УДК 517.95

Д. Базаров

О некоторых нелокальных краевых задачах для параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа

Впервые в работе [1] была поставлена и исследована нелокальная краевая задача, которая является обобщением задачи Дирихле. Краевые задачи со смещением впервые были исследованы в работе [2]. В настоящей работе изучаются некоторые аналоги этих задач для уравнений

$$0 = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\,(u_{xx} + u_y + c(y)\,u) & \text{при} \quad y > 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\,(u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u) & \text{при} \quad y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $c(y)$ — непрерывно дифференцируемая неположительная функция, λ — постоянная,

$$0 = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}(u_{xx} + u_y + c(x)\,u) & \text{при } y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda^2 \operatorname{sgn}(x+y)\,u & \text{при } y < 0. \end{cases} \tag{1'}$$

Пусть D — односвязная область, ограниченная отрезками AA_1, AE, BE прямых $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$ и характеристикой A_1B: $x - y = 1$ уравнения (1). Через C обозначим точку с координатами (1/2, —1/2). Точки с координатами (0,1), (0, —1), (1, 0), (1,1) соответственно обозначены A, A_1, B, E.

Задача I. Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1. Функция $u(x, y)$ непрерывна в замыкании области D

2. Частные производные u_x, u_y непрерывны в замыкании области D кроме, быть может, характеристики $OC: x + y = 0$. (В точках $O(0, 0)$, $C(1/2, -1/2)$ частные производные u_x, u_y ограничены, u_x, u_y непрерывны слева и справа на OC [3].)

3. Функция $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D при $y \neq 0$, $y \neq -x$.

4. Функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{gathered} u|_{AE} = \psi_1(x),\ u(l, y) = u(1, y) + \psi_2(y), \quad 0 < l < 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ [u(0, y) - u(0, -y)]|_{AA_1} = \psi_3(y), \quad u_x|_{AA_1} = \nu_1(y), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{A_1B} = \psi_4(y), \end{gathered} \tag{2}$$

$\vec{n}$ — вектор внутренней нормали, ψ_i, $i = \overline{1,4}$, ν_1 — заданные функции, причем

$$\psi_1 \in c^1[0, 1] \cap c^2]0, 1[,\ \psi_2 \in c^1[0, 1],\ \psi_3 \in c^1[0, 1] \cap c^3]0, 1[,$$

$$\nu_1 \in c[-1, 1] \cap c^{(1,\alpha)}]-1, 0[\cup]0, 1[,\ \psi_4 \in c^1[-1, 0] \cap c^2]-1, 0[,$$

$$\psi_1(1)=0,\quad \psi_2(0)=0,\quad \psi_3(1)=0,\quad \nu_1(-1)=\psi_4(-1),\quad \nu_1(1)=\psi_1'(0),$$
$$\psi_4(-1)=0,$$

$\psi_3(y)$ — нечетная функция.

Задача II. Найти функцию $u(x, y)$, обладающую всеми свойствами задачи 1, кроме краевого условия $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{A_1B}=\psi_4(y)$, которое заменяется краевым условием

$$u\left(\frac{1+y}{2},\frac{y-1}{2}\right)=\int\limits_{-1}^{\frac{y-1}{2}}\alpha(t)\,u(0,t)\,dt+\beta u(0,y)+\psi_4(y),\ -1\leqslant y<0,$$

$\alpha(t)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция, β — постоянная.

Задача III. Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1. Функция $u(x, y)$ обладает первыми двумя свойствами задачи I;
2. Функция $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1′) в области D при $y\neq 0$, $y\neq -x$.
3. Функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{AE}=u|_{y=l}+\psi_1(x),\quad 0<l<1,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad u|_{BE}=\psi_2(y),$$
$$[u(0,y)-u(0,-y)]|_{AA_1}=\psi_3(y),\quad u_x|_{A_1O}=\nu_1(y),\tag{3}$$
$$u\left(\frac{1+y}{2},\frac{y-1}{2}\right)=\int\limits_{-1}^{\frac{y-1}{2}}\alpha(t)\,u(0,t)\,dt+\beta u(0,y)+\psi_4(y),\quad -1\leqslant y\leqslant 0,$$

ν_1, ψ_i, $i=\overline{1,4}$, — заданные функции, обладающие свойствами, указанными в задаче I, $\nu_1(-1)=\psi_4(-1)$, β — постоянная, $\alpha(t)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция.

При исследовании задач I и II будем пользоваться тем фактом, что любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде [4]

$$u(x,y)=z(x,y)+\omega(y),\tag{4}$$

где $z(x,y)$ — регулярное решение уравнения

$$z_{xx}+\frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}z_y-\frac{1-\operatorname{sgn} y}{2}z_{yy}+c_1(y)z=0.\tag{5}$$

Здесь

$$c_1(y)=\begin{cases}c(y) & \text{при } y\geqslant 0,\\ -\lambda^2 & \text{при } y\leqslant 0.\end{cases}$$

Обозначим

$$\omega(y)=\begin{cases}\omega_1(y) & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ \omega_2(y) & -1\leqslant y\leqslant 0,\end{cases}$$

$\omega_1(y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, $\omega_2(y)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем $\omega_1(0)=\omega_2(0)$, $\omega_1'(0)=\omega_2'(0)$. Без ограничения общности можно предполагать, что $\omega(0)=\omega(1)=0$.

На основании (2), (4) задача I редуцируется к определению регулярного решения уравнения (5), удовлетворяющего краевым условиям

$$z|_{AE}=\psi_1(x),\quad z|_{BE}=\psi(y)-\omega_1(y),\quad z_x|_{AO}=\nu_1(y),$$
$$z|_{x=l}=\psi(y)+\psi_2(y)-\omega_1(y),\quad z|_{OA}=\varphi(-y)+\psi_3(y)-\omega_1(y),\tag{6}$$

$$z_x|_{A_1O} = \nu_1(y), \quad z|_{A_1O} = \varphi(y) - \omega_2(y), \quad \frac{\partial z}{\partial n}\bigg|_{A_1B} = \psi_4(y) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_2'(y),$$

где $\psi(y) = u(1, y),\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ \varphi(y) = u(0, y),\ -1 \leqslant y \leqslant 0$.

Теорема единственности решения. *Если* $\psi_i \equiv 0$, $i = \overline{1, 4}$, $\nu_1 \equiv 0$, *то функция* $u(x, y) \equiv 0$ *в области* D.

Действительно, из «принципа максимума» следует, что $z(x, y) \equiv 0$ в области $D_1 = \{(x, y) \in D,\ y > 0\}$. Тогда $z(x, y) \equiv 0$ и в характеристическом треугольнике OCB. Функция $z(x, y)$, удовлетворяющая краевым условиям $z|_{OC} = 0$, $z_x|_{A_1O} = 0$, тождественно равна нулю и в характеристическом треугольнике OCA_1. Реализуя краевое условие $\frac{\partial z}{\partial n}\Big|_{A_1B} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_2'(y)$, легко убедиться, что $\omega_2(y) = 0$ при $-1 \leqslant y \leqslant 0$. Следовательно, функция $u(0, y) = \varphi(y) = 0$ при $-1 \leqslant y \leqslant 0$. Тогда из условия $z|_{AO} = \varphi(-y) - \omega_1(y)$ следует, что $\omega_1(y) = 0$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$. Стало быть, $u(x, y) \equiv 0$ в области D. Заметим, что из непрерывности $z(x, y)$ на отрезке OC следует непрерывность $\partial z/\partial n$ в точке C [3, с. 239]. Регулярное в области D_1 решение уравнения (5), удовлетворяющее первым трем условиям из (6), удовлетворяет интегральному уравнению [4]

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \int_y^1 d\eta \int_0^1 c(\eta)\, G(x, 1 - y; \xi, 1 - \eta)\, z(\xi, \eta)\, d\xi, \tag{7}$$

$G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина [5],

$$z_0(x, y) = -\int_y^1 \nu_1(\eta)\, G(x, 1 - y; 0, 1 - \eta)\, d\eta + \int_y^1 [\psi(\eta) - \omega_1(\eta)] \times$$

$$\times G_\xi(x, 1 - y; 1, 1 - \eta)\, d\eta - \int_0^1 (\tau(\xi)\, G(x, 1 - y; \xi, 0)\, d\xi.$$

Решение интегрального уравнения (7) имеет вид [6]

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \int_y^1 d\eta \int_0^1 R(x, y; \xi, \eta)\, z_0(\xi, \eta)\, d\xi, \tag{8}$$

где $R(x, y; \xi, \eta)$ — резольвента ядра $c_1(\eta)\, G(x, 1 - y; \xi, 1 - \eta)$. Реализуя краевое условие $z|_{x=l} = \psi(y) + \psi_2(y) - \omega_1(y)$, для определения неизвестной функции $\psi(y) - \omega_1(y)$ получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\psi(y) - \omega_1(y) - \int_y^1 [\psi(\eta) - \omega_1(\eta)]\, k(y, \eta)\, d\eta = F(y) \tag{9}$$

Учитывая сделанные предположения относительно заданных функций ψ_1, ψ_2, ν_1 и используя явное представление функции Грина, непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что известные функции $F(y)$, $k(y, \eta)$ таковы, что $F(y)$ — непрерывно дифференцируема при $0 \leqslant y \leqslant 1$, а $k(y, \eta) \in c([0, 1], [0, 1])$.

Из постановки задачи 1 следует, что функция $\psi(y) - \omega_1(y)$ должна принадлежать классу c^1, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Согласно общей теории интегральных уравнений, решение интегрального уравнения (9) из указанного класса существует и имеет вид [6]

$$\psi(y) - \omega_1(y) = F(y) + \int_y^1 R_1(y, t)\, F(t)\, dt,$$

где $R_1(y, t)$ — резольвента ядра $k(y, \eta)$.

Подставляя значение $\psi(y) - \omega_1(y)$ в равенство (8) и реализуя краевое условие $z|_{AO} = \varphi(-y) - \omega_1(y) + \psi_3(y)$, находим функцию

$$\varphi(-y) - \omega_1(y) = F_1(y), \tag{10}$$

где $F_1(y)$ — известная функция,

$$F_1(y) = z_0(0, y) + \int_y^1 d\eta \int_0^1 R(0, y; \xi, \eta) z_0(\xi, \eta) d\xi - \psi_3(y).$$

Обозначим

$$z(x, 0) = \tau(x), \quad z_y(x, 0) = \nu(x). \tag{11}$$

Значения $\tau(x)$, $\nu(x)$ определяем из (8), устремляя $y \to 0_+$. Регулярное в треугольнике OCB решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям (11), определяется однозначно (решение задачи Коши) [7]. Обозначим

$$z|_{OC} = z(-y, y) = \psi_5(y), \ -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 0. \tag{12}$$

Регулярное в характеристическом треугольнике OCA_1 решение уравнения 5), удовлетворяющее начальным условиям $z|_{A_1O} = \varphi(y) - \omega_2(y)$, $z_x|_{A_1O} = \nu_1(y)$, дается формулой [7]

$$z(x, y) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x+y) + \varphi(y-x) - \omega_2(x+y) - \omega_2(y-x) +$$

$$+ \int_{y-x}^{x+y} \mathcal{J}_0[\lambda\sqrt{(y-t)^2 - x^2}]\, \nu_1(t)\, dt + \int_{y-x}^{x+y} [\varphi(t) - \omega_2(t)] \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{J}_0[\lambda\sqrt{(y-t)^2 - x^2}]\, dt\Big]. \tag{13}$$

Реализуя условие (12), для определения функции $\varphi(y) - \omega_2(y)$ получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(y) - \omega_2(y) = \int_y^0 k_1(y, t) [\varphi(t) - \omega_2(t)]\, dt + F_2(y), \tag{14}$$

где $k_1(y, t)$, $F_2(y)$ — известные достаточно гладкие функции, из которого единственным образом определяется функция

$$\varphi(y) - \omega_2(y) = F_2(y) + \int_y^0 R_2(y, t) F_2(t)\, dt. \tag{15}$$

Здесь $R_2(y, t)$ — резольвента ядра $k_1(y, t)$.

Таким образом, функция $z(x, y)$ полностью определена в области $D_2 = \{(x, y) \in D, y < 0\}$. Реализуя последнее условие из (6), определяем функцию $\omega_2(y)$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$. Следовательно, определяются и функции $\varphi(y)$ при $-1 \leqslant y \leqslant 0$, $\omega_1(y)$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$. Итак, функция $u(x, y)$ полностью определена в области D.

Перейдем к изучению задачи II. Поступая таким же образом, как при решении задачи I, определяем функцию $\varphi(y) - \omega_2(y)$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$. Функция, определенная формулой (13), должна удовлетворять условию

$$z\left(\frac{1+y}{2}, \frac{y-1}{2}\right) = \int_{-1}^{\frac{y-1}{2}} \alpha(t)\, u(0, t)\, dt + \beta u(0, y) - \omega_2\left(\frac{y-1}{2}\right) + \psi_4(y).$$

Реализуя это условие и учитывая (15), для определения $\omega_2(y)$ получаем интегро-функциональное уравнение

$$\omega_2(y) - \frac{1}{\beta}\,\omega_2\left(\frac{y-1}{2}\right) + \frac{1}{2\beta}\int_{-1}^{y} \alpha\left(\frac{t-1}{2}\right)\omega_2\left(\frac{t-1}{2}\right) dt = F_3(y). \tag{16}$$

Предполагаем, что $0 < \alpha(t) < \delta < 1$, $\beta > 1$. Применением методов итераций и последовательных приближений [8] доказывается однозначная разрешимость интегро-функционального уравнения (16). После определения функции $\omega_2(y)$ определяются и функции $\varphi(y)$, $\omega_1(y)$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$. Таким образом, полностью определена функция $u(x, y)$ в области D. Пусть $\alpha(t) \equiv 0$, $\beta \neq 0$, тогда приходим к функциональному уравнению

$$\omega_2(y) - \frac{1}{\beta}\,\omega_2\left(\frac{y-1}{2}\right) = F_4(y),$$

где $F_4(y)$ — известная непрерывно дифференцируемая функция. Это функциональное уравнение имеет, и притом единственное, решение при $|\beta| > \frac{1}{2}$. Теперь пусть $\alpha(t) \not\equiv 0$, $\beta = 0$. Тогда задача II недоопределена. Действительно, в этом случае имеем

$$\omega_2(y) - \int\limits_{-1}^{y} \alpha(t)\,\omega_2(t)\,dt = F_5(y), \quad -1 \leqslant y \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Из этого интегрального уравнения единственным образом определяется функция $\omega_2(y)$ при $-1 \leqslant y \leqslant -1/2$. Функция $\omega_2(y)$ при $-1/2 \leqslant y \leqslant 0$ остается неопределенной. Следовательно, задача II при $\beta = 0$ поставлена некорректно.

При изучении задачи III будем пользоваться тем фактом, что любое регулярное решение уравнения (1′) в области D_1 представимо в виде [4] $u(x, y) = z(x, y) + \omega(x)$, где $z(x, y)$ — регулярное решение уравнения

$$z_{xx} + z_y + c(x)\,z = 0. \tag{17}$$

Регулярное в области D_1 решение уравнения (17), удовлетворяющее краевым условиям

$$z|_{OA} = \varphi(-y) + \psi_3(y), \quad z|_{BE} = \psi_2(y), \quad z|_{AE} = \psi(x) - \omega(x),$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \int\limits_{y}^{1} d\eta \int\limits_{0}^{1} c(\xi)\,G_1(x, 1-y; \xi, 1-\eta)\,z(\xi, \eta)\,d\xi, \tag{18}$$

где $\varphi(y) = u(0, y)$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$, $\psi(x) = u(x, 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$z_0(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{\int\limits_{y}^{1} \overline{\psi}(t)\,G_1(x, 1-y; 0, 1-\eta)\,d\eta - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{y}^{1} \psi_2(\eta)\,G_{1\xi}(x, 1-y; 1, 1-\eta)\,d\eta + \int\limits_{0}^{1} [\psi(\xi) - \omega(\xi)]\,G_1(x, 1-y; \xi, 0)\,d\xi, \right.$$

где $G_1(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина [5], $\overline{\psi} = \psi_3(y) + \varphi(-y)$.

Решение уравнения (18) имеет вид [6]

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \int\limits_{y}^{1} d\eta \int\limits_{0}^{1} R(x, y; \xi, \eta)\,z_0(\xi, \eta)\,d\xi, \tag{19}$$

где $R(x, y; \xi, \eta)$ — резольвента ядра $c(\xi)\,G_1(x, 1-y; \xi, 1-\eta)$.

Регулярное в треугольнике A_1OC решение уравнения (1′), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0, y)|_{A_1O} = \varphi(y), \quad u_x|_{A_1O} = \nu_1(y)$$

дается формулой [7]

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+y) + \varphi(y-x) + \int\limits_{y-x}^{x+y} \mathcal{J}_0[\lambda\sqrt{(y-t)^2 - x^2}]\,\nu_1(t)\,dt + \right.$$

$$+\int\limits_{y-x}^{x+y}\varphi(t)\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{J}_0[\lambda\sqrt{(y-t)^2-x^2}]\,dt]. \tag{20}$$

Предполагая $\beta\neq 1/2$ и реализуя последнее условие из (3), имеем

$$\varphi(y)-\frac{1}{2\beta-1}\int\limits_{-1}^{y}\varphi(t)\,k_2(y,t)\,dt+\frac{1}{2\beta-1}\int\limits_{-1}^{\frac{y-1}{2}}\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt=f_1(y), \tag{21}$$

$k_2(y, t)$, $f_1(y)$ — известные непрерывная и непрерывно дифференцируемая функции соответственно.

Интегральное уравнение (21) имеет и притом единственное решение [9]. Таким образом, функция $u(x, y)$ определена в треугольнике OA_1C. Подставляя значение $\varphi(y)$ в формулу (19) и реализуя условие $z|_{y=t}=\psi(x)-\psi_1(x)-\omega(x)$, приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\psi(x)-\omega(x)-\int\limits_0^1 k_1(x,t)[\psi(t)-\omega(t)]\,dt=f(x),$$

где $k_1(x, t)$, $f(x)$ — известные достаточно гладкие функции.

Разрешимость этого интегрального уравнения следует из единственности решения задачи III. Таким образом, функция $z(x, y)$ полностью определена в области D_1. Из формулы (20) найдем значение функции $u(x, y)$ на OC:

$$u|_{OC}=\varphi_1(x). \tag{22}$$

Из постановки задачи III следует

$$\lim_{y\to 0_-}u(x,y)=\lim_{y\to 0_+}u(x,y),\quad \lim_{y\to 0_-}u_y(x,y)=\lim_{y\to 0_+}u_y(x,y).$$

Отсюда

$$u(x,-0)=z(x,+0)+\omega(x),\quad u_y(x,-0)=z_y(x,+0). \tag{23}$$

Регулярное в треугольнике OCB решение уравнения (1′), удовлетворяющее условиям

$$u(x,-0)=\tau(x),\quad u_y(x,-0)=\nu(x), \tag{24}$$

дается формулой [7]

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\Big[\tau(x-y)+\tau(x+y)+\int\limits_{x-y}^{x+y}\mathcal{J}_0(\lambda\sqrt{(x-t)^2-y^2})\,\nu(t)\,dt-$$

$$-\lambda y\int\limits_{x-y}^{x+y}\frac{\mathcal{J}_0'(\lambda\sqrt{(x-t)^2-y^2})}{\sqrt{(x-t)^2-y^2}}\,\tau(t)\,dt\Big]. \tag{25}$$

Реализуя краевое условие (22), из (25) получаем

$$\tau(x)-\frac{\lambda}{2}\,x\int\limits_0^x\frac{\mathcal{J}_0'(\lambda\sqrt{t(t-x)})}{\sqrt{t(t-x)}}\,\tau(t)\,dt=2\varphi_1\left(\frac{x}{2}\right)+\int\limits_0^x\mathcal{J}_0(\lambda\sqrt{t(t-x)})\,\nu(t)dt.$$

После обращения [10] этого интегрального уравнения имеем

$$\tau(x)=2\varphi_1\left(\frac{x}{2}\right)-\int\limits_0^x\varphi_1\left(\frac{t}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{J}_0(\lambda\sqrt{x(x-t)})\,dt+\int\limits_0^x\mathcal{J}_0[\lambda(x-t)]\,\nu(t)dt. \tag{26}$$

Второе равенство из (23) показывает, что

$$\nu(x)=z_y(x,+0)=u_y(x,-0).$$

Функцию $\nu(x)$ определим из равенства (19). Подставляя значение $\nu(x)$ в равенство (26), находим функцию $\tau(x) = u(x, -0)$. Из (19) определим функцию $z(x, +0)$. Подставляя значения $u(x, -0)$, $z(x, +0)$ в первое равенство из (23), определяем произвольную функцию $\omega(x)$. Таким образом, функция $u(x, y)$ полностью определена в области D. Заметим, что задача III однозначно разрешима и в случаях $\alpha(t) \equiv 0$, $\beta = 0$.

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР.— 1969.— **185**, № 4.— С. 739—740.
2. *Нахушев А. М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения.— 1969.— **5**, № 1.— С. 44—59.
3. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа.— М. : Наука, 1970.— 295 с.
4. *Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.— Ташкент: Фан, 1986.— 219 с.
5. *Дикинов Х. Ж., Керефов А. А., Нахушев А. М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. — 1976.— **13**, № 1.— С. 177—179.
6. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям.— М. : Физматгиз, 1959.— 224 с.
7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1977.— 736 с.
8. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа.— Ташкент: Фан, 1974.— 156 с.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5-ти т.— М. : Наука, 1974.—**4**, ч. 1.— 336 с.
10. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* Краевые задачи для одного класса уравнений смешанного типа с негладкими линиями вырождения // Неклассические задачи математической физики.— Ташкент: Фан, 1985.— С. 25—47.

Туркм. политехн. ин-т, Ашхабад

Получено 29.12.87