УДК 517.966.4

О. А. Кузенков, В. И. Плотников

Об одном свойстве системы собственных функций на границе области и его приложениях

Известно, что для произвольной полной ортонормированной в некотором пространстве системы функций справедливо уравнение замкнутости. В [1] было показано, что для следов системы собственных функций эллиптического оператора второго порядка в $W_2^1(\Omega)$ на границе Σ области Ω справедлив некоторый аналог этого уравнения в пространстве $L_2(\Sigma)$, хотя они и не представляют ортонормированную систему в $L_2(\Sigma)$. Отмеченный факт играет большую роль при исследовании третьей краевой задачи для параболического уравнения: в доказательстве разрешимости ее методом Фурье, в выводе энергетического неравенства [1], в построении решения ряда оптимизационных задач [2]—[3]. Здесь это свойство обобщается на случай сильно эллиптического оператора порядка $2m$ и приводятся некоторые его приложения.

Будем изучать симметричный линейный сильно эллиптический оператор L порядка $2m$

$$Lu \equiv \sum_{|i|,|j|\leqslant m} (-1)^{|j|} D^j (A^{(i,j)} D^j u),$$

заданный на классе вектор-функций $u(x)$ размерности N, удовлетворяющих краевым условиям

$$G_i u|_\Sigma \equiv (\tilde{G}_i + \alpha_i H_i) u|_\Sigma = 0 \quad i = \overline{0, m-1}.$$

Здесь $x=(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset R^n$, Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей Σ; i, j — мультииндексы: $i=(i_1, \ldots, i_s)$, $|i|=s$, $D^i=\partial^s/\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\tilde{G}_i$, H_i, G_i — линейные дифференциальные операторы

$$\tilde{G}_i u \equiv \sum_{|j| \leqslant 2m-1-i} G_{ij}(x) D^j u, \quad H_i u \equiv \sum_{|j| \leqslant i} H_{ij}(x) D^j u,$$

$A^{(i,j)}(x)$, $G_{ij}(x)$, $H_{ij}(x)$ — матрицы размерности $N \times N$, составленные из измеримых ограниченных функций.

Операторы $\{H_i\}$ образуют систему Дирихле порядка $m-1$, операторы $\{\tilde{G}_i\}$ формально сопряжены $\{H_i\}$ относительно L и формулы Грина [4, 5]

$$\int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leqslant m} D^j \Phi' A^{(i,j)} D^i u d\Omega = \int_\Omega \Phi' L u d\Omega - \sum_{i=0}^{m-1} \int_\Sigma \tilde{G}_i u H_i \Phi d\Sigma.$$

Рассмотрим обобщенную спектральную проблему для оператора L: найти такие нетривиальные функции $v(x) \in W_2^m(\Omega)$ и действительные значения λ, чтобы выполнялось интегральное тождество

$$D(\Phi, v) \equiv \int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leqslant m} D^j \Phi' A^{(i,j)} D^i v d\Omega + \int_\Sigma \sum_{i=0}^{m-1} H_i \Phi \alpha_i H_i v d\Sigma = \lambda \int_\Omega \Phi' B v d\Omega \equiv$$

$$\equiv \lambda B(\Phi, v) \qquad \forall \Phi \in W_2^m(\Omega),$$

B — фиксированная положительно определенная матрица размерности $N \times N$.

Пусть для L выполняется условие

$$D(v, v) \geqslant \nu \|v\|^2 - \lambda_0 B(v, v)$$

при некоторых $\nu > 0$, $\lambda_0 \geqslant 0$, $\forall v \in W_2^m(\Omega)$, где $\|v\|$ — норма в $W_2^m(\Omega)$. Некоторые алгебраические соотношения для коэффициентов операторов L, H_i, обеспечивающие выполнение этого условия, приведены в [4]. Тогда $\tilde{D}(v, \Phi) \equiv D(v, \Phi) + \lambda_0 B(v, \Phi)$ представляет собой скалярное произведение в $W_2^m(\Omega)$, а $(\tilde{D}(v, v))^{1/2}$ — норму в $W_2^m(\Omega)$, эквивалентную обычной $\|v\|$.

Существует счетная последовательность собственных значений λ_k оператора $L: \lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$, $\lambda_{k+1} \geqslant \lambda_k$ и соответствующая ей последовательность собственных функций $v_k(x)$, полная ортонормированная в $L_2(\Omega)$ с весом B. Они могут быть получены прямыми методами вариационного исчисления. Система функций $v_k^* = (\lambda_k + \lambda_0)^{-1/2} v_k$ является полной ортонормированной в $W_2^m(\Omega)$ относительно нормы $(\tilde{D}(v, v))^{1/2}$. Займемся изучением свойств $\{v_k\}$ на границе Σ.

Теорема. *Для любого набора функций $g_i \in L_2(\Sigma)$, $i=\overline{0, m-1}$, существует функция $g^* \in W_2^m(\Omega)$, однозначно определяемая набором g_i, такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \lambda_0)^{-1} \Big(\int_\Sigma \sum_{i=0}^{m-1} g_i H_i v_k d\Sigma\Big)^2 = \tilde{D}(g^*, g^*) \leqslant c \sum_{i=0}^{m-1} \int_\Sigma g_i^2 d\Sigma,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \lambda_0)^{-2} \Big(\int_\Sigma \sum_{i=0}^{m-1} g_i H_i v_k d\Sigma\Big)^2 = B(g^*, g^*). \tag{1}$$

Доказательство. Выражение $g(v) = \sum_{i=0}^{m-1} \int_\Sigma g_i H_i v d\Sigma$, $v \in W_2^m(\Omega)$, при фиксированных g_i является линейным непрерывным функционалом в $W_2^m(\Omega)$. Поэтому по теореме Рисса существует элемент $g^* \in W_2^m(\Omega)$, однозначно определяемый функциями g_i, такой, что $\forall v \in W_2^m(\Omega)$ $g(v) = \tilde{D}(g^*, v)$.

Известно, что $\| g \|^2 = \tilde{D}(g^*, g^*)$. С другой стороны, по теореме вложения

$$|g(v)|^2 \leqslant c_1 \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\Sigma} g_i^2 d\Sigma \int_{\Sigma} \sum_{|j|\leqslant i} (D^j v)^2 d\Sigma \leqslant c_2 \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\Sigma} g_i^2 d\Sigma \int_{\Omega} \sum_{|j|\leqslant m} (D^j v)^2 d\Omega =$$

$$= c_2 \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\Sigma} g_i^2 d\Sigma \| v \|^2.$$

По определению нормы функционала $\tilde{D}(g^*, g^*) \leqslant c_2 \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\Sigma} g_i^2 d\Sigma$. В силу того, что $\forall k \ v_k^* \in W_2^m(\Omega)$

$$\int_{\Sigma} \sum_{i=0}^{m-1} g_i H_i v_k^* d\Sigma = \tilde{D}(g^*, v_k^*),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{D}(g^*, v_k^*))^2 = \tilde{D}(g^*, g^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_{\Sigma} \sum_{i=0}^{m-1} g_i H_i v_k^* d\Sigma \Big)^2,$$

откуда непосредственно следует (1).

Аналогично [1] на основании неравенства (1) можно обосновать сходимость метода Фурье для решения начально-краевой задачи для сильно параболического векторного уравнения

$$Bu_t + Lu = f(x, t), \quad G_i u|_S = g_i(x, t), \quad i = \overline{0, m-1}, \quad u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$t \in (0, T), \quad S = \Sigma \times (0, T), \quad Q = \Omega \times (0, T) \tag{2}$$

Теорема. *Пусть $f \in L_2(Q)$, $g_i \in L_2(S)$, $\varphi \in L_2(\Omega)$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (2) в $V_2^{m,0}(Q)$, причем оно может быть получено методом Фурье в виде ряда $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) v_k(x)$, где*

$$a_k(t) = B(\varphi, v_k) \exp(-\lambda_k t) + \int_0^t \int_{\Omega} f v_k \exp(-\lambda_k (t-\tau))\, d\Omega d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{\Sigma} \sum_{i=0}^{m-1} g_i H_i v_k \exp(-\lambda_k (t-\tau))\, d\Sigma d\tau.$$

Это решение удовлетворяет энергетическому неравенству

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \| u(x, t) \|_{2,\Omega}^2 + \Big\| \sum_{|i|\leqslant m} D^i u \Big\|_{2,Q}^2 \leqslant c \Big\{ \| \varphi \|_{2,\Omega}^2 + \| f \|_{2,Q}^2 + \sum_{i=0}^{m-1} \| g_i \|_{2,S}^2 \Big\}.$$

Особенностью теоремы существования являются весьма слабые предположения о свободных членах граничных условий, а именно $g_i \in L_2(S)$. Соответственно энергетическое неравенство приобретает более сильную форму по сравнению, например, с [4]. Это удобно для постановки и решения ряда оптимизационных задач. В построении решения таких задач оценка (1) может быть использована аналогично [2, 3].

1. *Плотников В. И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. Мат.— 1968.— **32**, № 4.— С. 743—755.
2. *Плотников В. И.* О сходимости конечномерных приближений // Журн. вычислит. математики и мат. физики.— 1968.— **8**, № 1.— С. 136—157.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами.— М. : Наука, 1978.— 464 с.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М. : Мир, 1971.— 372 с.
5. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложениях // Мат. сб.— 1969.— **78**, № 3.— С. 446—472.

НИИприкл. математики и кибернетики
при Горьк. ун-те

Получено 16.05.88