УДК 514.71

Н. П. КОНЕВА, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

Инварианты Дарбу преобразований Лапласа нормальных конгруэнций

В биаксиальном пространстве гиперболического типа в случае, когда преобразования Лапласа нормальной конгруэнции являются нормальными конгруэнциями, доказана теорема: фокальная сеть линий на всех фокальных поверхностях последовательности преобразований Лапласа является сетью R, а точечные и тангенциальные инварианты Дарбу на всех фокальных поверхностях последовательности преобразований Лапласа соответственно равны друг другу.

В біаксіальному просторі гіперболічного типу в випадку, коли перетворення Лапласа нормальної конгруенції є нормальними конгруенціями, доведено теорему: фокальна сітка ліній на всіх фокальних поверхнях послідовності перетворень Лапласа є сіткою R, а точкові та тангенціальні інваріанти Дарбу на всіх фокальних поверхнях послідовності перетворень Лапласа відповідно дорівнюють одне одному.

Биаксиальное пространство — это такое пространство, в котором выделена подгруппа коллинеаций, сохраняющая некоторую линейную конгруэнцию прямых (в зависимости от того, что конгруэнция гиперболического, параболического или эллиптического типа, пространство соответственно гиперболического, параболического или эллиптического типа [1].)

В предложенной работе рассматривается биаксиальное пространство гиперболического типа. Пусть абсолют пространства составляют прямые l_1, l_2. В рассматриваемом случае они действительны и различны. Репер пространства выбирается таким же образом, как и в [1, 2]. Ребра тетраэдра A_1A_3, A_2A_4 принадлежат абсолютной конгруэнции. Вершины A_1, A_3 и A_2, A_4 совместим с точками, гармонически сопряженными относительно пар точек пересечения с директрисами абсолютной конгруэнции l_1, l_2. Пронормируем координаты точек A_3, A_4 так, чтобы точки пересечения ребер тетраэдра P_1, P_2, Q_1, Q_2 с директрисами имели соответственно координаты

$$P_1 = A_1 + A_3, \quad Q_1 = A_2 + A_4,$$
$$P_2 = A_1 - A_3, \quad Q_2 = A_2 - A_4.$$

Дифференциальные проективные перемещения тетраэдра, которые соответствуют переходу от одного луча к другому, определяются следующим образом [3, 4]:

$$dA_i = \omega_i^j A_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

где ω_i^j — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k], \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Уравнения структуры биаксиального пространства гиперболического типа составляют уравнения (1) и уравнения, полученные из условия неподвижности лучей l_1, l_2:

$$\omega_2^3 - \omega_4^1 = 0, \quad \omega_4^4 - \omega_2^2 = 0,$$
$$\omega_1^4 - \omega_3^2 = 0, \quad \omega_2^4 - \omega_4^2 = 0,$$

$$\omega_4^3 - \omega_2^1 = 0, \quad \omega_3^3 - \omega_1^1 = 0,$$

$$\omega_3^4 - \omega_1^2 = 0, \quad \omega_3^1 - \omega_1^3 = 0.$$

Вершины A_1, A_2 подвижного репера поместим в фокусах текущего луча конгруэнции. Тогда уравнения конгруэнции примут вид

$$\omega_1^3 = \alpha\omega_1^4, \quad \omega_2^4 = \gamma\omega_2^3.$$

Фокусы луча конгруэнции совпадают с граничными точками, если $\alpha = \gamma = 0$. Конгруэнции, обладающие таким свойством, названы нормальными [2, 4]. Таким образом, нормальные конгруэнции определяются такими уравнениями:

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^4 = 0. \tag{2}$$

Продолжим дважды эту систему уравнений и раскроем по лемме Картана:

$$\begin{gathered} \omega_2^1 = a\omega_1^4 + b\omega_2^3, \\ -\omega_1^2 = b\omega_1^4 + c\omega_2^3, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} da + 2a(\omega_1^1 - \omega_2^2) = x_1\omega_1^4 + y_1\omega_2^3, \\ db = y_1\omega_1^4 + x_2\omega_2^3, \\ dc + 2c(\omega_2^2 - \omega_1^1) = z_2\omega_2^3 + x_2\omega_1^4. \end{gathered} \tag{4}$$

Переход от одной фокальной сети конгруэнции к другой фокальной сети той же конгруэнции называется преобразованием Лапласа. Решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial u \partial v} + \mu \frac{\partial A_i}{\partial u} + \nu \frac{\partial A_i}{\partial v} + \eta A_i = 0, \tag{5}$$

где μ, ν, η — известные функции переменных u, v, можно интепретировать геометрически как переход от одной фокальной сети конгруэнции к другой ее фокальной сети. Четыре однородных координаты точки A_i, которая описывает сопряженную сеть линии u, v на поверхности, удовлетворяет одному и тому же уравнению Лапласа (5) [3—5]. Выражения

$$h = \frac{\partial \mu}{\partial u} + \mu\nu - \eta, \quad k = \frac{\partial \nu}{\partial v} + \mu\nu - \eta \tag{6}$$

являются инвариантами Дарбу уравнения (5).

Теорема. *Если преобразования Лапласа нормальной конгруэнций — нормальные конгруэнции, то фокальная сеть линий на всех фокальных поверхностях последовательности Лапласа будет сетью R, и точечные инварианты Дарбу на всех фокальных поверхностях последовательности преобразований Лапласа равны друг другу, то же имеет место и для тангенциальных инвариантов Дарбу.*

Доказательство. Пусть точка A_1 описывает фокальную сеть линий на первой фокальной поверхности нормальной конгруэнции. Пусть $\omega_2^3 = 0$ — линия u, а $\omega_1^4 = 0$ — линия v. Тогда положим

$$\begin{gathered} \omega_2^3 = b_2^3 dv, \quad \omega_1^4 = a_1^4 du, \quad \omega_i^j = a_i^j du + b_i^j dv, \\ a_i^j = a_i^j(u, v), \quad b_i^j = b_i^j(u, v), \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \end{gathered} \tag{7}$$

В таком случае, используя (2 — 4), получаем

$$\frac{\partial A_1}{\partial u} = a_1^1 A_1 + a_1^4(-bA_2 + A_4),$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial v} = b_1^1 A_1 - cb_2^3 A_2, \quad \frac{\partial A_2}{\partial v} = bb_2^3 A_1 + b_2^2 A_2 + b_2^3 A_3,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial u} = -ba_1^4A_1 + a_2^2A_2, \quad \frac{\partial A_4}{\partial v} = b_2^3A_1 + bb_2^3A_3 + b_2^2A_4,$$

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial a_1^1}{\partial v} + a_1^1b_1^1 + (1-b^2)\, a_1^4b_2^3\right)A_1 + \left(-b\,\frac{\partial a_1^4}{\partial v} - ca_1^1b_2^3 - ba_1^4b_2^2\right)A_2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial a_1^4}{\partial v} + a_1^4b_2^2\right)A_4 = xA_1 + yA_2 + zA_4,$$

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial v \partial u} = \left(\frac{\partial b_1^1}{\partial u} + b_1^1a_1^1 - acb_2^3a_1^4\right)A_1 + \left(-bb_1^1a_1^4 - ca_2^2b_2^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial c}{\partial u}\, b_2^3 - c\,\frac{\partial b_2^3}{\partial u}\right)A_2 + b_1^1a_1^4A_4 = \bar{x}A_1 + \bar{y}A_2 + \bar{z}A_4,$$

где $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — сокращенные обозначения коэффициентов при A_1, A_2, A_4 соответственно. Из равенства $\frac{\partial^2 A_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial v \partial u}$ следует, что $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $z = \bar{z}$. Тогда

$$\begin{gathered}\frac{\partial a_1^1}{\partial v} - (b^2 - 1)\, a_1^4b_2^3 = \frac{\partial b_1^1}{\partial u} - acb_2^3a_1^4, \\ c\,(a_1^1 - a_2^2)\, b_2^3 - \frac{\partial c}{\partial u}\, b_2^3 - c\,\frac{\partial b_2^3}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial a_1^4}{\partial v} + a_1^4b_2^2 = b_1^1a_1^4.\end{gathered} \tag{8}$$

Для нахождения коэффициентов μ, ν, η в уравнении Лапласа составим следующую систему уравнений:

$$x + \mu a_1^1 + \nu b_1^1 + \eta = 0,$$
$$y - \mu ba_1^4 - \nu cb_2^3 = 0,$$
$$z + \mu a_1^4 = 0.$$

Отсюда находим

$$\begin{gathered}\mu = -\left(\frac{1}{a_1^4}\,\frac{\partial a_1^4}{\partial v} + b_2^2\right), \quad \nu = -a_1^1, \\ \eta = -\frac{\partial a_1^1}{\partial v} - (1 - b^2)\, a_1^4b_2^3 + a_1^1\left(\frac{1}{a_1^4}\,\frac{\partial a_1^4}{\partial v} + b_2^2\right).\end{gathered} \tag{9}$$

Подставляя найденные значения в (6) и используя (8), получаем

$$h = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{a_1^4}\,\frac{\partial a_1^4}{\partial v} + b_2^2\right) + \frac{\partial a_1^1}{\partial v} + (1 - b^2)\, a_1^4b_2^3 = -\frac{\partial b_1^1}{\partial u} +$$

$$+ 2\,(b^2 - 1)\, a_1^4b_2^3 + \frac{\partial b_1^1}{\partial u} - acb_2^3a_1^4 = -acb_2^3a_1^4, \quad k = (1 - b^2)\, a_1^4b_2^3. \tag{10}$$

Тангенциальные координаты плоскостей координатного тетраэдра находятся посредством таких формул:

$$\begin{gathered}a_1 = (A_1A_2A_4), \quad a_2 = (A_2A_1A_3), \\ a_3 = (A_3A_2A_4), \quad a_4 = (A_4A_1A_3).\end{gathered} \tag{11}$$

Тогда получаем

$$da_1 = (\omega_1^1 + 2\omega_2^2)\, a_1 + \omega_2^3a_4 - \omega_2^1a_2,$$

$$da_2 = (2\omega_1^1 + \omega_2^2)\, a_2 + \omega_1^4 a_3 - \omega_1^4 a_1, \tag{12}$$

$$da_3 = (\omega_1^1 + 2\omega_2^2)\, a_3 - \omega_2^1 a_4 + \omega_2^3 a_2,$$

$$da_4 = (2\omega_1^1 + \omega_2^2)\, a_4 - \omega_1^2 a_3 + \omega_1^4 a_1.$$

Уравнение Лапласа в тангенциальных координатах принимает такой вид:

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial u \partial v} = -\bar{\mu}\frac{\partial a_1}{\partial u} - \bar{\nu}\frac{\partial a_1}{\partial v} - \bar{\eta} a_1,$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial u} = (a_1^1 + 2a_2^2)\, a_1 - a a_1^4 a_2,$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial u} = (2a_1^1 + a_2^2)\, a_2 + b a_1^4 a_1 + a_1^4 a_3, \tag{13}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial v} = (b_1^1 + 2b_2^2)\, a_1 - b b_2^3 a_2 + b_2^3 a_4,$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial v} = (2b_1^1 + b_2^2)\, a_2 + c b_2^2 a_1,$$

$$\frac{\partial a_4}{\partial u} = (2a_1^1 + a_2^2)\, a_4 + b a_1^4 a_3 + a_1^4 a_1.$$

Введем такие обозначения:

$$\bar{u} = v, \quad \bar{v} = u, \quad \bar{\omega}_i^j = \bar{a}_i^j d\bar{u} + \bar{b}_i^j d\bar{v}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\bar{\omega}_1^4 = \bar{a}_1^4 d\bar{u}, \quad \bar{\omega}_2^3 = \bar{b}_2^3 d\bar{v}, \quad \bar{a}_1^4 = b_2^3, \quad \bar{b}_2^3 = a_1^4,$$

$$\bar{\omega}_1^1 = \omega_1^1 + 2\omega_2^2 = (a_1^1 + 2a_2^2)\, du + (b_1^1 + 2b_2^2)\, dv = \bar{b}_1^1 d\bar{v} + \bar{a}_1^1 d\bar{u},$$

$$\bar{b}_1^1 = a_1^1 + 2a_2^2, \quad \bar{a}_1^1 = b_1^1 + 2b_2^2, \quad \bar{\omega}_1^2 = -\omega_2^1 = a_2^1 du = b_2^1 dv = \bar{b}_1^2 d\bar{v} + \bar{a}_1^2 d\bar{u},$$

$$\bar{\omega}_1^4 = \omega_2^3 = \bar{a}_1^4 d\bar{u},$$

$$\bar{\omega}_2^1 = -\omega_1^2 = -a_1^2 du - b_1^2 dv = \bar{a}_2^1 d\bar{u} + \bar{b}_2^1 d\bar{v},$$

$$\bar{a}_2^1 = -a_1^2, \quad \bar{b}_2^1 = -b_1^2, \quad \bar{\omega}_2^2 = 2\omega_1^1 + \omega_2^2 = a_2^2 d\bar{u} + b_2^2 d\bar{v},$$

$$\bar{a}_2^2 = 2a_1^1 + a_2^2, \quad \bar{b}_2^2 = 2b_1^1 + b_2^2,$$

$$\bar{\omega}_2^3 = \omega_1^4 = a_1^4 du = b_2^3 dv.$$

В таком случае

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 a_1}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} = \left(\frac{\partial \bar{a}_1^1}{\partial \bar{v}} + \bar{a}_1^1 \bar{b}_1^1 + (1 - b^2)\, \bar{a}_1^4 \bar{b}_2^3\right) a_1 + \left(-b\,\frac{\partial \bar{a}_1^4}{\partial \bar{v}} - c\bar{a}_1^1 \bar{b}_2^3 - \right.$$

$$\left. - b\bar{a}_1^4 \bar{b}_2^2\right) a_2 + \left(\frac{\partial \bar{a}_1^4}{\partial \bar{v}} + \bar{a}_1^4 \bar{b}_2^2\right) a_4,$$

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 a_1}{\partial \bar{v} \partial \bar{u}} = \left(\frac{\partial \bar{b}_1^1}{\partial \bar{v}} + \bar{b}_1^1 \bar{a}_1^1 - ac\bar{b}_2^3 \bar{a}_1^4\right) a_1 + \left(-b\bar{b}_1^1 \bar{a}_1^4 - c\bar{a}_2^2 \bar{b}_2^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial c}{\partial \bar{v}}\, \bar{b}_2^3 - c\,\frac{\partial \bar{b}_2^3}{\partial \bar{u}}\right) a_2 + \bar{b}_1^1 \bar{a}_1^4 a_4.$$

Если обозначить через $r, s, t, \bar{r}, \bar{s}, \bar{t}$ коэффициенты при a_1, a_2, a_4 в $\frac{\partial^2 a_1}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}}$ и $\frac{\partial^2 a_1}{\partial \bar{v} \partial \bar{x}}$, то из равенств $r = \bar{r}$, $s = \bar{s}$, $t = \bar{t}$ получаем такие же равенства, как и (8) с заменой u на $\bar{u}$, v на $\bar{v}$, a_i^j на $\bar{a}_i^j$, b_k^l на $\bar{b}_k^l$. Для нахождения коэффициентов $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\eta}$ в уравнении Лапласа составим систему уравнений

$$r+\bar{\mu}b_1^1+\overline{\nu a_1^1}+\bar{\eta}=0,$$

$$s-a\overline{b_2^3\mu}-b\overline{a_1^4\nu}=0,$$

$$t+\overline{a_1^4\nu}=0.$$

Отсюда следует, что $\bar{\nu}$ переходит в μ, $\bar{\mu}$ в ν, $\bar{\eta}$ в η. Тогда выполняются равенства

$$h=\bar{k},\quad k=\bar{h}, \tag{14}$$

где h, k — тангенциальные инварианты Дарбу уравнения (3). Из равенств (3) следует, что фокальная сеть линий на поверхности, описываемой точкой A_1,— сеть R [4, 5].

Для фокусов преобразований Лапласа нормальной конгруэнции выполняются равенства [2]

$$\begin{aligned} F_n&=p_nA_2+q_nA_4,\\ F'_n&=p_nA_1+q_nA_3, \end{aligned} \tag{15}$$

где p_n, q_n — константы, определяемые равенствами $(n>2)$

$$p_n=\frac{(-1)^n}{2}((b-1)^n+(b+1)^n),\quad q_n=\frac{(-1)^n}{2}((b-1)^n-(b+1)^n).$$

Для $n<-2$

$$p_n=\frac{1}{2}((b+1)^n+(b-1)^n),$$

$$q_n=\frac{1}{2}((b+1)^n-(b-1)^n).$$

Уравнения Лапласа для F_n и F'_n имеют вид

$$\frac{\partial^2F_n}{\partial u\partial v}+\mu_n\frac{\partial F_n}{\partial u}+\nu_n\frac{\partial F_n}{\partial v}+\eta_nF_n=0,$$

$$\frac{\partial^2F'_n}{\partial u\partial v}+\mu'_n\frac{\partial F'_n}{\partial u}+\nu'_n\frac{\partial F'_n}{\partial v}+\eta'_nF'_n=0.$$

Подставляя сюда значения F_n, F'_n, найденые для последовательности преобразований Лапласа нормальной конгруэнции в [2]

$$p_n\left(\frac{\partial^2A_2}{\partial u\partial v}+\mu_n\frac{\partial A_2}{\partial u}+\nu_n\frac{\partial A_2}{\partial v}+\eta_nA_2\right)+q_n\left(\frac{\partial^2A_4}{\partial u\partial v}+\mu_n\frac{\partial A_4}{\partial u}+\right.$$

$$\left.+\nu_n\frac{\partial A_4}{\partial v}+\eta_nA_4\right)+p_n\left(\frac{\partial^2A_1}{\partial u\partial v}+\mu'_n\frac{\partial A_1}{\partial u}+\nu'_n\frac{\partial A_1}{\partial v}+\eta'_nA_1\right)+$$

$$+q_n\left(\frac{\partial^2A_3}{\partial u\partial v}+\mu'_n\frac{\partial A_3}{\partial u}+\nu'_n\frac{\partial A_3}{\partial v}+\eta'_nA_3\right)=0$$

получаем, что для поверхностей, описываемых точками A_2, A_4 (соответственно A_1, A_3) инварианты Дарбу равны.

Найдем инварианты Дарбу для поверхности, описываемой точкой A_2. Линию $\omega_2^3=0$ примем за линию v, $\omega_1^4=0$ линию u. Введем такие обозначения:

$$\omega_2^3=\alpha_2^3du,\quad \omega_1^4=\beta_1^4dv,\quad \omega_i^j=\alpha_i^jdu+\beta_i^jdv.$$

Тогда

$$\frac{\partial A_2}{\partial u} = b\alpha_2^3 A_1 + \alpha_2^2 A_2 + \alpha_2^3 A_3, \quad \frac{\partial A_2}{\partial v} = a\beta_1^4 A_1 + \beta_2^2 A_2,$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial v} = \beta_1^4 A_2 + \beta_1^1 A_3 - b\beta_1^4 A_4,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial v} = \beta_1^1 A_1 - b\beta_1^4 A_2 + \beta_1^4 A_4, \quad \frac{\partial A_1}{\partial u} = \alpha_2^3 A_1 - c\alpha_2^3 A_2,$$

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial u \partial v} = \left(b\frac{\partial \alpha_2^3}{\partial v} + b\alpha_2^3\beta_1^1 + a\alpha_2^3\beta_1^4\right) A_1 + \left(-b\alpha_2^3\beta_1^4 + \frac{\partial \alpha_2^2}{\partial v} + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_2^3\beta_1^4\right) A_2 + \\ + \left(\alpha_2^3\beta_1^1 + \frac{\partial \alpha_2^3}{\partial v}\right) A_3,$$

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial v \partial u} = \left(\frac{\partial}{\partial u}(a\beta_1^4) + a\beta_1^4\alpha_2^3 + b\beta_2^2\alpha_2^3\right) A_1 + \left(-ac\beta_1^4\alpha_2^3 + \frac{\partial \beta_2^2}{\partial u} + \beta_2^2\alpha_2^2\right) A_2 + \\ + \beta_2^2\alpha_2^3 A_3.$$

Сравнивая $\frac{\partial^2 A_2}{\partial u \partial v}$ с $\frac{\partial^2 A_2}{\partial v \partial u}$, получаем такие равенства:

$$\begin{gathered} \alpha_2^3\beta_1^1 + \frac{\partial \alpha_2^3}{\partial v} = \beta_2^2\alpha_2^2, \\ (1 - b^2)\,\alpha_2^3\beta_1^4 + \frac{\partial \alpha_2^2}{\partial v} = -ac\beta_1^4\alpha_2^3 + \frac{\partial \beta_2^2}{\partial u} \\ a\alpha_2^2\beta_1^4 = \frac{\partial}{\partial u}(a\beta_1^4) + \beta_1^4 a\alpha_2^3. \end{gathered} \tag{16}$$

Уравнение Лапласа для поверхности, описываемой точкой A_2, запишем в виде

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial u \partial v} + \mu_2 \frac{\partial A_2}{\partial u} + \nu_2 \frac{\partial A_2}{\partial v} + \eta_2 A_2 = 0.$$

Если обозначить через x_2, y_2, z_2 коэффициенты при A_1, A_2, A_3 в $\frac{\partial^2 A_2}{\partial u \partial v}$, то для определения коэффициентов μ_2, η_2, ν_2 получаем систему уравнений

$$\begin{gathered} x_2 + \mu_2 b\alpha_2^3 + \nu_2 a\beta_1^4 = 0, \\ y_2 + \mu_2\alpha_2^2 + \nu_2\beta_2^2 + \eta_2 = 0, \\ z_2 + \mu_2\alpha_2^3 = 0. \end{gathered}$$

Из этой системы уравнений имеем

$$\nu_2 = -\alpha_2^2, \quad \mu_2 = -\left(\beta_1^1 + \frac{1}{\alpha_2^3}\frac{\partial \alpha_2^3}{\partial v}\right),$$

$$\eta_2 = -(1 - b^2)\,\alpha_2^3\beta_1^4 - \frac{\partial \alpha_2^2}{\partial v} + \alpha_2^2\left(\beta_1^1 + \frac{1}{\alpha_2^3}\frac{\partial \alpha_2^3}{\partial v}\right).$$

Используя равенства (16), получаем

$$k = (1 - b^2)\,\alpha_2^3\beta_1^4, \quad h = -ac\alpha_2^3\beta_1^4.$$

Так как линии $u\,(\omega_2^3 = 0)$ на поверхности, описываемой точкой A_1, соответствует линия $u\,(\omega_1^4 = 0)$ на поверхности, описываемой точкой A_2, и соответственно линия $v(\omega_1^4 = 0)$ на поверхности (A_1) соответствует линии $v(\omega_2^3 = 0)$ на поверхности (A_2), то

$$\beta_1^4 = b_2^3, \quad \alpha_2^3 = a_1^4,$$
$$\alpha_i^j = a_i^j, \quad \beta_i^j = b_i^j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{17}$$

и точечные инварианты Дарбу для поверхностей (A_1), (A_2) равны.

Чтобы найти тангенциальные инварианты Дарбу для поверхности (A_2), введем тангенциальные координаты плоскостей координатного тетраэдра посредством формул

$$\alpha_1 = (A_2A_1A_3) = a_2,$$
$$\alpha_2 = (A_1A_2A_4) = a_1,$$
$$\alpha_3 = (A_4A_1A_3) = a_4,$$
$$\alpha_4 = (A_3A_2A_4) = a_3.$$

Тогда получаем

$$\bar{h} = (1 - b^2)\,\alpha_2^3\beta_1^4, \qquad \bar{k} = -ac\alpha_2^3\beta_1^4.$$

Отсюда следует, что фокальная сеть на поверхности (A_2) будет сетью R. Теорема доказана.

1. *Норден А. П.* Пространство линейной конгруэнции // Мат. сб.— 1949.— Вып. 24.— № 3.— С. 428—455.
2. *Конева Н. П.* Нормальные конгруэнции в биаксиальном пространстве гиперболического типа.— Киев, 1983.— 27 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.49).
3. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана.— М; Л. : ГОНТИ, 1948.— 432 с.
4. *Фиников С. П.* Теория конгруэнций.— М; Л. : ГОНТИ, 1950.— 528 с.
5. *Фиников С. П.* Проективно-дифференциальная геометрия.— М; Л. : ГОНТИ, 1937.— 263 с.

Получено 27.06.91