УДК 519.21

А. А. Дороговцев

Линейные уравнения, содержащие расширенный стохастический интеграл

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, H_0 — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$. Обозначим через ξ обобщенный гауссовский случайный элемент в H_0, имеющий нулевое среднее и единичный корреляционный оператор [1]. В [1] для некоторого класса $\mathcal{D}_0$ случайных элементов в H_0 введено скалярное произведение с обобщенным случайным элементом ξ, которое называется расширенным стохастическим интегралом. В случае, когда H_0 — пространство интегрируемых с квадратом функций, а ξ порожден гауссовской случайной мерой с независимыми значениями на непересекающихся множествах, расширенный стохастический интеграл определен в [2, 3]. В работах [1, 4—6] рассматривались уравнения, содержащие расширенный стохастический интеграл. Ограничения на класс $\mathcal{D}_0$ приводят либо к сильным требованиям на вид уравнения [1, 5, 6], необходимым для существования решения, либо к тому, что решение представляет собой обобщенный случайный процесс [4].

В данной статье исследуется уравнение вида

$$x + \sum_{k=1}^{n} \langle T_k x; \xi \rangle \varphi_k = y. \tag{1}$$

Здесь y — известный случайный элемент в H_0, $\varphi_k \in H_0$, $k = \overline{1, n}$, $T_k \in L(H_0)$, $k = \overline{1, n}$, x — искомый случайный элемент в H_0, а скобки $\langle \cdot, \xi \rangle$ означают расширенный стохастический интеграл. Во всех указанных ранее работах в качестве области определения расширенного стохастического интеграла использовалось множество $\mathcal{D}_0$. Ограничения работ [1, 5, 6] удается снять, распространив действие расширенного стохастического интеграла на более широкую чем $\mathcal{D}_0$ совокупность случайных элементов. Сделать это можно с помощью следующей процедуры локализации, подробно описанной в [7].

Определение. *Множество $A \in \mathcal{F}$ называется гладким открытым множеством, если для некоторой случайной величины α, имеющей стохастическую производную* [1], *и открытого множества $G \subset \mathbb{R}$ выполняется равенство $A = \alpha^{-1}(G)$.*

Гладкие открытые множества обладают следующим свойством. Если x_1, $x_2 \in \mathcal{D}_0$ и совпадают на некотором гладком открытом множестве, то расширенные стохастические интегралы $\langle x_1; \xi \rangle$ и $\langle x_2; \xi \rangle$ также совпадают на этом множестве. Поэтому действие расширенного стохастического интеграла и стохастической производной можно распространить на более широкие, чем в [1], совокупности случайных элементов и величин с помощью замыкания относительно сходимости в среднем квадратическом на расширяющихся последовательностях гладких открытых множеств. Обозначим через $\mathcal{D}$, $\tilde{W}$,

$\widetilde{W}(H_0)$ полученные таким образом область определения расширенного стохастического интеграла и множества стохастически дифференцируемых случайных величин и случайных элементов в H_0.

Пусть пространство H_0 плотно вложено в некоторое вещественное сепарабельное гильбертово пространство H_- со скалярным произведением $(\cdot;\cdot)_-$ нормой $\|\cdot\|_-$ (H_-^* можно тогда считать вложенным в H_0 [8]). Причем вложение является оператором Гильберта—Шмидта. Обобщенный гауссовский случайный элемент ξ при вложении переходит в обычный гауссовский случайный элемент ξ_- в H_-. Поэтому всякую борелевскую функцию f, действующую из H_- в R (в H_0) можно однозначно отождествить со случайной величиной (случайным элементом в H_0) $f(\xi_-)$. Имеют место следующие включения:

$$C^1(H_-) \subset \widetilde{W},\ C^1(H_-,\ H_0) \subset \widetilde{W}(H_0) \subset \mathcal{D}.$$

Кроме того, для $f \in C^1(H_-)$ стохастическая производная $Df(\xi_-) = f'(\xi_-)$, где f' рассматривается как элемент пространства H_0. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть в уравнении* (1) *случайный элемент y таков, что для каждого $k = \overline{1, n}$ случайная величина $\langle T_k y; \xi\rangle$ определена и может быть представлена в виде*

$$\langle T_k y; \xi\rangle = f_k(\xi_-),$$

где $f_k \in C^1(H_-)$, $f_k' \in \mathrm{Lip}_1(H_-)$. Пусть векторы φ_k, $k = \overline{1, n}$, линейно независимы, а операторы T_k, $k = \overline{1, n}$, удовлетворяют условию

$$T_k\varphi_i = 0,\quad k \neq i,$$

$$T_k\varphi_k \in H_-^*,\quad k = \overline{1, n}.$$

Тогда уравнение (1) *имеет решение.*

Доказательство. Из вида уравнения (1) ясно, что случайный элемент x нужно искать в виде $x = y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k$. Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k + \sum_{k=1}^{n} \langle \alpha_k T_k\varphi_k; \xi\rangle \varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \langle T_k y; \xi\rangle \varphi_k.$$

Случайные величины α_k, $k = \overline{1, n}$, можно искать в виде

$$\alpha_k = g_k(\xi_-),\quad g_k \in C^1(H_-),\quad k = \overline{1, n}.$$

Условие на функции g_k, $k = \overline{1, n}$, выглядит так:

$$g_k(\xi_-) + g_k(\xi_-)(T_k\varphi_k; \xi)_0 + (g_k'(\xi_-); T_k\varphi_k)_0 = f_k(\xi_-). \tag{2}$$

При выводе последних равенств использована формула

$$\langle \alpha\psi; \xi\rangle = \alpha(\psi; \xi)_0 + (D\alpha; \psi)_0,\quad \psi \in H_0,\quad \alpha \in \widetilde{W},$$

которая может быть получена с помощью интегрирования по частям и предельного перехода. Уравнение (2) будет выполняться, если функции g_k, $k = \overline{1, n}$, удовлетворяют следующим уравнениям в частных производных:

$$g_k(p) + g_k(p)(\widehat{T_k\varphi_k}; p)_- + (g_k'(p), \widehat{T_k\varphi_k})_- = f_k(p), \tag{3}$$

$p \in H_-$. Здесь $\widehat{T_k\varphi_k}$ — вектор в H_-, соответствующий непрерывному линейному функционалу $T_k\varphi_k \in H_-^*$, $k = \overline{1, n}$. Уравнения (3) имеют решения в классе $C^1(H_-)$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Частным случаем уравнения (1) является следующее интегральное уравнение:

$$x(t) + \varphi(t) \int_0^1 r(s)\, x(s)\, dw(s) = y(t),$$

где $\{w(t);\ t \in [0;\ 1]\}$ — винеровский процесс на $[0;\ 1]$, функции φ и r имеют непрерывные производные на $[0;\ 1]$, а интеграл по dw определяется как расширенный стохастический интеграл.

2. В случае $n = 1$ уравнение (1) рассматривалось в работе [1], где решение получено при сильных ограничениях на оператор T_1, вектор φ_1 и правую часть y.

3. Когда эта статья была готова, автору передали рукопись работы Райнера Букдана, в которой отмечается, что локализацию расширенного стохастического интеграла, несколько отличную от [7], рассматривают Нуаларт и Парду.

1. *Скороход А. В.* Об одном обобщении стохастического интеграла // Теория вероятностей и ее применения.— 1975.— **20**, вып. 2.— С. 223—237.
2. *Далецкий Ю. Л., Парамонова С. Н.* Стохастический интеграл относительно нормально распределенной аддитивной функции множества // Докл. АН СССР.— 1973.— **208**, № 3.— С. 512—515.
3. *Кабанов Ю. М., Скороход А. В.* Расширенные стохастические интегралы // Тр. шк.-сем. по теории случайн. процессов (Друскининкай, 25—30 нояб. 1974 г.).— Вильнюс, 1975.— Ч. 1.— С. 123—167.
4. *Шевляков А. Ю.* Об одном классе стохастических интегральных уравнений // Теория случайн. процессов.— 1979.— Вып. 7.— С. 118—127.
5. *Дороговцев А. А.* О применении гауссовского случайного оператора к случайным элементам // Теория вероятностей и ее применения.— 1986.— **31**, вып. 4.— С. 812—814.
6. *Дороговцев А. А.* Гладкость решений обобщенных линейных стохастических дифференциальных уравнений // Асимптот. задачи теории случайн. процессов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 67—72.
7. *Дороговцев А. А* Расширенный стохастический интеграл для гладких функционалов от белого шума // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 11.— С. 000—0000.
8. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.— М. : Наука, 1983.— 384 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 13.09.88