УДК 517

Л. И. Новаковская

Построение асимптотических решений для дифференциальных уравнений первого порядка со случайным запаздыванием

Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка со случайным запаздыванием исследованы достаточно полно в работах [1—3]. В работе [4] асимптотические методы нелинейной механики были распространены на некоторые классы дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом.

Настоящая статья посвящена исследованию влияния случайного запаздывания на колебательные процессы в нелинейных системах, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка. Для их изучения применяются широко известные асимптотические методы нелинейной механики [5, 6], а также метод Фоккера—Планка — Колмогорова [7, 8].

Рассмотрим колебательную систему, уравнение движения которой имеет вид

$$\dot{y}(t) + \alpha_1 y(t) + \alpha_2 y(t - \Delta(t)) + \alpha_3 \dot{y}(t - \Delta(t)) = \varepsilon f(y(t), y(t - \Delta(t)), \dot{y}(t), \dot{y}(t - \Delta(t))), \qquad (1)$$

где α_1, α_2, α_3 — постоянные величины, ε — малый положительный параметр, $f(y(t), y(t - \Delta(t)), \dot{y}(t), \dot{y}(t - \Delta(t)))$ — аналитическая по всем переменным нелинейная функция, $\Delta(t)$ — запаздывание, представляющее собой стационарный случайный процесс.

Следуя работам [1, 6], рассмотрим случай малых флюктуаций запаздывания, т. е. предположим, что

$$\Delta(t) = \Delta_0 + \varepsilon\xi(t, \varepsilon), \qquad (2)$$

где $\langle\Delta(t)\rangle > 0$, $\xi(t, \varepsilon)$ — стационарный случайный процесс, превращающийся в пределе при $\varepsilon \to 0$ в «белый шум» $\dot{\xi}(t)$ ($\langle\dot{\xi}(t)\rangle = 0$, $\langle\dot{\xi}(t)\dot{\xi}(t + \tau)\rangle = \delta(\tau)$), $\langle\ \rangle$ означают вероятностное усреднение, $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака.

Линейное уравнение

$$\dot{y}(t) + \alpha_1 y(t) + \alpha_2 y(t - \Delta_0) + \alpha_3 \dot{y}(t - \Delta_0) = 0 \qquad (3)$$

уравнения (1) (с учетом (2)) будет иметь периодическое решение вида

$$y(t) = a\cos\psi, \quad \psi = \omega t + \varphi$$

при условии, что частота ω удовлетворяет системе уравнений [4]

$$\begin{aligned} D_1(\omega) &= \omega - \alpha_1 \sin\omega\Delta_0 + \alpha_3\omega\cos\omega\Delta_0 = 0, \\ D_2(\omega) &= \alpha_1 + \alpha_2\cos\omega\Delta_0 + \alpha_3\omega\sin\omega\Delta_0 = 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

(a, φ — произвольные постоянные).

Решение уравнения (1), согласно работам [5, 6], будем искать с помощью асимптотического разложения

$$y(t) = a(t)\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots, \qquad (5)$$

где

$$\begin{aligned} da/dt &= \varepsilon A_1(a, a_\Delta) + \varepsilon^2 A_2(a, a_\Delta) + \dots, \\ d\psi/dt &= \omega + \frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a, a_\Delta) + \varepsilon^2 B_2(a, a_\Delta) + \dots, \\ a_\Delta &= a(t - \Delta(t)). \end{aligned} \qquad (6)$$

Функции $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi)$, ... являются периодическими по ψ с периодом 2π.

Подставив (5) (с учетом равенств (6)) в уравнение (1), разложив обе части уравнения по степеням ε и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, после некоторых преобразований получим следующие формулы для нахождения искомых функций:

$$v_0(a) = g_0(a)/(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \alpha_1 + \alpha_2 \neq 0, \tag{7}$$

$$\begin{cases} w_n(a) = \dfrac{g_n(a) D_1(n\omega) + h_n(a) D_2(n\omega)}{D_1^2(n\omega) + D_2^2(n\omega)}, \\ v_n(a) = \dfrac{g_n(a) D_2(n\omega) - h_n(a) D_1(n\omega)}{D_1^2(n\omega) + D_2^2(n\omega)}, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} A_1(a, a_\Delta) &= K_1(a, \omega) + R_1(a, \omega)\,\xi(t, \varepsilon), \\ B_1(a, a_\Delta) &= K_2(a, \omega) + R_2(a, \omega)\,\xi(t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$K_1(a, \omega) = \frac{g_1(a) D_1'(\omega) + h_1(a) D_2'(\omega)}{[D_1'(\omega)]^2 + [D_2'(\omega)]^2},$$

$$R_1(a, \omega) = \frac{D_1'(\omega)[D_1(\omega) - \omega] + D_2'(\omega)[D_2(\omega) - \alpha_1]}{[D_1'(\omega)]^2 + [D_2'(\omega)]^2}\, a\omega,$$

$$K_2(a, \omega) = \frac{g_1(a) D_2'(\omega) - h_1(a) D_1'(\omega)}{a\{[D_1'(\omega)]^2 + [D_2'(\omega)]^2\}},$$

$$R_2(a, \omega) = \frac{D_2'(\omega)[D_1(\omega) - \omega] - D_1'(\omega)[D_2(\omega) - \alpha_1]}{[D_1'(\omega)]^2 + [D_2'(\omega)]^2}\, \omega.$$

Здесь $g_n(a)$, $h_n(a)$ — коэффициенты разложения в ряде Фурье правой части уравнения (1), $v_n(a)$, $w_n(a)$, $n = 0, 2, 3, 4, \ldots,$— коэффициенты разложения в ряде Фурье функции $u_1(a, \psi)$. При этом $[D_1'(\omega)]^2 + [D_2'(\omega)]^2 \neq 0$, так как комплексные корни $\lambda = \pm i\omega$ являются простыми корнями характеристического уравнения линейного уравнения (3).

Тогда в первом улучшенном приближении будем иметь

$$y(t) = a(t)\cos(\omega t + \varphi) + \varepsilon u_1(a, \psi), \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} da/dt &= \varepsilon A_1(a, a_\Delta), \\ d\varphi/dt &= \varepsilon B_1(a, a_\Delta). \end{aligned} \tag{11}$$

Систему (11), следуя [1], будем называть системой стохастических уравнений в стандартной форме.

Найдем стационарные режимы колебания. Для исследования системы (11) применим аналитический метод уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова [7] для плотности совместного распределения амплитуды и фазы, которое, в данном случае, будет иметь вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a}[K_a W] - \frac{\partial}{\partial \varphi}[K_\varphi W] + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}[D_a W] + 2\frac{\partial^2}{\partial a \partial \varphi}[D_{a\varphi} W] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}[D_\varphi W]\right\}, \tag{12}$$

где $K_a = \varepsilon K_1(a, \omega)$, $K_\varphi = \varepsilon K_2(a, \omega)$, $D_a = \varepsilon^2 R_1^2(a, \omega)$, $D_\varphi = \varepsilon^2 R_2^2(a, \omega)$, $D_{a\varphi} = \varepsilon^2 R_1(a, \varphi) \cdot R_2(a, \varphi)$.

Плотность распределения амплитуды и фазы, следуя [7], должна удовлетворять условиям

$$W(a, \varphi, t) > 0, \quad \int_0^\infty \int_0^{2\pi} W(a, \varphi, t)\, da d\varphi = 1, \quad W(a, \varphi, 0) = \delta(a)\,\delta(\varphi),$$

$$W(-\infty, t) = W(+\infty, t) = 0. \tag{13}$$

Для нахождения плотности стационарного распределения амплитуды и фазы нужно решить уравнение

$$dW/dt = 0. \tag{14}$$

Как отмечалось в работах [1, 6], найти аналитическое решение уравнений (12), (14) в общем виде довольно трудно, но в большинстве случаев этот метод позволяет находить стационарные плотности вероятности исходя лишь из общего вида соответствующих уравнений движения системы. Для колебательных систем важным является вопрос о нахождении стационарной плотности распределения амплитуды $W(a)$, анализ которой дает возможность судить о распределении амплитуд и об их устойчивости. Устойчивым (неустойчивым) стационарным амплитудам, согласно [7], будут соответствовать точки, в которых стационарная плотность амплитуды достигает максимума (минимума). Плотность стационарного распределения амплитуды удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial a}[K_a W] = 1/2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a^2}[D_a W] \right\} \tag{15}$$

и не зависит от начального распределения.

Пример 1. Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) + x(t - \Delta(t)) = \varepsilon (c_0 + c_2 x^2(t))\, \dot{x}(t - \Delta(t)). \tag{16}$$

В работе [4] были найдены асимптотические разложения уравнения (16) в случае, когда $\Delta(t) = \Delta_0 = \Pi/2$. Положим

$$\Delta(t) = \Pi/2 + \varepsilon \xi(t, \varepsilon). \tag{17}$$

Тогда получим уравнение

$$\dot{x}(t) + x(t - \Pi/2 - \varepsilon\xi(t, \varepsilon)) = \varepsilon (c_0 + c_2 x^2(t))\, \dot{x}(t - \Pi/2 - \varepsilon\xi(t, \varepsilon)). \tag{18}$$

В первом приближении согласно формулам (9), (11) имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} da/dt &= \varepsilon \frac{c_0 a + c_2 a^3 3/4}{s(\Pi)} + \frac{\varepsilon}{s(\Pi)} a \xi(t, \varepsilon), \\ d\varphi/dt &= -\frac{\varepsilon\Pi}{2} \frac{c_0 + c_2 a^2 3/4}{s(\Pi)} + \frac{\varepsilon\Pi}{2s(\Pi)} \xi(t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{19}$$

где $s(\Pi) = 1 + \Pi^2/4$.

Стационарная плотность распределения амплитуды $W(a)$ (15), удовлетворяющая условию

$$W(a) > 0,\ W'(\infty) = 0,\ W(\infty) = 0, \int_0^\infty W(a)\, da = 1, \tag{20}$$

является решением уравнения (с учетом первого уравнения системы (19))

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{c_0 a + c_2 a^3 3/4}{s(\Pi)} W(a) \right] = \frac{\varepsilon^2}{2s^2(\Pi)} \frac{\partial^2 (a^2 W)}{\partial a^2}. \tag{21}$$

Решив уравнение (21), найдем $W(a)$:

$$W(a) = C a^{1/\varepsilon[2s(\Pi)c_0] - 2} e^{\frac{3}{4\varepsilon} c_2 a^2 s(\Pi)}, \tag{22}$$

$$C = \left[\int_0^\infty a^{\frac{2s(\Pi)c_0}{\varepsilon} - 2} e^{\frac{3c_2}{4\varepsilon} a^2 s(\Pi)} da \right]^{-1}. \tag{23}$$

Из формулы (22) следует, что плотность распределения амплитуды стремится к нулю, если $c_2 < 0$. Кроме того, при значении

$$a = \sqrt{-4c_0/3c_2 + 4\varepsilon/3c_2 s(\Pi)} \tag{24}$$

$W(a)$ имеет единственный максимум. Следовательно, в системе (18) могут быть устойчивые стационарные колебания с амплитудой (24).

Уравнение (18) в первом улучшенном приближении имеет устойчивое стационарное решение вида

$$x(t) = a\cos(t + \varphi) + \varepsilon u_1(a, \psi), \tag{25}$$

где

$$a = \sqrt{-4c_0/3c_2 + 4\varepsilon/3c_2 s(\Pi)},$$

$$d\varphi/dt = \varepsilon\Pi\xi(t, \varepsilon)/2s(\Pi), \tag{26}$$

$$u_1(a, \psi) = 1/16 c_2 a^3 \sin 3(\varphi + t). \tag{27}$$

Пример 2. Изучим влияние случайного запаздывания на динамику развития популяций, описываемую логистическим уравнением [9]

$$\dot{N}(t) = r\left[1 - \frac{N(t-h)}{K}\right]N(t). \tag{28}$$

Сделаем замену $N(t) = K[1 + x(t)]$ и нормировку времени $t = ht'$. Тогда получим уравнение

$$\dot{x}(t') + rh[1 + x(t')]\,x(t'-1) = 0. \tag{29}$$

В работе [10] были построены стационарные периодические решения уравнения (29) методом малого параметра при условии

$$rh - \Pi/2 = \varepsilon^2\alpha \tag{30}$$

(α — постоянный положительный параметр).

Далее в уравнении (29) сделаем нормировку времени $t' = t''/rh$ и, обозначив новое время t'' снова буквой t, получим уравнение

$$\dot{x}(t) = -x(t - rh) - x(t)\,x(t - rh), \tag{31}$$

где $x(t - rh)$ — аналитическая функция аргумента rh.

Функцию $x(t - rh)$ разложим в ряд Тейлора (по степеням ε). Следуя работе [10] положим

$$x(t) = \varepsilon x_1(t). \tag{32}$$

Подставив равенства (30), (32) в уравнение (31) и пренебрегая членами более высокого порядка малости, получим уравнение

$$\dot{x}(t) + x(t - \Delta(t)) = -\varepsilon x(t)\,x(t - \Delta(t)) + \varepsilon^2\alpha\dot{x}(t - \Delta(t)),\ \ \Delta(t) = \Delta_0 = \Pi/2. \tag{33}$$

Пусть

$$\Delta(t) = \Pi/2 + \varepsilon^2\xi(t, \varepsilon). \tag{34}$$

Тогда уравнение (33) примет вид

$$\dot{x}(t) + x(t - \Pi/2 - \varepsilon^2\xi(t, \varepsilon)) = -\varepsilon x(t)\,x(t - \Pi/2 - \varepsilon^2\xi(t, \varepsilon)) + $$

$$+ \varepsilon^2\alpha\dot{x}(t - \Pi/2 - \varepsilon^2\xi(t, \varepsilon)). \tag{35}$$

В первом приближении, согласно формулам (9), (11), имеем следующую систему стохастических дифференциальных уравнений:

$$da/dt = \varepsilon^2\left\{\frac{a^3}{20}\left[1 - \frac{3\Pi}{2}\right] + \alpha a - a\xi(t, \varepsilon)\right\}/s(\Pi), \tag{36}$$

$$d\varphi/dt = \varepsilon^2\left\{\alpha\frac{\Pi}{2} - \frac{a^2}{20}\left[3 + \frac{\Pi}{2}\right] + \frac{\Pi}{2}\omega\xi(t, \varepsilon)\right\}/s(\Pi). \tag{37}$$

Использовав уравнение (15) и уравнение (36), найдем стационарную плотность распределения амплитуды $W(a)$:

$$W(a) = Ca^{\frac{2\alpha}{\varepsilon^2}s(\Pi) - 2}\, e^{\frac{a^2}{20\varepsilon^2}\left(1 - \frac{3\Pi}{2}\right)s(\Pi)}. \tag{38}$$

Из формулы (38) следует, что при значении

$$a = \sqrt{20\alpha / \left(\frac{3\Pi}{2} - 1\right) - 20\varepsilon^2 / \left(\frac{3\Pi}{2} - 1\right) s(\Pi)} \qquad (39)$$

$W(a)$ имеет единственный максимум. Следовательно, в системе, описываемой уравнением (35), могут быть устойчивые стационарные колебания с амплитудой (39).

1. *Коломиец В. Г., Кореневский Д. Г.* О возбуждении колебаний в нелинейных системах со случайным запаздыванием // Укр. мат. журн.— 1966.— **18**, № 3.— С. 51—57.
2. *Кореневский Д. Г., Коломиец В. Г.* Некоторые вопросы теории нелинейных колебаний квазилинейных систем со случайным запаздыванием // Мат. физика.— 1967.— Вып. 3.— С. 91—113.
3. *Коломієць В. Г., Кореневський Д. Г.* Одночастотні коливання в нестаціонарних системах з випадковим запізненням // Допов. УРСР.— 1967.— № 1.— С. 28—30.
4. *Новаковская Л. И.* О построении осциллирующих решений нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн.— 1981.— **33**, № 4.— С. 528—534.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 501 с.
6. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев : Вища шк., 1979.— 250 с.
7. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С., Витт А. А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // Собр. тр. А. А. Андронова.— М. : Изд-во АН СССР, 1956.— С. 142—160.
8. *Коломиец В. Г.* О параметрическом случайном воздействии на линейные и нелинейные колебательные системы // Укр. мат. журн.— 1963.— **15**, № 2.— С. 199—205.
9. *Колесов Ю. С., Швитра Д. И.* Роль запаздывания в математических моделях экологии // Лит. мат. сб.— 1979.— **19**, № 1.— С. 114—127.
10. *Gumowski J.* Sensitivity of certain dynamics systems with respect to a small delay // Automatica.— 1974.— **10**, № 6.— P. 659—674.

Дальневост. ун-т, Владивосток

Получено 04.11.87