УДК 519.21

А. Я. Дороговцев

Периодические решения эволюционных дифференциальных уравнений, возмущаемых случайными процессами

В настоящей статье приведены условия существования периодических решений эволюционного уравнения в банаховом пространстве, возмущаемого периодическим случайным процессом. При этом используется следующее определение периодического процесса [1]. Процесс $\{\xi(t) : t \in R\}$ со значениями в банаховом пространстве B называется периодическим с периодом $T > 0$, если

$$\forall n \in \mathbf{N} \ \forall \{t_1, \ldots, t_n\} \subset \mathbf{R} \ \forall \{A_1, \ldots, A_n\} \subset$$

$$\subset \mathscr{B}(B) : P\left\{\bigcap_{k=1}^{n} \{\xi(t_k + T) \in A_k\}\right\} = \mathbf{P}\left\{\bigcap_{k=1}^{n} \{\xi(t_k) \in A_k\}\right\}.$$

Периодический с любым периодом $T > 0$ процесс является стационарным в узком смысле.

Условия существования периодических решений представляют интерес для приложений, они изучались рядом математиков. Подробное описание предшествующих результатов и ссылки содержатся в [2].

Далее $(B, \|\cdot\|)$ — комплексное сепарабельное банахово пространство.

1. Уравнение с ограниченным оператором. Пусть $A \in \mathscr{L}(B)$ — фиксированный оператор, $\mathscr{P}$ — множество всех периодических на $\mathbf{R}$ случайных процессов $\{\xi(t) : t \in \mathbf{R}\}$ в B, с вероятностью 1 имеющих сильно непрерывные траектории на $\mathbf{R}$ и таких, что

$$\int_0^T \mathbf{M}\|\xi(t)\|\,dt < +\infty,$$

где $T > 0$ — период процесса $\{\xi(t) : t \in \mathbf{R}\}$. В этой статье утверждение «случайный процесс удовлетворяет некоторому уравнению» означает, что почти все траектории процесса удовлетворяют этому уравнению.

Теорема 1. *Для того чтобы для любого процесса $\{\xi(t) : t \in R\} \in \mathscr{P}$ уравнение*

$$dx(t)/dt = Ax(t) + \xi(t), \ t \in \mathbf{R} \tag{1}$$

имело единственное периодическое измеримое относительно $\sigma a(\xi(t) : t \in \mathbf{R})$ решение, имеющее с вероятностью 1 сильно непрерывно дифференцируемые траектории, необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора A не пересекался с мнимой осью

Доказательство. Для доказательства необходимости для каждых $x \in B$, $x \neq \bar{0}$ и $\beta \in \mathbf{R}$ можно рассмотреть стационарный процесс

$$\xi(t) = xe^{i\theta}e^{i\beta t}, \ t \in \mathbf{R},$$

где θ — равномерно распределенная на $[0, 2\pi]$ случайная величина, воспользоваться единственностью решения и теоремой Банаха об обратном операторе как и в [3, с. 55]. Достаточность также проводится по плану детерминированного случая [3, с. 56, 57]. При этом периодичность процесса

$$\left\{\int_{\mathbf{R}} G(t-s)\,\xi(s)\,ds : t \in \mathbf{R}\right\},$$

где G — функция Грина [3, с. 53] уравнения (1), $\{\xi(t) : t \in \mathbf{R}\} \in \mathscr{P}$, доказывается с использованием свойств функции G аналогично конечномерному случаю [1]. Интеграл по $\mathbf{R}$ в последней формуле есть интеграл Бохнера относительно меры Лебега, существующий с вероятностью 1 в силу теоремы

Бохнера при рассматриваемых предположениях. Заметим, что процессы ξ и x имеют один период, а также то, что для решения уравнения (1)

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathbf{M}\,\| x(t)\| < +\infty,$$

где $T > 0$ — период процесса x.

Пусть $\mathcal{P}(T)$ — класс всех процессов из $\mathcal{P}$, имеющих период $T > 0$, число T далее фиксировано. Функция Грина G уравнения (1) с оператором A, спектр которого не пересекается с мнимой осью, допускает оценку

$$\| G(t)\| \leqslant \begin{cases} C_1 e^{-\nu_1 t}, & t > 0,\\ C_2 e^{+\nu_2 t}, & t < 0 \end{cases}$$

с некоторыми неотрицательными числами C_1 и C_2 и положительными ν_1 и ν_2. Эти числа ν_1, ν_2, C_1, C_2, соответствующие оператору A, предположим фиксированными.

Теорема 2. *Предположим, что спектр оператора A не пересекается с мнимой осью и функция $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R} \times B \times B,\ B)$ удовлетворяет условиям:*

$$\exists K \geqslant 0\quad \exists L \geqslant 0\quad \forall t \in \mathbf{R}\quad \forall \{u_1, u_2, v\} \subset B : \| f(t, \overline{0}, v)\| \leqslant K(1 + \| v\|);$$
$$\| f(t, u_1, v) - f(t, u_2, v)\| \leqslant L \| u_1 - u_2\|;\ f(t+T, u_1, v) = f(t, u_1, v);$$

здесь $\overline{0}$ — нулевой элемент в B.

Если

$$(C_1/\nu_1 + C_2/\nu_2)\, L < 1,$$

то для каждого процесса $\{\xi(t) : t \in \mathbf{R}\} \in \mathcal{P}(T)$ уравнение

$$dx(t)/dt = Ax(t) + f(t, x(t), \xi(t)),\ t \in \mathbf{R} \tag{2}$$

имеет единственное периодическое с периодом T решение $\{x(t) \{ t \in \mathrm{R}\}$, траектории которого с вероятностью 1 сильно непрерывно дифференцируемы, причем

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathbf{M}\,\| x(t)\| < +\infty.$$

Доказательство. Пусть процесс $\{\xi(t) : t \in \mathbf{R}\} \in \mathcal{P}(T)$ задан. Согласно теореме 1 существует единственное периодическое с периодом T решение $\{x_1(t) : t \in \mathbf{R}\}$ уравнения

$$dx_1(t)/dt = Ax_1(t) + f(t, \overline{0}, \xi(t)),\ t \in \mathbf{R},$$

задаваемое формулой

$$x_1(t) = \int_{\mathbf{R}} G(t-s) f(s, \overline{0}, \xi(s))\, ds,\ t \in \mathbf{R}.$$

Аналогично, при $n \geqslant 2$ процесс $\{x_n(t) : t \in \mathbf{R}\}$ в B определяется как единственное периодическое с периодом T решение уравнения

$$dx_n(t)/dt = Ax_n(t) + f(t, x_{n-1}(t), \xi(t)),\ t \in \mathbf{R},$$

задаваемое формулой

$$x_n(t) = \int_{\mathbf{R}} G(t-s) f(s, x_{n-1}(s), \xi(s))\, ds,\ t \in \mathbf{R}.$$

При этом для каждого $n \geqslant 1$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathbf{M}\,\| x_n(t)\| < +\infty$$

и траектории процесса $\{x_n(t) : t \in \mathbf{R}\}$ сильно дифференцируемы с вероятностью 1.

Из условий теоремы 2 имеем оценки

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{M}\|x_n(t)\|<+\infty, \tag{3}$$

$$\mathbf{M}\Delta_n(t)\leqslant\left(\frac{C_1}{\nu_1}+\frac{C_2}{\nu_2}\right)L\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{M}\Delta_{n-1}(t),\ t\in\mathbf{R},\ n\geqslant 2,$$

где $\Delta_n(t):=\|x_n(t)-x_{n-1}(t)\|$. При каждом $t\in\mathbf{R}$ пусть $x(t)$ есть B-значный случайный элемент такой, что с вероятностью 1

$$x_n(t)\to x(t),\ n\to\infty. \tag{4}$$

Из первой оценки формулы (3) и теоремы Фату следует, что

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{M}\|x(t)\|<+\infty.$$

Сходимость в (4) есть равномерная на каждом конечном отрезке сходимость с вероятностью 1. Действительно, рассматривая проекционные операторы, отвечающие частям спектра оператора A, расположенным в левой и правой полуплоскостях [3], получаем следующее неравенство, которое для каждого отрезка $[t_0, t_1]$ выполняется с вероятностью 1:

$$\Delta_n(t)\leqslant C_1\Delta_n(t_0)+C_2\Delta_n(t_1)+L\Big(C_1\int_{t_0}^{t}e^{-\nu_1(t-s)}\Delta_{n-1}(s)\,ds+$$

$$+C_2\int_{t}^{t_1}e^{-\nu_2|t-s|}\Delta_{n-1}(s)\,ds\Big),$$

$$t\in[t_0, t_1].$$

Отсюда с вероятностью 1 при $n\geqslant 2$ имеем

$$\sup_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}\Delta_n(t)\leqslant C_1\Delta_n(t_0)+C_2\Delta_n(t_1)+L\left(\frac{C_1}{\nu_1}+\frac{C_2}{\nu_2}\right)\sup_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}\Delta_{n-1}(t).$$

Поэтому процесс $\{x(t): t\in R\}$ периодический с периодом T и сильно непрерывный на $\mathbf{R}$ с вероятностью 1. С использованием свойств G доказывается, что с вероятностью 1

$$x(t)=\int_{\mathbf{R}}G(t-s)f(s, x(s), \xi(s))\,ds,\ t\in\mathbf{R},$$

откуда следует, что процесс $\{x(t): t\in\mathbf{R}\}$ удовлетворяет уравнению 1.

Если $\{z(t): t\in\mathbf{R}\}$ — периодическое с периодом T с вероятностью 1 имеющее сильно непрерывно дифференцируемые траектории решение уравнения (2), причем

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{M}\|z(t)\|<+\infty,$$

то с помощью проекционных операторов сначала устанавливается равенство

$$z(t)=\int_{\mathbf{R}}G(t-s)f(s, z(s), \xi(s))\,ds,\ t\in\mathbf{R},$$

а затем оценка

$$\mathbf{M}\|x(t)-z(t)\|\leqslant L\left(\frac{C_1}{\nu_1}+\frac{C_2}{\nu_2}\right)\sup_{t\in\mathbf{R}}\mathbf{M}\|x(t)-z(t)\|. \tag{5}$$

Поэтому $\mathbf{M}\|x(t)-z(t)\|=0,\ t\in\mathbf{R}$.

Замечания. Теорема 2 справедлива и в том случае, когда спектр оператора A расположен в одной из полуплоскостей. Например, если спектр оператора A лежит левее мнимой оси, то можно положить $\nu_2=+\infty$ и $C_2/\nu_2=0$. В этом случае при условиях теоремы 1 периодическое решение $\{x(t): t\in\mathbf{R}\}$ устойчиво на $+\infty$ в том смысле, что для любых $t_0\in\mathbf{R}$, $x_0\in B$

решение $\{z(t) : t \geqslant t_0\}$ задачи Коши для уравнения (2) с начальным значением x_0 в момент t_0 удовлетворяет с вероятностью 1 при $t > t_0$ неравенству

$$\| z(t) - x(t) \| \leqslant L \| x_0 - x(t_0) \| \exp((C_1 L - \nu_1)(t - t_0)),$$

которое получается элементарно с помощью неравенства Гронуолла. Если спектр оператора A расположен как в левой, так и в правой полуплоскостях, то периодическое решение не устойчиво, по этому поводу см. [3]. Теоремы 1 и 2 верны и для строго стационарных процессов в B при условии, что функция f из теоремы 2 не зависит от t.

2. Уравнение с неограниченным оператором. Пусть $-A$ — секториальный оператор (т. е. A — генератор аналитической полугруппы ограниченных операторов в B, обозначаемой далее e^{At}, $t \geqslant 0$) с множеством определения $\mathscr{D}(A)$ [4]. При этом $\mathscr{D}(A)$ плотно в B, а оператор A замкнут. Пусть $\mathscr{P}_1$ — множество всех периодических на $\mathbf{R}$ случайных процессов $\{\xi(t) : t \in \mathbf{R}\}$ в B, с вероятностью 1 имеющих сильно непрерывные траектории на $\mathbf{R}$ и таких, что для некоторых чисел $C \geqslant 0$ и $\alpha > 0$

$$\int_0^T \mathbf{M} \| \xi(t) \| dt < +\infty; \quad \mathbf{M} \| \xi(s) - \xi(t) \| \leqslant C |s - t|^{\alpha}, \ \{s, t\} \subset \mathbf{R}.$$

Здесь $T > 0$ — период процесса $\{\xi(t) : t \in \mathbf{R}\}$.

Теорема 3. *Пусть A — генератор полугруппы с множеством определения $\mathscr{D}(A)$ и спектром, не пересекающимся с мнимой осью. Для любого процесса $\{\xi(t) : t \in \mathbf{R}\} \in \mathscr{P}_1$ уравнение* (1) *имеет единственное периодическое с периодом T решение $\{x(t) : t \in \mathrm{R}\}$ со значениями в $\mathscr{D}(A)$ и такое, что*

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} M \| x(t) \| < +\infty.$$

Доказательство. Для оператора A существует число $a \in \mathrm{R}$ такое, что спектр $\sigma(A)$ оператора лежит внутри сектора

$$\left\{ \lambda \in \mathbf{C} \mid \frac{\pi}{2} + \varphi < \arg(\lambda - a) < \frac{3\pi}{2} - \varphi \right\}$$

с некоторым $\varphi \in (0, \pi/2)$. Поскольку спектр $\sigma(A)$ не пересекается с мнимой осью, то он состоит из двух частей $\sigma(A) = \sigma_-(A) \cup \sigma_+(A)$, при этом замкнутые множества $\sigma_-(A)$ и $\sigma_+(A)$ лежат соответственно в левой и правой полуплоскостях $\mathbf{C}$. Множество $\sigma_+(A)$ ограничено. Положим

$$P_+ := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (A - \lambda E)^{-1} d\lambda, \ P_- := E - P_+,$$

где Γ — контур, лежащий в правой полуплоскости и охватывающий множество $\sigma_+(A)$. Тогда $P_+ \in \mathscr{L}(B)$, $P_+^2 = P_+$ и подпространство $B_+ := P_+ B$ является инвариантным подпространством для оператора A, причем спектр A в B_+ есть $\sigma_+(A)$. Положим $A_+ := P_+ A$ и $A_- := (E - P_+) A$. Уравнение (1) равносильно следующей системе:

$$dx_+(t)/dt = A_+ x_+(t) + \xi_+(t), \ t \in \mathbf{R}; \tag{6}$$

$$dx_-(t)/dt = A_- x_-(t) + \xi_-(t), \ t \in \mathbf{R}, \tag{7}$$

где $x_+(\cdot) := P_+ x(\cdot)$, $\xi_+(\cdot) := P_+ \xi(\cdot)$, $x_-(\cdot) := (E - P_+) x(\cdot)$, $\xi_-(\cdot) := (E - P_+) \xi(\cdot)$. При этом уравнения (6) и (7) есть уравнения в пространствах B_+ и $B_- := (E - P_+) B$ соответственно. Если $\sigma_+(A) = \varnothing$, то уравнение (6) отсутствует. Если $\sigma_+(A) \neq \varnothing$, то уравнение (6) относится к ситуации описанной в теореме 1 и его единственное периодическое решение существует. В уравнении (7) оператор A_- имеет спектр $\sigma_-(A)$, причем $\rho(\sigma_-(A), j) > 0$, где j — мнимая ось, а ρ — евклидово расстояние. Оператор $-A_-$ также является секториальным с некоторыми значениями $\varphi_- \in (0, \pi/2)$ и $a_- > 0$ и множеством определения $P_- \mathscr{D}(A)$. Оператор A_- есть генератор полугруппы $e^{A_- t}$, $t \geqslant 0$, причем существует число $C_- \geqslant 0$

такое, что

$$\| e^{A_- t} P_- \| \leqslant C_- e^{-a_- t},\ t \geqslant 0. \tag{8}$$

Далее числа a, C_- и a_- фиксированы. Для доказательства существования единственного решения уравнения (7) проверим, что функция

$$x_-(t) := \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A_-(t-s)} \xi_-(s)\, ds,\ t \in \mathbf{R} \tag{9}$$

есть требуемое решение. Интеграл Бохнера в (9) сходится с вероятностью 1 в силу условия (8) и условий теоремы 3. Пусть $t_0 \in \mathrm{R}$ фиксировано. Согласно [4, с. 58] функция

$$F(t;\, t_0) := \int\limits_{t_0}^{t} e^{A_-(t-s)} \xi_-(s)\, ds,\ t > t_0$$

с вероятностью 1 сильно непрерывно дифференцируема на $(t_0, +\infty)$, и при $t > t_0$

$$F(t;\, t_0) \in P_- \mathcal{D}(A),\ dF(t;\, t_0)/dt = A_- F(t;\, t_0) + \xi_-(t). \tag{10}$$

Кроме того,

$$\| F(t;\, t_0) - x_-(t) \| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{t_0} e^{-a_-(t-s)} \| \xi_-(s) \|\, ds \to 0$$

при $t_0 \to -\infty$ равномерно с вероятностью 1 на любом конечном отрезке. Поскольку при каждом $t > t_0$ с вероятностью 1

$$A_- F(t;\, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} A_- e^{A_-(t-s)} (\xi_-(s) - \xi_-(t))\, ds + (E - e^{A_-(t-t_0)})\, \xi_-(t)$$

и

$$\| A_- e^{A_- t} P_- \| \leqslant C_- t^{-1} e^{-a_- t},\ t > 0,$$

то с вероятностью 1 при каждом $t \in \mathbf{R}$

$$A_- F(t;\, t_0) \to \int\limits_{-\infty}^{t} A_- e^{A_-(t-s)} (\xi_-(s) - \xi_-(t))\, ds + \xi_-(t),\ t \to -\infty.$$

В силу замкнутости оператора A_- имеем с вероятностью 1

$$x_-(t) \in \mathcal{D}(A_-);$$

$$A_- x_-(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} A_- e^{A_-(t-s)} (\xi_-(s) - \xi_-(t))\, ds + \xi_-(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Кроме того,

$$\| A_- F(t;\, t_0) - A_- x_-(t) \| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{t_0} C_- (t-s)^{-1} e^{-a_-(t-s)} \| \xi_-(s) - \xi_-(t) \|\, ds \to 0$$

при $t_0 \to -\infty$ с вероятностью 1 равномерно по t на каждом конечном отрезке. Таким образом, из (10) следует, что функция x_- непрерывно дифференцируема с вероятностью 1 на $\mathbf{R}$ и с вероятностью 1

$$dx_-(t)/dt = A_- x_-(t) + \xi_-(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Теорема 3 доказана.

Для $T > 0$ пусть $\mathcal{P}_1(T)$ — класс всех процессов из $\mathcal{P}_1$, имеющих период T. Пусть также $a_+ := \rho(\sigma(A_+), j)$ и C_+ таково, что

$$\| e^{-A_+ t} P_+ \| \leqslant C_+ e^{-a_+ t}, \quad t \geqslant 0.$$

Числа T, a_+ и C_+ фиксированы.

Теорема 4. *Предположим, что спектр оператора A не пересекается с мнимой осью, а функция $f: \mathbf{R} \times B \times B \to B$ удовлетворяет условиям:*

$$\exists L_1 \geqslant 0 \ \exists L_2 \geqslant 0 \ \exists \theta > 0 \quad \forall \{s, t\} \subset \mathbf{R}$$

$$\forall \{u_1, u_2, v_1, v_2\} \subset B: f(t+T, u_1, v_1) = f(t. u_1, v_1);$$

$$\| f(s, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2) \| \leqslant L_1 (| s - t |^\theta + \| u_1 - u_2 \| + \| v_1 - v_2 \|).$$

Если

$$L_1 (C_-/a_- + C_+/a_+) < 1,$$

то для любого процесса $\{\xi(t): t \in \mathbf{R}\} \in \mathcal{P}_1(T)$ уравнение

$$dx(t)/dt = Ax(t) + f(t, x(t), \xi(t)), \ t \in \mathbf{R}$$

имеет единственное периодическое с периодом T решение $\{x(t): t \in \mathbf{R}\}$, траектории которого с вероятностью 1 сильно непрерывно дифференциерумы, причем

$$\mathbf{P}\{x(t) \in \mathcal{D}(A)\} = 1, \ t \in \mathbf{R}; \ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathbf{M} \| x(t) \| < +\infty.$$

Доказательство. Пусть процесс $\{\xi(t): t \in \mathbf{R}\} \in \mathcal{P}_1(T)$ фиксирован. Согласно теореме 3 существует единственное периодическое с периодом T решение $\{x_1(t): t \in \mathbf{R}\}$ уравнения

$$dx_1(t)/dt = Ax_1(t) + f(t, \overline{0}, \xi(t)), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Это решение удовлетворяет утверждению теоремы 3, в частности, $x_1(t) \in \mathcal{D}(A)$ с вероятностью 1 при каждом $t \in \mathbf{R}$. Воспользуемся обозначениями, введенными при доказательстве достаточности теоремы 3. Решение $\{x_1(t): t \in \mathbf{R}\}$ можно представить в виде

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A_-(t-s)} P_- f(s, \overline{0}, \xi(s))\, ds - \int_{t}^{+\infty} e^{A_+(t-s)} P_+ f(s, \overline{0}, \xi(s))\, ds,$$

$$t \in \mathbf{R},$$

причем

$$Ax_1(t) = \int_{-\infty}^{t} A_- e^{A_-(t-s)} (P_- f(s, \overline{0}, \xi(s)) - P_-(t, \overline{0}, \xi(t)))\, ds +$$

$$+ P_- f(t, \overline{0}, \xi(t)) - \int_{t}^{+\infty} A_+ e^{A_+(t-s)} P_+ f(s, \overline{0}, \xi(s))\, ds,$$

$$t \in \mathbf{R}.$$

При ограничениях теоремы 4 все интегралы в последних двух равенствах существуют с вероятностью 1 как интегралы Бохнера. Аналогично, при $n \geqslant 2$ процесс $\{x_n(t): t \in \mathbf{R}\}$ определяется как единственное периодическое с периодом T решение уравнения

$$dx_n(t)/dt = Ax_n(t) + f(t, x_{n-1}(t), \xi(t)), \ t \in \mathbf{R}.$$

При этом с вероятностью 1 $x_n(t) \in \mathcal{D}(A)$, $t \in \mathbf{R}$ и

$$x_n(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A_-(t-s)} P_- f(s, x_{n-1}(s), \xi(s))\, ds -$$

$$- \int_{t}^{+\infty} e^{A_+(t-s)} P_+ f(s, x_{n-1}(s), \xi(s))\, ds;$$

(11)

$$Ax_n(t) = \int_{-\infty}^{t} A_- e^{A_-(t-s)} (P_- f(s, x_{n-1}(s), \xi(s) - P_- f(t, x_{n-1}(t), \xi(t)))\, ds +$$

$$+ P_-f(t, x_{n-1}(t), \xi(t)) - \int_t^{+\infty} A_+e^{A_+(t-s)}P_+f(s, x_{n-1}(s), \xi(s))\,ds, \; t\in\mathbf{R}.$$

Из первой формулы (11) следует, что

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{M}\,\|x_n(t)\| < +\infty.$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 2 доказывается существование B-значного периодического с периодом T процесса $\{x(t) : t\in\mathbf{R}\}$, с вероятностью 1 удовлетворяющего равенству

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A_-(t-s)}P_-f(s, x(s), \xi(s))\,ds -$$

$$- \int_t^{+\infty} e^{A_+(t-s)}P_+f(s, x(s), \xi(s))\,ds, \; t\in\mathbf{R}, \tag{12}$$

причем $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{M}\,\|x(t)\| < +\infty$. При условиях теоремы 4 в правой части второй формулы из (11) с помощью теоремы Лебега о мажорируемой сходимости можно перейти к пределу при $n\to\infty$. Поэтому с вероятностью 1 по норме в B при каждом $t\in\mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n(t) = \int_{-\infty}^{t} A_-e^{A_-(t-s)}(P_-f(s, x(s), \xi(s)) - P_-f(t, x(t), \xi(t)))\,ds +$$

$$+ P_-f(t, x(t), \xi(t)) - \int_t^{+\infty} A_+e^{A_+(t-s)}P_+f(s, x(s), \xi(s))\,ds.$$

В силу замкнутости оператора A с вероятностью 1 при каждом $t\in\mathbf{R}$

$$x(t)\in\mathcal{D}(A) \text{ и } Ax(t) = \lim_{n\to\infty} Ax_n(t). \tag{13}$$

Равенство в (13) позволяет заключить, как и в теореме 3, что

$$dx(t)/dt = Ax(t) + f(t, x(t), \xi(t)), \; t\in\mathbf{R} \tag{14}$$

с вероятностью 1.

Пусть $\{z(t) : t\in\mathbf{R}\}$ — какое-либо периодическое с периодом T решение уравнения (14) с $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{M}\,\|z(t)\| < +\infty$. Тогда

$$\mathbf{M}\,\|P_+(x(t) - z(t))\| \leqslant \frac{C_+}{a_+}L_1\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{M}\,\|x(t) - z(t)\|,$$

$$\mathbf{M}\,\|P_-(x(t) - z(t))\| \leqslant \frac{C_-}{a_-}L_1\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{M}\,\|x(t) - z(t)\|.$$

Поэтому $x(t) = z(t)$ с вероятностью 1 при каждом $t\in\mathbf{R}$. Теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е. Теоремы 3 и 4 при условии, что функция f не зависит от t, справедливы для строго стационарных процессов.

1. *Дороговцев А. Я.* Некоторые замечания о дифференциальных уравнениях, возмущаемых периодическими случайными процессами // Укр. мат. журн.— 1962.— 14, № 2.— С. 119—128.
2. *Дороговцев А. Я.* Существование периодических решений абстрактного стохастического уравнения. Асимптотическая периодичность задачи Коши // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1988.— Вып. 39.— С. 47—52.
3. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1964.— 186 с.
4. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.— М. : Мир, 1985.— 376 с.

Киев. ун-т

Получено 08.07.88