sin\varphi = -Jcd\sin\psi$$

(в случае $b = d = 0$ *при фиксированных* a *и* c *и различных* φ *и* ψ *получаем одно и то же представление)*;

2) $\alpha = \{(a^2, a^2, c^2, d^2), (a^2, a^2, d^2, c^2)\}$, $c > d \geqslant 0$, $a \geqslant 0$:

a)

$$S_0 = a\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 = a\begin{pmatrix} 0 & iU(2\varphi) \\ -iU(-2\varphi) & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} cR(\varphi+\psi) & 0 \\ 0 & dR(-\varphi+\psi) \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} dR(\varphi-\psi) & 0 \\ 0 & -cR(-\varphi-\psi) \end{pmatrix},$$

$0 < \varphi < \pi/2$; $0 < \psi < \pi$; $a, c, d > 0$; $a^2 \cos 2\varphi = -Jcd \cos 2\psi$; $a^2 \sin 2\varphi = cd \sin 2\psi$;

б)

$$S_0 = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2 a\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \varepsilon_1\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & \varepsilon d \end{pmatrix}, \quad S_3 = \varepsilon_2\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -\varepsilon c \end{pmatrix},$$

$-Jcd = \varepsilon a^2 \neq 0$; $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$;

в)

$$a = d = 0; \qquad S_0 = S_1 = S_2 = 0; \qquad S_3 = \pm c \text{ или } S_0 = S_1 = S_3 = 0,$$
$$S_2 = \pm c;$$

3) $\alpha = \{(a^2, b^2, c^2, c^2), \ (b^2, a^2, c^2, c^2)\}$, $a > b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$:

а)

$$S_0 = \begin{pmatrix} aR(\varphi + \psi) & 0 \\ 0 & bR(-\varphi + \psi) \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} bR(\varphi - \psi) & 0 \\ 0 & aR(-\varphi - \psi) \end{pmatrix},$$

$$S_2 = c\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = c\begin{pmatrix} 0 & -iU(2\varphi) \\ iU(-2\varphi) & 0 \end{pmatrix},$$

$a, b, c > 0$; $0 < \varphi < \pi/2$; $0 < \psi < \pi$, $ab \cos 2\varphi = c^2 \cos 2\psi$; $Jab \sin 2\varphi = -c^2 \sin 2\psi$;

б)

$$S_0 = \varepsilon_1\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad S_1 = \varepsilon_2\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad S_2 = c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2 c\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};$$

$ab = c^2 \neq 0$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$;

в)

$$b = c = 0, \quad S_0 = \pm a, \quad S_1 = S_2 = S_3 = 0 \text{ или } S_1 = \pm a,$$
$$S_0 = S_2 = S_3 = 0;$$

4) $\alpha = \{(a^2, a^2, c^2, c^2)\}$; $a, c \geqslant 0$:

а)

$$S_0 = aR(\varphi) \otimes \sigma_0, \quad S_1 = aR(-\varphi) \otimes \sigma_1, \quad S_2 = cR(\psi) \otimes \sigma_2,$$
$$S_3 = cR(-\psi) \otimes \sigma_3; \qquad a, c > 0; \qquad 0 < \varphi < \pi/2; \qquad 0 < \psi < \pi;$$
$$a^2 \cos 2\varphi = c^2 \cos 2\psi; \qquad a^2 \sin 2\varphi = -Jc^2 \sin 2\psi;$$

б)

$$S_i = \varepsilon a \sigma_i, \quad a = c \neq 0;$$
$$S_0 = \varepsilon a \sigma_3, \quad S_1 = \varepsilon a \sigma_1, \quad S_2 = \varepsilon c \sigma_2, \quad S_3 = \varepsilon c \sigma_0, \quad a^2 = Jc^2 \neq 0;$$
$$S_0 = \varepsilon a \sigma_2; \qquad S_1 = \varepsilon a \sigma_1, \quad S_2 = \varepsilon c \sigma_0, \quad S_3 = \varepsilon c \sigma_3, \quad a^2 = -Jc^2 \neq 0,$$

$\varepsilon = \pm 1$;

в) $S_i = 0$.

Теорема 4. *Ниже для случая В) перечислены множества вершин всевозможных «положительных» компонент связности* $\Gamma_{\alpha,j}$ *для орбит* $\alpha \subset \{\langle z_1, z_2, a, b\rangle \mid z_1 z_2 = ab\}$ *и соответствующие неприводимые представления алгебры* Λ:

$$1) \text{ а) } \{\langle z, 0, J^n z, 0\rangle, \quad \langle z, 0, -J_z^{n-1}, 0\rangle, \quad \langle z, 0, 0, J^n z\rangle,$$
$$\langle z, 0, 0, -J^n z\rangle \mid n \in M\}, \quad ((M = \mathbb{N}) \,\&\, (0 < |J| < 1)) \vee ((M = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \,\&\, (|J| > 1)), \quad z > 0;$$

б) $\{\langle z, \varepsilon J^{-n} z, (-1)^m J^{-k} z, (-1)^m \varepsilon J^{-n+k} z\rangle \mid m = 0, 1;\ k \in \mathbb{N},\ m \leqslant k \leqslant n\}$, $\varepsilon = \pm 1$, $(n = 0) \vee ((n \geqslant 1) \,\&\, (|J| > 1)$, $z > 0$;

$$в)\ \{\langle z, -\varepsilon J^n z, (-1)^{m+1} J^k z, (-1)^{m+1} \varepsilon J^{n-k} z\rangle \mid m = 0, 1,\quad k \in \mathbb{N},$$
$$m \leqslant k \leqslant n-1\},\quad \varepsilon = \pm 1,\quad (n = 1) \vee ((n \geqslant 2) \,\&\, (0 < |J| < 1)),\quad z > 0.$$

В каждом из этих случаев соответствующая категория $\Lambda_{\alpha, j}$ эквивалентна одноточечной без образующих и соотношений ($\Lambda_{\alpha, j} \simeq \mathbb{C}$) и имеет одно неприводимое представление с точностью до унитарной эквивалентности. Размерности соответствующих представлений алгебры Λ равны ∞ в случае а), $2n + 1$ в случае б), $2n - 1$ в случае в);

$$2)\ \alpha = \{\langle 4a^2, 0, 0, 0\rangle\},\quad a \geqslant 0:$$

$$а)\ S_0 = a\sigma_3 \otimes R(0),\quad S_1 = a\sigma_1 \otimes R(\pi/2),\quad S_2 = a\sigma_2 \otimes R(\varphi + \pi/2),$$
$$S_3 = a\sigma_0 \otimes R(\varphi),\quad a > 0,\quad 0 < \varphi < \pi/2;$$

$$б)\ S_i = \varepsilon a\sigma_i \text{ или } S_0 = \varepsilon a\sigma_1,\quad S_1 = \varepsilon a\sigma_0,\quad S_2 = \varepsilon a\sigma_2,\quad S_3 = \varepsilon a\sigma_3,$$
$$\varepsilon = \pm 1,\quad a > 0;$$

$$в)\ S_i = 0.$$

1. *Склянин Е. К.* О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера // Функцион. анализ.— 1982.— **16**, вып. 4.— С. 27—34.
2. *Склянин Е. К.* О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера. Представления квантовой алгебры // Там же.— 1983.— **17** вып. 4.— С. 34—48.
3. *Вершик А. М.* Алгебры с квадратичными соотношениями // Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ.— Киев : Ин-т математики АН УССР.— 1984.— С. 32—57.
4. *Кругляк С. А.* Представления квантовой алгебры, связанной с уравнением Янга — Бакстера // Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ.— Киев : Ин-т математики АН УССР.— 1984.— С. 111—120.

Получено 11.01.91