УДК 519.21

М. Ш. Браверман

Об одном условии для абсолютных моментов нормированных сумм независимых случайных величин

Эссеен и Янсон получили следующий результат [1].

Теорема. *Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.), $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $0 < p < q < 2$ — фиксированные числа. Условие*

$$\sup M \,|\, n^{-1/q} S_n \,|^p < \infty \tag{1}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $P\,[\,|\,X_1\,| \geqslant x] \leqslant Cx^{-q}$ при некоторой постоянной $C > 0$ и всех $x > 0$ и если $q > 1$, то

$$MX_1 = 0, \tag{2}$$

если же $q = 1$, то

$$\sup_{a>0} |\, M\,(X_1 I_{[|X_1| \leqslant a]})\,| < \infty. \tag{3}$$

Соотношение $M\,|\,n^{-1/q} S_n\,|^p \to 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $P\,[\,|\,X_1\,| \geqslant x] = o\,(x^{-q})$ при $x \to \infty$ и если $q > 1$, то выполняется (2), *а если $q = 1$, то*

$$\lim_{a \to \infty} M\,(X_1 I_{[|x_1| \leqslant a]}) = 0.$$

Возникает вопрос о том, когда выполняется условие

$$0 < \inf M\,|\,n^{-1/q} S_n\,|^p \leqslant \sup M\,|\,n^{-1/q} S_n\,|^p < \infty. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность н.о.р.с.в. и фиксированные числа p, q таковы, что $1 \leqslant p < q < 2$. Для того чтобы имело место* (4), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (2) *и существовали постоянные $a, b, c > 0$ такие, что при $x \geqslant c$*

$$ax^{-q} \leqslant P\,[\,|\,X_1\,| \geqslant x] \leqslant bx^{-q}. \tag{5}$$

Если не выполняются неравенства $1 \leqslant p < q < 2$, то теорема 1 не верна. Действительно, пусть $X_k = 1$ п. н. и $0 < p < q = 1$. Тогда имеет место (4). В то же время нижняя оценка в (5) не выполняется. Рассмотрим дополнительное условие

$$\inf M\,|\,n^{-1/q} \sum_{k=i}^{n} (-1)^k X_k\,|^p > 0. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и $0 < p < q < 2$, $p < 1$. Для того чтобы одновременно имели место соотношения* (4) *и* (6), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (5) *и при $q > 1$ — условие* (2), *а при $q = 1$ — условие* (3).

Замечание 1. Будет показано, что из (2), (3), (5) вытекает существование постоянной $D > 0$ такой, что при всех $a_k \in R$, $n = 1, 2, \ldots$

$$D^{-1} \Big(\sum_{k=1}^{n} |\,a_k\,|^q \Big)^{p/q} \leqslant M \Big| \sum_{k=1}^{n} a_k X_k \Big|^p \leqslant D \Big(\sum_{k=1}^{n} |\,a_k\,|^q \Big)^{p/q}. \tag{7}$$

Это является усилением соотношений (4) и (6).

Замечание 2. Нетрудно построить последовательность симметричных н.о.р.с.в. $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой

$$\varliminf_{x \to \infty} x^q P\,[\,|\,X_1\,| \geqslant x] = 0 < \varlimsup_{x \to \infty} x^q P\,[\,|\,X_1\,| \geqslant x] < \infty.$$

Из теоремы Эссеена и Янсона и теорем 1, 2 вытекает, что для такой последовательности при $0 < p < q < 2$

$$\varliminf_{n\to\infty} M\,|\,n^{-1/q} S_n\,|^p = 0 < \varlimsup_{n\to\infty} M\,|\,n^{-1/q} S_n\,|^p < \infty.$$

1. Оценки для характеристических функций. При доказательстве сформулированных теорем будем использовать характеристические функции (х. ф.). Следующие два утверждения, по-видимому, известны. Они довольно просто могут быть получены с помощью известных оценок для х. ф. [2, с. 209]. Поэтому мы опустим их доказательство.

Лемма 1. *Пусть $f(t)$ есть х. ф., соответствующая с. в. X_1 и $0 < q < 2$. Условие* (5) *выполняется тогда и только тогда, когда найдутся постоянные α, β, $\gamma > 0$ такие, что при $|\,t\,| \leqslant \gamma$*

$$\alpha\,|\,t\,|^q \leqslant 1 - \operatorname{Re} f(t) \leqslant \beta\,|\,t\,|^q. \tag{8}$$

При этом верхняя оценка в (5) *эквивалентна верхней оценке в* (8), *а постоянные α, β, γ определяются постоянными a, b, c, входящими в* (5), *и наоборот.*

Лемма 2. *Пусть выполняются условия леммы 1. Предположим, что имеет место верхняя оценка в* (5). *Тогда*

1) *если $0 < q < 1$, то найдутся постоянные μ, $\nu > 0$, такие, что при $|\,t\,| \leqslant \nu$*

$$|\operatorname{Im} f(t)\,| \leqslant \mu\,|\,t\,|^q; \tag{9}$$

2) *если $q = 1$, то* (9) *выполняется тогда и только тогда, когда выполняется* (3);

3) *если $q > 1$, то* (9) *имеет место тогда и только тогда, когда $MX_1 = 0$.*

2. Доказательство теорем 1 и 2. Достаточность. Пусть выполняются условия (2), (3) и (5). Покажем, что тогда имеет место (7), откуда следуют соотношения (4) и (6). В свою очередь (7) сразу вытекает из следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность н. о. р. с. в., $q \in (0, 2)$ — фиксированное число. Предположим, что выполнены условия* (2), (3) *и* (5). *Тогда найдутся постоянные u, v, $w > 0$, такие, что при всех $a_k \in R$, $n = 1, 2, \ldots$*

$$u x^{-q} \leqslant P\left[\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\Big| \Big(\sum_{k=1}^{n} |\,a_k\,|^q\Big)^{-1/q} \geqslant x\right] \leqslant v x^{-q} \tag{10}$$

для $x \geqslant w$. При этом верхняя оценка в (5) *влечет верхнюю оценку в* (10).

Доказательству леммы предпошлем несколько вспомогательных утверждений. Ясно, что можно ограничиться рассмотрением наборов $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} |\,a_k\,|^q = 1. \tag{11}$$

Пусть, как и выше $f(t)$ есть х. ф., соответствующая с. в. X_1. Тогда сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$ имеет х. ф.

$$g(t) = \prod_{k=1}^{n} f(a_k t). \tag{12}$$

Покажем, что для $g(t)$ выполняются неравенства (8) с постоянными, независящими от a_k и n. Отсюда и из леммы 1 будут следовать оценки (10).

Предложение 1. *Пусть дан набор $\{\alpha_k + i\beta_k\}$ комплексных чисел, причем $|\,\alpha_k\,| \leqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда*

$$\Big|1 - \prod_{k=1}^{n} (\alpha_k + i\beta_k)\Big| \leqslant \Big|1 - \prod_{k=1}^{n} \alpha_k\Big| + \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} |\,\beta_k\,|\Big) - 1.$$

Доказательство. Имеем

$$\left|1-\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k+i\beta_k)\right|\leqslant\left|1-\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right|+\left|\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k+i\beta_k)-\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right|.$$

Раскрывая скобки, получаем равенство

$$\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k+i\beta_k)-\prod_{k=1}^{n}\alpha_k=i\beta_n\prod_{k=1}^{n-1}(\alpha_k+i\beta_k)+$$

$$+i\alpha_n\beta_{n-1}\prod_{k=1}^{n-2}(\alpha_k+i\beta_k)+\ldots+i\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2\beta_1.$$

Так как $|\alpha_k|\leqslant 1$, то отсюда находим

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k+i\beta_k)-\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}|\beta_{n-j+1}|\prod_{k=1}^{n-j}(1+|\beta_k|)+$$

$$+|\beta_1|=\prod_{k=1}^{n}(1+|\beta_k|)-1.$$

Поскольку $1+|x|\leqslant\exp|x|$, то $\prod_{k=1}^{n}(1+|\beta_k|)\leqslant\exp\left(\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|\right)$. Учитывая предыдущее, получаем нужное неравенство. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть выполняются условия* (8) *и* (9). *Тогда найдутся постоянные* α_1, β_1, $\gamma_1>0$ *такие, что при* $|t|\leqslant\gamma_1$

$$\exp(-\beta_1|t|^q)\leqslant\operatorname{Re}f(t)\leqslant|f(t)|\leqslant\exp(-\alpha_1|t|^q).$$

Доказательство просто и поэтому опускается.

Доказательство леммы 3. Согласно леммам 1 и 2 условия (2), (3) и (5) приводят к оценкам (8) и (9). Пусть $g(t)$ задается равенством (12). Покажем, что из (8) и (9) вытекает существование постоянных α_2, β_2, $\gamma_2>0$ таких, что для всякого набора $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, удовлетворяющего условию (11),

$$\alpha_2|t|^q\leqslant 1-\operatorname{Re}g(t)\leqslant\beta_2|t|^q\quad(|t|\leqslant\gamma_2). \tag{13}$$

Применяя лемму 1, получаем оценки (10).

Из (11) $|a_k|\leqslant 1$. С помощью предложения 2 находим, что при $|t|\leqslant\gamma_1$

$$1-\operatorname{Re}g(t)\geqslant 1-|g(t)|=1-\left|\prod_{k=1}^{n}f(a_kt)\right|\geqslant$$

$$\geqslant 1-\exp\left(-\alpha_1\sum_{k=1}^{n}|a_kt|^q\right)=1-\exp(-\alpha_1|t|^q). \tag{14}$$

Пусть $u(t)=\operatorname{Re}f(t)$, $v(t)=\operatorname{Im}f(t)$. Согласно (12) и предложению 1

$$1-\operatorname{Re}g(t)\leqslant|1-g(t)|=\left|1-\prod_{k=1}^{n}[u(a_kt)+iv(a_kt)]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|1-\prod_{k=1}^{n}u(a_kt)\right|+\exp\left(\sum_{k=1}^{n}|v(a_kt)|\right)-1.$$

Еще раз воспользуемся предложением 2. Так как $|u(t)|\leqslant 1$, то при $|t|\leqslant\gamma_1$

$$0\leqslant 1-\prod_{k=1}^{n}u(a_kt)\leqslant 1-\prod_{k=1}^{n}\exp(-\beta_1|ta_k|^q)=1-e^{-\beta_1|t|^q}.$$

Согласно (9) $\sum_{k=1}^{n}|v(a_k t)|\leqslant\mu\sum_{k=1}^{n}|a_k t|^q=\mu|t|^q$ при $|t|\leqslant\nu$. Из последних оценок и (14) вытекает (13).

По леммам 1 и 2 верхняя оценка в (5) вместе с (2) и (3) дает (9) и верхнюю оценку в (8). Приведенные выше рассуждения показывают, что отсюда следует верхняя оценка в (13). Еще раз применяя лемму 1, получаем верхнюю оценку в (10). Лемма доказана.

Замечание 3. Если предполагать с. в. X_k симметричными, то лемму 3 можно получить из теоремы сравнения Квапеня и Рыхлика [3, с. 243]. Нужно рассмотреть последовательность $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ симметричных независимых с. в. с одинаковым q-устойчивым распределением и сравнить с помощью этой теоремы хвосты распределений соответствующих сумм.

3. Еще одна лемма. Результат этого пункта является основой доказательства необходимости в теоремах 1 и 2.

Лемма 4. *Пусть* $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность симметричных н. о. р. с. в.,* $f(t)$ *— соответствующая х. ф.,* $0<p<q<2$. *Предположим, что выполняется* (4). *Тогда имеют место оценки* (8).

Верхняя оценка в (8) получается сразу. Действительно, по теореме Эссеена и Янсона верхняя оценка в (4) влечет верхнюю оценку в (5). Отсюда, согласно лемме 1, следует верхняя оценка в (8).

Таким образом, остается установить нижнюю оценку в (8). Нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Из верхней оценки в (4) вытекает, что последовательность $\{n^{-1/q}S_n\}_{k=1}^{\infty}$ компактна в смысле сходимости по распределению [2, с. 197-198]. Обозначим через V множество всех х. ф., соответствующих предельным распределениям этой последовательности. Пусть $f_n(t)$ есть х. ф. нормированной суммы $n^{-1/q}S_n$. Тогда

$$f_n(t)=[f(n^{-1/q}t)]^n. \tag{15}$$

Пусть $W=V\cup\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Через Y_h будем обозначать с. в. с характеристической функцией $h(t)$.

Предложение 3. *Пусть выполняются условия леммы* 4, $h_m\in W$ *и последовательность* Y_{h_m} *сходится к с. в.* Y *по распределению. Тогда*

$$\lim_{m\to\infty}M|Y_{h_m}|^p=M|Y|^p.$$

Доказательство. Как уже отмечалось, из условий леммы 4 вытекает верхняя оценка в (5). Лемма 3 и определение множества W позволяют заключить, что $P[|Y_h|\geqslant x]\leqslant vx^{-q}$ для всех $h\in W$ и $x\geqslant w$, где постоянные v, w не зависят от h. Отсюда и из условия $0<p<q$ легко следует нужное равенство [2, с. 197—198]. Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть выполняются условия леммы* 4. *Предположим, что для некоторых чисел* $0<\mu<\nu$ *имеет место равенство* $\sup\{f_n(t):\mu\leqslant t\leqslant\nu,\ n=1,2,\ldots\}=1$. *Тогда найдутся* $h\in W$ *и точка* $t_0\in[\mu,\nu]$ *такие, что* $h(t_0)=1$. *При этом х. ф.* $h(t)$ *невырождена.*

Доказательство. По условию существуют точки $t_k\in[\mu,\nu]$ и индексы $n(k)\nearrow\infty$ такие, что $f_{n(k)}(t_k)\to 1$. Так как последовательность $\{n^{-1/q}S_n\}$ компактна в смысле сходимости по распределению, то можно считать, что $t_k\to t_0\in[\mu,\nu]$ и $f_{n(k)}(t)\to h(t)\in W$ при всех $t\in R$. Отсюда следует равенство $h(t_0)=1$ [2, с. 206].

Поскольку с. в. X_k симметричны, то такова же и с. в. Y_h. Поэтому вырожденность $h(t)$ означает, что $Y_h=0$. Согласно предложению 3

$$\lim_{k\to\infty}M|n(k)^{-1/q}S_{n(k)}|^p=M|Y_h|^p=0.$$

Это противоречит (4). Предложение доказано.

Предложение 5. *В условиях леммы* 4 *найдется натуральное* m *такое, что* $\sup\{f_n(t):(2m)^{-1/q}\leqslant t\leqslant m^{-1/q},\ n=1,2,\ldots\}=\gamma<1$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда, согласно предложению 4, для каждого натурального m найдутся $h_m \in W$ и $t_m \in [(2m)^{-1/q}, m^{-1/q}]$ такие, что $h_m(t_m) = 1$. При этом h_m невырождены и, следовательно, являются х. ф. симметричных решетчатых распределений. Если a_m — максимальный шаг такого распределения, то [4. с. 20] $t_m \geqslant 2\pi/a_m$. Отсюда $a_m \geqslant 2\pi/t_m \geqslant 2\pi m^{1/q}$.

Условие (4) и предложение 3 позволяют заключить, что

$$0 < \inf\{M|Y_h|^p : h \in W\} \leqslant \sup\{M|Y_h|^p : h \in M\} < \infty. \quad (16)$$

Поэтому множество $\{Y_h : r \in W\}$ компактно в смысле сходимости по распределению. Значит найдется последовательность индексов $m(k)$ такая, что $h_{m(k)}(t) \to h(t)$ для всех $t \in R$. Так как максимальные шаги $a_{m(k)} \to \infty$, то, как нетрудно убедиться, $Y_h = 0$. Согласно предложению 3 $M|Y_{h_{m(k)}}|^p \to M|Y_h|^p = 0$. Это противоречит (16). Предложение доказано.

Следующее утверждение легко проверяется.

Предложение 6. *Пусть фиксированы числа* $0 < \mu < \nu$ *и индекс* m. *Существует* $\varepsilon > 0$, *такое, что*

$$(0, \varepsilon) \subset \bigcup_{n \geqslant m} [\mu n^{-1/q}, \nu n^{-1/q}].$$

Доказательство леммы 4. Из предложения 5 и (15) следует, что для некоторого натурального m и всех $t \in \mathcal{J} = [(2m)^{-1/q}, m^{-1/q}]$

$$[f(tn^{-1/q})]^n = f_n(t) \leqslant \gamma < 1, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $a = -\ln\gamma$. Тогда $a > 0$ и при всех $t \in \mathcal{J}$

$$|f(tn^{-1/q})| \leqslant \exp(-an^{-1}) = \exp(-a(tn^{-1/q})^q t^{-q}) \leqslant$$
$$\leqslant \exp(-am(tn^{-1/q})^q), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Согласно предложению 6 в объединении отрезков $\mathcal{J}_n = [(2mn)^{-1/q}, (mn)^{-1/q}]$, $n = 1, 2, \ldots$, содержится интервал $(0, \varepsilon)$. Если $t \in (0, \varepsilon)$, то $tn^{1/q} \in \mathcal{J}$ для некоторого n. Поэтому из предыдущего неравенства

$$|f(t)| = |f(n^{-1/q}(tn^{1/q}))| \leqslant \exp[-am(n^{-1/q}(tn^{1/q}))^q] = \exp(-amt^q).$$

Так как с. в. X_k симметричны, то $f(t)$ вещественная и четная. Значит $1 - f(t) \geqslant 1 - \exp(-am|t|^q)$ при $|t| \leqslant \varepsilon$. Это приводит к искомой нижней оценке. Лемма доказана.

Замечание 4. Условие симметричности в лемме 4 является существенным. Действительно, рассмотрим последовательность $X_k = 1$ п. н. и пусть $0 < p < q = 1$. Тогда выполняется (4), а нижняя оценка в (8) не имеет места.

4. Доказательство теорем 1 и 2. Необходимость. По теореме Эссеена и Янсона из (4) вытекает верхняя оценка в (5) и условия (2), (3). Установим нижнюю оценку в (5). Для этого покажем, что выполняется (8) и воспользуемся леммой 1.

Положим $Y_k = X_{2k} - X_{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Убедимся, что для этой последовательности выполняется (4). Верхняя оценка вытекает из соответствующей оценки для $\{X_k\}$ и неравенства $M|U+V|^p \leqslant \max\{2^{p-1}, 1\}(M|U|^p + M|V|^p)$ [2, с. 168].

Если $0 < p < 1$, то нижняя оценка следует из условия (6). При $p \geqslant 1$ эта оценка вытекает из (2) и следующего известного неравенства [2, с. 277]. Пусть с. в. U, V независимы, обладают конечным абсолютным моментом порядка $p \geqslant 1$ и $MU = 0$. Тогда $M|U+V|^p \geqslant M|V|^p$.

С. в. Y_k имеют х. ф. $|f(t)|^2$. По лемме 4 для $|f(t)|^2$ выполняются оценки (8). Имеем

$$1 - |f(t)|^2 = (1 - |f(t)|)(1 + |f(t)|) \leqslant 2(1 - \operatorname{Re} f(t)).$$

Отсюда следует искомая нижняя оценка для $1 - \operatorname{Re} f(t)$. Верхняя оценка в (8) вытекает из установленной выше верхней оценки в (5) и леммы 1. Теоремы 1 и 2 доказаны.

1. *Esseen C.-G., Janson S.* On moment conditions for normed sums of independent variables and martingal differences // Stochast. Process. and Appl.— 1985.— **19**, N 1.— P. 173—182.
2. *Лоэв М.* Теория вероятностей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 719 с.
3. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах.— М. : Наука, 1985.— 368 с.
4. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин.— М.: Наука, 1972.— 415 с.

ВЦ ДВНЦ АН СССР, Хабаровск

Получено 12.10.87