УДК 517.948

Т. В. Гиря

О стабилизации решений нелинейных стохастических параболических уравнений

В настоящей работе изучается предельное поведение распределений, отвечающих решениям стохастических уравнений вида

$$\dot{u}(t, x) - \Delta u(t, x) + f(u(t, x)) = \dot{w}(t, x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

В случае локального нарушения монотонности f в детерминированном уравнении ($w \equiv 0$) возникает несколько стационарных точек. Обеспечивает ли наличие белого шума в правой части (1) единственность стационарного распределения? Если да, то как связаны произвольные статистические решения со стационарным? Решению этих задач и посвящена данная работа. Поведение решений детерминированных уравнений при больших временах изучалось в работах [1, 2]. Стохастическое уравнение в случае выполнения тех или иных свойств монотонности рассматривалось в работах [3—6].

1. Уравнение (1) рассматривается в ограниченной области Ω с регулярной границей. Функция f удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} f \in C(\mathbb{R}),\ |f(u)| \leqslant A(1 + |u|^{p-1}),\ p > 2, \\ u f(u) \geqslant B|u|^p - D,\ B > 0,\ [f(u) - f(v)](u - v) \geqslant -d|u - v|^2. \end{gathered} \tag{2}$$

Корреляционный оператор $Q: H \equiv L^2(\Omega) \to H$ винеровского процесса w предполагается ядерным

$$\mathrm{sp}_H Q < \infty. \tag{3}$$

Уравнение (1) с начальным условием $u(0) = v \in H$ имеет единственное сильное решение с траекториями из пространства $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\ L^p(\Omega)) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\ \overset{0}{H}{}^1(\Omega))$ и конечным вторым моментом

$$M|u(t)|^2_H < c_v. \tag{4}$$

Через μ^t_v обозначим вероятностную борелевскую на H меру, являющуюся распределением решения $u_v(t)$ уравнения (1) с начальным условием v. Методом осреднения Боголюбова доказывается [6] существование стационарного решения с конечным вторым моментом (4). Отвечающую этому решению меру обозначим $\overline{\mu}$.

Теорема 1. *Пусть дополнительно к (2)—(4) выполнено условие Q) существуют константы λ, $\gamma > 0$, $\overline{m} \in \mathbb{N}$ такие, что*

$$|\nabla z|^2_H + \lambda(QP_{\overline{m}} z, z) \geqslant (d + \gamma)|z|^2_H \quad \forall z \in \overset{0}{H}{}^1, \tag{5}$$

где $P_{\overline{m}}$ — ортопроектор на первые $\overline{m}$ собственных функций оператора Δ, d — константа из (2), $(\,,\,)$ — соотношение двойственности в H. Тогда меры μ^t_v слабо на $H^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, сходятся к единственному инвариантному распределению $\overline{\mu}$ с конечным вторым моментом (4).

Отметим, что условие Q) выполнено в случае невырожденного оператора Q. Условие Q) может быть заменено несколько более сильным: $|\nabla z|^2_H + \lambda(Qz, z) \geqslant (d + \gamma)|z|^2_H\ \forall z \in \overset{0}{H}{}^1$. По существу условие Q) состоит в требовании невырожденности Q на подпространстве низкочастотных собственных функций оператора Δ.

2. В силу конечности вторых моментов (4) система мер $\{\mu^t_v\}_{t>0}$ слабо компактна на $H^{-\alpha}$. Поэтому для их слабой сходимости достаточно доказать сходимость их характеристических функционалов, или, что эквивалентно, сходимость

$$g_t(v) \equiv \int_H g(u)\,\mu^t_v(du) \xrightarrow{t\to\infty} \overline{g} \equiv \int_H g(u)\,\overline{\mu}(du)$$

для произвольной функции $g \in C_b(H^{-\alpha})$, удовлетворяющей условию Липшица $|g(u) - g(v)| \leqslant K_g|u - v|_H$.

Введем обозначения

$$R^t_N = \sup_{|v|_H \leqslant N} g_t(v),\ r^t_N = \inf_{|v|_H \leqslant N} g_t(v),\ \delta^t_N = R^t_N - r^t_N. \tag{6}$$

Лемма 1. *Для каждого* $N>0$ $\lim\limits_{t\to\infty}\delta_N^t=0$.

Для доказательства леммы 1 рассмотрим галеркинские аппроксимации уравнения (1):

$$\dot{u}_m-\Delta u_m+P_mf(u_m)=P_m\dot{w},\ u_m(0)=v\in P_mH. \qquad (7)$$

Через $\mu_{v,m}^t$ обозначим распределения решений уравнения (7) в момент времени t. Тогда в силу единственности сильного решения уравнения (1) $\mu_{P_mv,m}^t\to\mu_v^t$ при $m\to\infty$ на $H^{-\alpha}$. Наряду с (6) соответствующие величины, отвечающие галеркинским мерам $\mu_{v,m}^t$, будем обозначать $g_{t,m}(v)$, $R_{N,m}^t$, $r_{N,m}^t$, $\delta_{N,m}^t$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Для каждого* $N>0$ *равномерно по* m $\lim\limits_{t\to\infty}\delta_{N,m}^t=0$.

Из этой леммы в силу сходимости $g_{t,m}(P_mv)\to g_t(v)$ при $m\to\infty$ следует утверждение леммы 1.

Прежде чем переходить к доказательству леммы 2, покажем, как из леммы 1 следует утверждение теоремы 1. Лемма 1 по существу утверждает, что $g_t(v)$ равномерно на шарах $|v|_H\leqslant N$ сходится к некоторой константе c_g. Поэтому для произвольной инвариантной меры $\bar\mu$

$$\bar g=\int\limits_H g(u)\bar\mu(du)=\int\limits_H g_t(u)\bar\mu(du)=\int\limits_{|u|_H\leqslant N}g_t(u)\bar\mu(du)+\int\limits_{|u|_H>N}g_t(u)\bar\mu(du).$$

Первое слагаемое последнего равенства сходится согласно лемме 1 к $\bar g\bar\mu(|u|_H\leqslant N)$, а второе в силу конечности второго момента меры $\bar\mu$ стремится к 0 при $N\to\infty$.

В свою очередь, лемму 2 выведем из следующей леммы.

Лемма 3. *Существует* $\eta>0$ *такое, что* $\forall\beta,\ t,\ h,\ m>\bar m$

$$\delta_{N,m}^{t+h}\leqslant\varepsilon(\beta,t,h,N)+q_N\delta_{N,m}^h,\ q_N=1-e^{-\eta N^2}, \qquad (8)$$

$$\varlimsup_{t\to\infty}\varepsilon(\beta,t,h,N)\leqslant c_\beta e^{-\beta N^2}. \qquad (9)$$

Выберем $\beta>\eta+1$ Положим $N=k$, $\tau_{k,0}=0$, $\tau_{k,l}=\tau_{k,l-1}+s_{k,l}$, где $\varepsilon(\beta,s_{k,l},\tau_{k,l-1},k)\leqslant 2c_\beta\exp(-\beta N^2)$, $k,l=1,2,\ldots$ В силу (9) такие β, $s_{k,l}$, $\tau_{k,l}$ найдутся. Определим теперь последовательность $t_k=\tau_{k,L_k}$, $L_k=k^2[1+\exp(\eta k^2)]$. Тогда согласно (8), (9)

$$\delta_{k,m}^{t_k}\leqslant 2c_\beta e^{-\beta k^2}+q_k\delta_k^{\tau_{k,L_k-1}}\leqslant 2c_\beta e^{-\beta k^2}(1+q_k+\ldots+q_k^{L_k-1})+$$

$$+q_k^{L_k}\delta_{k,m}^0\leqslant 2c_\beta e^{-\beta k^2}(1-q_k)^{-1}+2e^{-k^2}(c_\beta+c_g)\xrightarrow{k\to\infty}0.$$

Осталось заметить, что из очевидного неравенства $\delta_{N,m}^t\leqslant\delta_{N',m}^t$, $N<N'$ следует $\lim\limits_{t\to\infty}\delta_{N,m}^t=\lim\limits_{k\to\infty}\delta_{k,m}^{t_k}=0$.

3. Доказательство леммы 3. Нам понадобятся экспоненциальные оценки мер $\mu_{v,m}^t$.

Лемма 4. *Для произвольного* $\beta>0$

$$\mathrm{M}e^{\beta|u_m(t)|_H^2}\leqslant c_\beta+e^{\beta|u_m(0)|_H^2-\beta kt},\quad t>0, \qquad (10)$$

где c_β, k *не зависят от* m.

Доказательство. Положим $e(\beta,u)=\exp(\beta|u|_H^2)$. Применив к функционалу $e(\beta,u_m(t\wedge\tau_N))$, где $\tau_N=\inf(t;\ |u_m(t)|_H>N)$ формулу Ито, получим

$$Me(\beta, u_m(t \wedge \tau_N)) + 2\beta M \int_0^{t\wedge\tau_m} e(\beta, u_m(s))\psi(u_m(s))ds = e(\beta, u_m(0)), \quad (11)$$

где $\psi(u) = |\nabla u|_H^2 + (f(u), u) - \frac{1}{2}\mathrm{sp}_H P_m Q P_m - \beta(Qu, u)$.

Нетрудно заметить, что в силу (2)

$$e(\beta, u)\psi(u) \geqslant B_1 e(\beta, u) - D_\beta, \quad B_1 > 0. \quad (12)$$

Поэтому из (11) следует равномерная по N ограниченность $Me(\beta, u_m(t \wedge \wedge \tau_N))$. Но тогда в (11) по теореме Лебега можно перейти к пределу по $N \to \to \infty$. В итоге получим

$$Me(\beta, u_m(t)) + 2\beta \int_0^t Me(\beta, u_m(s))\psi(u_m(s))ds = e^{\beta|u_m(0)|_H^2}.$$

Из (12) следует

$$Me(\beta, u_m(t))\psi(u_m(s)) = B_1 Me(\beta, u_m(s)) - D_\beta + \varphi(s), \quad \varphi \geqslant 0.$$

Обозначим $y(t) = Me(\beta, u_m(t))$. Тогда для $y(t)$ получим уравнение

$$y(t) + 2\beta \int_0^t [B_1 y(s) - D_\beta + \varphi(s)]\,ds = y_0.$$

Нетрудно показать что для y справедлива оценка

$$y(t) \leqslant \frac{D_\beta}{B_1} + y_0 \exp(-2\beta B_1 t).$$

Лемма 4 доказана.

Наряду с галеркинским уравнением (7) рассмотрим возмущенное уравнение

$$\dot{u}_m^\lambda - \Delta u_m^\lambda + P_m f(u_m^\lambda) + \lambda P_m Q P_{\bar{m}} u_m^\lambda = P_m \dot{w}, \quad m > \bar{m}, \quad (13)$$

с константой λ, для которой выполнено условие Q) (см. (5)).

З а м е ч а н и е. Поскольку все дальнейшие рассмотрения будут проводиться для галеркинских уравнений при фиксированном m, то индекс m будем по возможности опускать.

Для уравнения (13), как и для (7), имеет место теорема существования и единственности сильного решения. Более того, справедлива следующая теорема о стабилизации.

Т е о р е м а 2. *С вероятностью* 1

$$|u_z^\lambda(t) - u_v^\lambda(t)|_H \leqslant |z - v|_H e^{-\gamma t}. \quad (14)$$

Здесь $z, v \in H$, *а* γ — *константа из условия* Q).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычитая из уравнения на u_z^λ уравнение на u_v^λ для $y \equiv u_z^\lambda - u_v^\lambda$, получаем

$$\dot{y} - \Delta y + P_m[f(u_z^\lambda) - f(u_v^\lambda)] + \lambda P_m Q P_{\bar{m}} y = 0.$$

Умножим скалярно это уравнение на y:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y|_H^2 + |\nabla y|_H^2 + (f(u_z^\lambda) - f(u_v^\lambda), y) + \lambda(QP_{\bar{m}} y, y) = 0.$$

Применив условие Q) и свойства функции f, получим $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y|_H^2 + \gamma|y|_H^2 \leqslant 0$.

Отсюда следует (14).

Отметим, что с вероятностью 1 траектории решений уравнений (7), (13) принадлежат пространству $C(\mathbb{R}_+; P_m H)$. Через P_v, P_v^λ обозначим меры на $C(\mathbb{R}_+;\ P_mH)$ — распределения процессов u_v, u_v^λ. По теореме Гирса нова [8] мера P_v абсолютно непрерывна относительно P_v^λ, при этом

$$\frac{dP_v}{dP_v^\lambda}(u(s),\ 0\leqslant s\leqslant t)\equiv\rho_t(u)=\exp\left\{\lambda\int_0^t(u(s),\ dP_{\overline{m}}\,w)-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t(QP_{\overline{m}}\,u(s),\ P_{\overline{m}}\,u(s))\,ds\right\},\qquad(15)$$

где $P_{\overline{m}}\,w$ выражается через u согласно (13).

Идея доказательства леммы 3 состоит в перенесении посредством абсолютной непрерывности свойств стабилизации уравнения (13) на уравнени (7).

В силу марковости процессов u_v, u_v^λ, а также (15)

$$g_{t+h}(z)-g_{t+h}(v)=Mg_h(u_z(t))-Mg_h(u_v(t))=M\rho_t(u_z^\lambda)g_h(u_z^\lambda(t))-$$

$$-M\rho_t(u_v^\lambda)g_h(u_v^\lambda(t))=M\rho_t(u_z^\lambda)[g_h(u_z^\lambda(t))-g_h(u_v^\lambda(t))]+Mg_h(u_v^\lambda(t))\times$$

$$\times[\rho_t(u_z^\lambda)-\rho_t(u_v^\lambda)]=I+J.\qquad(16)$$

Для оценки первого слагаемого в (16) нам понадобится оценка

$$|g_h(z)-g_h(v)|\leqslant|z-v|_He^{2dh}\cdot K_g.\qquad(17)$$

Действительно,

$$|g_h(z)-g_h(v)|\leqslant M|g(u_z(h))-g(u_v(h))|\leqslant K_gM|u_z(h)-u_v(h)|_H.$$

Для оценки $|u_z(h)-u_v(h)|_H$ вычтем из уравнения (7) для u_z уравнение для u_v и умножим обе части скалярно на u_z-u_v:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_z-u_v|_H^2+|\nabla(u_z-u_v)|_H^2+(f(u_z)-f(u_v),\ u_z-u_v)=0.$$

Применив свойства (2), будем иметь $\frac{d}{dt}|u_z-u_v|_H^2\leqslant 2d|u_z-u_v|_H^2$. Отсюда следует (17). Благодаря (17) и неравенству (14) слагаемое I из (16) оценивается так:

$$I\leqslant K_ge^{2dh-\gamma t}.\qquad(18)$$

Слагаемое J в (16) представим в виде суммы:

$$J=-M\rho_t(u_v^\lambda)g_h(u_v^\lambda(t))[1-\chi(N,|u_v^\lambda(t)|_H)]+M\rho_t(u_z^\lambda)g_h(u_v^\lambda(t))[1-$$

$$-\chi(N,|u_v^\lambda(t)|_H)]+M[\rho_t(u_z^\lambda)-\rho_t(u_v^\lambda)]g_h(u_v^\lambda(t))\chi(N,|u_v^\lambda(t)|_H)=$$

$$=J_1+J_2+J_3,\qquad(19)$$

где $\chi(N,s)=1$ при $s\leqslant N$ и $\chi(N,s)=0$ при $s>N$.

Согласно оценкам (10), (14) а также (15) и неравенству Чебышева имеем

$$\sup_{|v|_H\leqslant N}|J_1|\leqslant c_g\sup_{|v|_H\leqslant N}M\rho_t(u_v^\lambda)[1-\chi(N,|u_v^\lambda(t)|_H)]=$$

$$=c_g\sup_{|v|_H\leqslant N}M[1-\chi(N,|u_v(t)|_H)]\leqslant c_\beta c_ge^{-\beta N^2}+$$

$$+c_ge^{\beta N^2-\beta kt}\xrightarrow{t\to\infty}c_{\beta,g}e^{-\beta N^2}.\qquad(20)$$

Для оценки J_2 заметим, что по теореме 2

$$\chi(N,|u_v^\lambda(t)|_H)\geqslant\chi(N-|u_z^\lambda(t)-u_v^\lambda(t)|_H,\ |u_z^\lambda(t)|_H)\geqslant$$

$$\geqslant\chi(N(1-2e^{-\gamma t}),\ |u_z^\lambda(t)|_H),\ |z|_H,\ |v|_H\leqslant N.$$

Положим $N_t = N(1 - 2e^{-\gamma t})$. Тогда аналогично выводу (20)

$$\sup_{|v|_H, |z|_H \leqslant N} |J_2| \leqslant c_g \sup_{|z|_H \leqslant N} M[1 - \chi(N_t, |u_z(t)|_H)] \leqslant$$

$$\leqslant c_g c_\beta e^{-\beta N_t^2} + c_g e^{\beta N_t^2 - \beta k t} \xrightarrow{t\to\infty} c_{\beta,g} e^{-\beta N^2}. \tag{21}$$

Для оценки слагаемого J_3 в (19) рассмотрим следующую σ-аддитивную функцию множества на H: $\forall B \in \mathscr{B}(H)$

$$\nu_{z,v}^t(B) \equiv M[\rho_t(u_z^\lambda) - \rho_t(u_v^\lambda)]\chi_B(u_v^\lambda(t)), \tag{22}$$

где $\chi_B(u)$ — характеристическая функция множества B.

Поскольку $\nu_{z,v}^t(H) = 0$, то по теореме о разложении существует множество $S^+ = S_{t,z,v}^+ \subset H$ такое, что

$$\nu_{z,v}^t(B \cap S^+) \geqslant 0, \ \nu_{z,v}^t(B \cap (H \setminus S^+)) \leqslant 0 \quad \forall B \in \mathscr{B}(H). \tag{23}$$

Пользуясь разложением $\nu_{z,v}^t$, получаем

$$J_3 = \int_{S^+} \chi(N, |u|_H) g_h \nu_{z,v}^t(du) + \int_{H\setminus S^+} \chi(N, |u|_H) g_h(u) \nu_{z,v}^t(du) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|u|_H \leqslant N} g_h(u) \nu_{z,v}^t(S^+) + \inf_{|u|_H \leqslant N} g_h(u) \nu_{z,v}^t(H \setminus S^+) = \delta_{N,m}^h \nu_{z,v}^t(S^+). \tag{24}$$

Величину $\nu_{z,v}^t(S^+)$ в (24) представим в виде

$$\nu_{z,v}^t(S^+) = 1 - M\chi_{H\setminus S^+}(u_v^\lambda(t))\rho_t(u_z^\lambda) - M\chi_{S^+}(u_v^\lambda(t))\rho_t(u_v^\lambda). \tag{25}$$

Рассмотрим второе слагаемое в (25). По неравенству для выпуклых функций

$$M\chi_{H\setminus S^+}(u_v^\lambda(t))\rho_t(u_z^\lambda) = M\chi_{H\setminus S^+}(u_v^\lambda(t)) e^{\Phi(t)} \rho_t(u_v^\lambda) \geqslant$$

$$\geqslant M\chi_{H\setminus S^+}(u_v^\lambda(t))\rho_t(u_v^\lambda) \exp\left\{-\frac{M|\Phi(t)|\rho_t(u_v^\lambda)}{M\chi_{H\setminus S^+}(u_v^\lambda(t))\rho_t(u_v^\lambda)}\right\}, \tag{26}$$

где

$$\Phi(t) = \lambda \int_0^t (u_z^\lambda(s) - u_v^\lambda(s), dP_{\overline{m}} w(s)) - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t [(P_{\overline{m}} Q P_{\overline{m}} u_z^\lambda(s), u_z^\lambda(s)) -$$

$$- (P_{\overline{m}} Q P_{\overline{m}} u_v^\lambda(s), u_v^\lambda(s))] ds = \lambda \Phi_1(t) + \frac{\lambda^2}{2} \Phi_2(t). \tag{27}$$

Лемма 5. *Справедлива оценка*

$$M|\Phi(t)|\rho_t(u_v^\lambda) \leqslant cN^2, \ |v|_H, \ |z|_H \leqslant N. \tag{28}$$

Доказательство. Заметим, что в силу (14)

$$|\Phi_2(t)| \leqslant c_Q |z - v|_H \int_0^t e^{-\gamma s}(|u_v^\lambda(s)|_H + |u_z^\lambda(s)|_H) ds \leqslant$$

$$\leqslant c_Q |z - v|_H \int_0^t e^{-\gamma s}(2|u_v^\lambda(s)|_H + |z - v|_H e^{-\gamma s}) dt \leqslant$$

$$\leqslant 2c_Q N \int_0^t e^{-\gamma s}|u_v^\lambda(s)|_H ds + 2c_Q N^2 \gamma^{-1}. \tag{29}$$

Отсюда ввиду (15), (10)

$$M|\Phi_2(t)|\rho_t(u_v^\lambda) \leqslant 2c_Q N \int_0^t e^{-\gamma s} M|u_v(s)|_H ds + 2c_Q N^2 \gamma^{-1} \leqslant cN^2. \tag{30}$$

Оценку для $M|\Phi_1(t)|\rho_t(u_v^\lambda)$ найдем посредством применения формулы Ито к функционалу $V(t\wedge\tau_k)=G(t\wedge\tau_k)\rho_{t\wedge\tau_k}(u_v^\lambda)$, где $G(t)=(1+|\Phi_1(t)|^2)^{1/2}$, $\tau_k=\inf(t:|\Phi_1(t)|>k)$.

Положим для краткости $y^\lambda(t)=u_z^\lambda(t)-u_v^\lambda(t)$. Тогда

$$V(t\wedge\tau_k)=1+\int_0^{t\wedge\tau_k}G^{-1}(s)\Phi_1(s)\rho_s(u_v^\lambda)(y^\lambda(s),dP_{\overline{m}}w(s))+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_k}[G^{-1}(s)-\Phi_1(s)G^{-3}(s)]\rho_s(u_v^\lambda)P_{\overline{m}}QP_{\overline{m}}y^\lambda(s),y^\lambda(s))\,ds.$$

Применим оператор математического ожидания к обеим частям равенства, а затем воспользуемся неравенством (14) и теоремой 2:

$$MV(t\wedge\tau_k)\leqslant 1+M\int_0^{t\wedge\tau_k}(P_{\overline{m}}QP_{\overline{m}}y^\lambda(s),y^\lambda(s))\rho_s(u_v^\lambda)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant 1+c_Q|z-v|_H^2\int_0^t e^{-2\gamma s}M\rho_s(u_v^\lambda)\,ds\leqslant\frac{c_Q'}{\gamma}N^2,\ |z|_H,\ |v|_H\leqslant N.$$

Отсюда, устремляя $k\to\infty$, по теореме Лебега получаем $MV(t)\leqslant cN^2$. Из этого неравенства, а также из (29) следует утверждение леммы 5.

Применим неравенство (29) к (27). Тогда согласно (25)

$$\nu_{z,v}^t(S^+)\leqslant b\left(1-\exp\left(-\frac{cN^2}{b}\right)\right)\leqslant 1-\exp(-cN^2), \tag{31}$$

где $b=M\chi_{H\setminus S^+}(u_v^\lambda(t))\rho_t(u_z^\lambda)$.

Таким образом, из (16), (18)—(21), (24), (31) следует лемма 3.

В заключение отметим, что теорема 1 справедлива и для статистических решений, отвечающих решениям уравнения (1) и со случайным начальным условием с конечным вторым моментом.

1. *Marcus R.* Parabolic Ito equations // Trans. Amer. Meth. Soc.— 1974.— **198**.
2. *Viot M.* Solution faibles déquations aux deriveés partielles stochastiques non linéaires: Thèse.— Paris, 1976.
3. *Marcus R.* Stochastic diffusion on an unbounded domain // Pacif. J. Math.— 1979.— **84**, N 1.— P. 43—153.
4. *Гиря Т. В.* Стабилизация статистических решений нелинейных параболических уравнений с белым шумом // Успехи мат. наук.— 1982.— **36**, № 2.— С. 177—178.
5. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Существование и оценка размерности аттракторов квазилинейных параболических систем уравнений и системы Навье—Стокса // Там же.— **37**, № 3.— С. 173—174.
6. *Гиря Т. В.* Статистические решения нелинейных стохастических параболических уравнений.— Харьков, 1981.— 44 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 46-81.
7. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики / ВИНИТИ.— 1979.— С. 71—146.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов.— М. : Наука, 1975.— Т. 3.— 496 с.

Харьк. ун-т

Получено 15.12.87