УДК 513.71

Н. П. Конева

Два предложения о конгруэнциях биаксиального пространства

Биаксиальным пространством гиперболического типа называется трехмерное точечное пространство, в котором выделена подгруппа коллинеаций, сохраняющая линейную конгруэнцию прямых гиперболического типа (назовем ее абсолютной).

Пусть абсолют биаксиального пространства составляют прямые l_1 и l_2 (они называются директрисами абсолютной конгруэнции). Репер пространства выбираем таким же образом, как и в работе [1]. Пусть ребра тетраэдра A_1A_3, A_2A_4 принадлежат абсолютной конгруэнции. Вершины A_1, A_3 и A_2, A_4 совместим с точками, гармонически сопряженными относительно пар точек пересечения с директрисами абсолютной конгруэнции l_1, l_2. Пронормируем координаты точек A_3, A_4 так, чтобы точки пересечения ребер тетраэдра A_1A_3, A_2A_4 с директрисами абсолютной конгруэнции имели, соответственно, координаты

$$P_1 = A_1 + A_3, \quad Q_1 = A_2 + A_4,$$
$$P_2 = A_1 - A_3, \quad Q_2 = A_2 - A_4.$$

Инфинитезимальные преобразования тетраэдра, соответствующие переходу от одного луча к другому, определяются такой системой равенств: $dA_i = \omega_i^k A_k$, $i, k = 1, 2, 3, 4$, где ω_i^k — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k], \ i, j = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Уравнения структуры биаксиального пространства гиперболического типа составляют уравнения (1) и уравнения, полученные из условия стационарности прямых l_1, l_2:

$$\omega_2^4 - \omega_4^2 = 0, \quad \omega_3^4 - \omega_1^2 = 0,$$

$$\omega_1^3 - \omega_3^1 = 0, \quad \omega_4^3 - \omega_2^1 = 0,$$

$$\omega_2^3 - \omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^3 - \omega_1^1 = 0,$$

$$\omega_3^2 - \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^2 - \omega_4^4 = 0.$$

Пусть K — некоторая конгруэнция, отличная от абсолютной. Вершины A_1, A_2 подвижного тетраэдра совместим с фокусами текущего луча конгруэнции l. В таком случае главными формами бесконечно малых перемещений тетраэдра будут формы ω_2^3, ω_1^4, ω_1^3, ω_2^4 и дифференциальные уравнения конгруэнции можно записать в виде

$$\omega_1^3 = \alpha\omega_1^4, \quad \omega_2^4 = \gamma\omega_2^3. \tag{2}$$

Продолжением системы уравнений (2) будет такая система:

$$\begin{gathered} d\alpha + \alpha(\omega_1^1 - \omega_2^2) + \omega_2^1 - \alpha^2\omega_1^2 = a\omega_1^4 + b\omega_2^3, \\ (\alpha\gamma - 1)\,\omega_1^2 = b\omega_1^4 + c\omega_2^3, \\ d\gamma + \gamma(\omega_2^2 - \omega_1^1) + \omega_1^2 - \gamma^2\omega_2^1 = A\omega_2^3 + B\omega_1^4, \\ (\alpha\gamma - 1)\,\omega_2^1 = B\omega_2^3 + P\omega_1^4. \end{gathered} \tag{3}$$

В первой дифференциальной окрестности луча конгруэнции выделяется единственный инвариант [1, 2]

$$J = \alpha\gamma. \tag{4}$$

Если еще раз продлить систему уравнений (3), то во второй дифференциальной окрестности луча конгруэнции выделяются такие инварианты [2]:

$$b,\ B,\ ac,\ aA,\ AP,\ cP. \tag{5}$$

В работе [1] дано определение граничных точек луча конгруэнции в биаксиальном пространстве гиперболического типа. Это определение вводится посредством стрикционных точек [3] линейчатых поверхностей конгруэнции, которые определяются как точки пересечения лучами абсолютной конгруэнции двух бесконечно близких образующих линейчатой поверхности. Произвольная линейчата поверхность конгруэнции Σ, проходящая через луч A_1A_2, определяется уравнениями (2) и равенством

$$\omega_1^4 = k\omega_2^3. \tag{6}$$

Пусть луч абсолютной конгруэнции пересекает луч A_1A_2 в точке $M = A_1 + tA_2$. Тогда уравнение точек пересечения лучей абсолютной конгруэнции с A_1A_2, $A_1'A_2'$ ($A_i' = A_i + dA_i$, $i = 1, 2$) имеет вид

$$t^2 + t(k\alpha - \gamma) - k = 0. \tag{7}$$

Это и есть уравнение стрикционных точек линейчатой поверхности Σ. Пары стрикционных точек всех поверхностей конгруэнции, которые проходят через данный ее луч, принадлежат одной инволюции, двойные точки которой являются граничными точками луча конгруэнции. Граничные точки луча конгруэнции (2) определяются уравнением [1] $\alpha x^2 - 2x + \gamma = 0$.

Главными поверхностями конгруэнции назовем те линейчатые поверхности конгруэнции, у которых двойные стрикционные точки. Они совпадают с граничными точками луча конгруэнции [1].

Выделим среди линейчатых поверхностей конгруэнции (2), (6) главные. Если дискриминант уравнения (4) равен нулю, то стрикционные точки поверхности будут двойными, и главные поверхности конгруэнции будут определяться таким уравнением:

$$\alpha^2k^2 - 2k(\alpha\gamma - 2) + \gamma^2 = 0. \tag{8}$$

Уравнения асимптотических линий на первой и второй фокальных поверхностях конгруэнции имеют вид

$$a(\omega_1^4)^2 - c(\omega_2^3)^2 = 0,$$
$$P(\omega_1^4)^2 - A(\omega_2^3)^2 = 0. \tag{9}$$

Как известно [4], конгруэнция является конгруэнцией W, если асимптотические линии на ее фокальных поверхностях соответствуют. Условие соответствия асимптотических линий на фокальных поверхностях конгруэнции имеет такой вид:

$$aA - Pc = 0. \tag{10}$$

В евклидовом пространстве найдено соотношение между кривизнами фокальных поверхностей конгруэнции W и расстоянием между граничными точками луча конгруэнции, полностью характеризующее конгруэнцию W. Приведем формулировку этой теоремы [4]: произведение кривизн двух фокальных поверхностей конгруэнции W в точках касания одного луча равно обратной величине четвертой степени расстояния между граничными точками луча.

Покажем, что аналогичная теорема имеет место в биаксиальном пространстве гиперболического типа.

Определение кривизны поверхности введем так же, как и в евклидовом пространстве, посредством квадратичных форм поверхности. Второй квадратичной формой поверхности назовем левую часть уравнения асимптотических линий, а первой — левую часть уравнения линий, которые высекают главные поверхности конгруэнции на ее фокальных поверхностях. Пусть Ψ — первая квадратичная форма поверхности (она одна и та же для обеих фокальных поверхностей конгруэнции), Φ_1 — вторая квадратичная форма первой фокальной поверхности конгруэнции, Φ_2 — вторая квадратичная форма второй фокальной поверхности конгруэнции. Тогда

$$\Psi = \alpha^2(\omega_1^4)^2 - 2(\alpha\gamma - 2)\omega_1^4\omega_2^3 + \gamma^2(\omega_2^3)^2,$$
$$\Phi_1 = a(\omega_1^4)^2 - c(\omega_2^3)^2,$$
$$\Phi_2 = P(\omega_1^4)^2 - A(\omega_2^3)^2.$$

Формы Ψ, Φ_1, Φ_2 инвариантны относительно преобразований стационарной подгруппы.

Полной кривизной фокальной поверхности конгруэнции назовем величину $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$, где $L_1 = a$, $N_1 = -c$, $M_1 = 0$ для первой фокальной поверхности конгруэнции, $L_2 = P$, $N_2 = -A$, $M_2 = 0$ для второй, и $E = \alpha^2$, $F = \alpha\gamma - 2$, $G = \gamma^2$ для обеих фокальных поверхностей конгруэнции. В таком случае полные кривизны K_1, K_2 фокальных поверхностей конгруэнции, описываемой лучом A_1A_2, определяются так:

$$K_1 = \frac{ac}{4(1-\alpha\gamma)}, \quad K_2 = \frac{AP}{4(1-\alpha\gamma)}. \tag{11}$$

Величины K_1 и K_2 являются инвариантами конгруэнции, так как ac, AP — инварианты второй дифференциальной окрестности луча конгруэнции (3), а $\alpha\gamma$ — нивариант первой дифференциальной окрестности луча конгруэнции. Если a или c, A или P равны нулю, то соответствующая фокальная поверхность становится развертывающейся [2], и $K_1 = 0$ или $K_2 = 0$. В изучаемом биаксиальном пространстве для конгруэнции W справедливо равенство (10). Поэтому для конгруэнции W имеем

$$K_1K_2 = \frac{1}{16}\left(\frac{cP}{1-\alpha\gamma}\right)^2.$$

Если в это выражение подставить $(1 - \alpha\gamma)$, найденное через U-сложное отношение фокусов луча конгруэнции и граничных точек луча, то для конгруэнции W получим

$$K_1K_2=\frac{1}{16}\,\frac{(cP)^2}{\left(\dfrac{U-1}{U+1}\right)^4},\quad U=\frac{1+\sqrt{1-\alpha\gamma}}{1-\sqrt{1-\alpha\gamma}}.$$

Из изложенного выше следует т е о р е м а: *произведение полных кривизн фокальных поверхностей конгруэнции W в биаксиальном пространстве гиперболического типа равно* 1/16 *отношения квадрата инварианта второй дифференциальной окрестности луча конгруэнции к четвертой степени инварианта первой дифференциальной окрестности луча конгруэнции, являющегося функцией сложного отношения фокусов и граничных точек луча конгруэнции.*

Приведем геометрические значения инвариантов ac и AP. Для этого нормализуем фокальные поверхности конгруэнции таким же образом, как это сделано в [5]. Нормалью первого рода фокальной поверхности конгруэнции в точке M_0 назовем луч абсолютной конгруэнции, проходящий через эту точку. Тогда нормалью первого рода первой фокальной поверхности конгруэнции в точке A_1 будет луч A_1A_3, а нормалью первого рода второй фокальной поверхности конгруэнции в точке A_2 — луч A_2A_4. Касательная плоскость в точке M_0 фокальной поверхности конгруэнции пересекает директрисы абсолютной конгруэнции в точках M, N. Следуя терминологии, введенной А. П. Норденом, назовем прямую MN нормалью второго рода фокальной поверхности конгруэнции в точке M_0. Нормалью второго рода первой фокальной поверхности конгруэнции в точке A_1 будет прямая L_1L_1', где точки L_1, L_1' определяются таким образом:

$$L_1=\alpha(A_1+A_3)+A_2+A_4,$$
$$L_1'=\alpha(A_1-A_3)+A_2-A_4.$$

Нормалью второго рода фокальной поверхности конгруэнции в точке A_2 будет прямая L_2L_2', где

$$L_2=A_1+A_3+\gamma(A_2+A_4),$$
$$L_2'=A_1-A_3+\gamma(A_2-A_4).$$

О п р е д е л е н и е. *Линии, которые высекают на фокальных поверхностях конгруэнции развертывающиеся поверхности, описываемые нормалями первого рода, назовем линиями кривизны первого рода фокальных поверхностей конгруэнции, а линии, которые высекают на фокальных поверхностях конгруэнции развертывающиеся поверхности, описываемые нормалями второго рода, назовем линиями кривизны второго рода.*

Линии кривизны первого рода фокальных поверхностей конгруэнции (2) определяются такими равенствами:

$$(b^2-(1-\alpha\gamma)^2)(\omega_1^4)^2+2bc\omega_1^4\omega_2^3+c^2(\omega_2^3)^2=0,$$
$$(B^2-(1-\alpha\gamma)^2)(\omega_2^3)^2+2BP\omega_1^4\omega_2^3+P^2(\omega_1^4)^2=0.$$

Эти кривые будут плоскими, так как они образуются от пересечения пучков плоскостей с осями на директрисах абсолютной конгруэнции l_1, l_2 с фокальными поверхностями конгруэнции.

Рассмотрим четверку прямых, а именно, касательных в точке A_1 к кривым фокальной сети на первой фокальной поверхности конгруэнции и касательных к линиям кривизны первого рода в точке A_1. Кривые фокальной сети на фокальных поверхностях конгруэнции (2) определяются такими уравнениями: $\omega_1^4=0$, $\omega_2^3=0$. Обозначим через V_1, V_2 сложное отношение рассматриваемой выше четверки прямых для первой и второй фокальных поверхностей конгруэнции. Тогда

$$V_1=\frac{b+\alpha\gamma-1}{b-\alpha\gamma+1},\quad V_2=\frac{B+\alpha\gamma-1}{B-\alpha\gamma+1}. \tag{12}$$

В работе [2] найден инвариант поверхности в биаксиальном пространстве гиперболического типа как сложное отношение такой четверки прямых: прямых, касательных к асимптотическим линиям поверхности в точке M_0 и касательных к линиям кривизны первого рода в этой же точке. Для фокальных поверхностей изучаемой конгруэнции инварианты этих поверхностей (обозначим их через W_1 и W_2) определяются посредством таких формул:

$$W_1 = \frac{(\alpha\gamma - 1 - \sqrt{ac})^2 - b^2}{(\alpha\gamma - 1 + \sqrt{ac})^2 - b^2}, \quad W_2 = \frac{(\alpha\gamma - 1 - \sqrt{AP})^2 - B^2}{(\alpha\gamma - 1 + \sqrt{AP})^2 - B^2}. \tag{13}$$

Инварианты второй дифференциальной окрестности луча конгруэнции b, B, ac, AP можно найти из (12), (13) и подставить их значения в (11), что и определит геометрическое значение полных кривизн фокальных поверхностей конгруэнции. Как известно [4], конгруэнции W обладают в каждом луче соприкасающимся линейным комплексом. Рассмотрим в биаксиальном пространстве гиперболического типа конгруэнцию W, обладающую в каждом луче специальным соприкасающимся линейным комплексом. Уравнение соприкасающегося линейного комплекса к конгруэнции W (определяемой системами уравнений (2), (3) и условием (10)) имеет вид

$$\alpha p^{13} + p^{14} - \frac{\gamma c}{A} p^{42} + \frac{c}{A} p^{23} - \frac{1}{\alpha\gamma - 1}\left(B\frac{c}{A} - b\right) p^{12} = 0, \tag{14}$$

где p^{ij} — плюккеровы координаты луча комплекса. Этот комплекс будет специальным, если $c/A = 0$. Отсюда следует

$$c = 0, \quad A \neq 0, \tag{15}$$

а из условия (10) получаем

$$a = 0. \tag{16}$$

Конгруэнция W, обладающая в каждом луче специальным соприкасающимся линейным комплексом, характеризуется такими свойствами:

1) первая фокальная поверхность такой конгруэнции — развертывающаяся; это следует из (15) или (16) (см. [2]);

2) рассматриваемая конгруэнция существует с произволом в одну функцию двух аргументов; действительно, продлив систему уравнений (3), с учетом (15), (16) получим

$$-db + \left(\frac{2\alpha b^2}{\alpha\gamma - 1} - \alpha(\alpha\gamma - 1) + \frac{\alpha bB}{\alpha\gamma - 1} + \frac{\gamma bP}{\alpha\gamma - 1}\right)\omega_1^4 = x_1\omega_2^3,$$

$$-db + \left(\frac{2\gamma b^2}{\alpha\gamma - 1} - \gamma(\alpha\gamma - 1)\right)\omega_2^3 = y_1\omega_1^4,$$

$$2A(\omega_1^1 - \omega_2^2) - dA + \left(\frac{3\gamma AP}{\alpha\gamma - 1} - \frac{2\gamma B^2}{\alpha\gamma - 1} - \gamma(1 - \alpha\gamma) + \frac{\alpha AB}{\alpha\gamma - 1} - \right.$$
$$\left. - \frac{\gamma bB}{\alpha\gamma - 1}\right)\omega_1^1 = x_2\omega_1^4 + y_2\omega_2^3,$$

$$-dB = y_2\omega_1^4 + z_1\omega_2^3,$$

$$2P(\omega_2^2 - \omega_1^1) - dP + \left(\frac{-\gamma BP}{\alpha\gamma - 1} + \frac{2\gamma bP}{\alpha\gamma - 1} - \frac{\alpha bB}{\alpha\gamma - 1} + \frac{\alpha AP}{\alpha\gamma - 1} - \right.$$
$$\left. - \frac{2\alpha B^2}{\alpha\gamma - 1} + \alpha(1 - \alpha\gamma)\right)\omega_2^3 = z_2\omega_2^3 + y_3\omega_1^4,$$

$$N = 5, \quad q = 4, \quad S_1 = 3, \quad S_2 = q - S_1 = 1, \quad S_3 = 0,$$
$$Q = S_1 + 2S_2 = 5, \quad Q = N.$$

Система в инволюции и ее решение существует с произволом в одну функцию двух аргументов.

1. *Кованцов М. I., Боровецъ Г. М., Любарецъ Н. М.* До теорії лінійчатих многостатностей у біаксіальному просторі // Вісн. Київ. ун-ту.— 1964.— № 6.— С. 14—18.
2. *Конева Н. П.* Конгруэнции прямых в биаксиальном пространстве гиперболического типа.— Киев, 1982.— 18 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 6486-82.
3. *Кованцов М. I., Боровецъ Г. М., Любарецъ Н. М.* До теорії лінійчатих многостатностей у біаксіальному просторі, поверхні // Вісн. Київ. ун-ту.— 1965.— № 7.— С. 25—31.
4. *Фиников С. П.* Теория конгруэнций.— М. : Гостехиздат, 1956.— 443 с.
5. *Норден А. П.* Пространство линейной конгруэнции // Мат. сб.— 1949.— **24**, № 3.— С. 429—455.

Киев. политехн. ин-т

Получено 24.09.87