УДК 517.518:512.643

С. А. Иванов

Гладкая диагонализация эрмитовых матриц-функций

Каждый раз, когда в задаче встречаются матрицы, зависящие от параметров, естественно стремиться представить их в наиболее простой форме — в каноническом виде. В частности, это позволяет во многих случаях исследовать асимптотику решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром [1—3]. Для матриц-функций, аналитически зависящих от параметра, каноническая форма найдена в [4]. Однако для аналитических матриц-функций, эрмитовых на отрезке, возможно существенное упрощещение: каноническая форма диагональна [5]. В настоящей работе получено аналогичное утверждение для эрмитовых матриц-функций конечной гладкости: в «случае общего положения» гладкость собственных значений (С. З.) и собственных векторов (С. В.) уменьшается не более чем на единицу. Результаты работы были частично анонсированы в [6], где применялись для нахождения асимптотики фундаментального решения системы уравнений $\varepsilon y' = iAy$, $A = A^*$, с малым параметром *.

Пусть $A(x)$ — эрмитова матрица-функция размера $N \times N$, определенная на отрезке $[a, b]$ и $A \in C^p[a, b]$, $p > 1$. В любой точке x отрезка определено семейство $\{\lambda_j\}$ С. З. и (с некоторым произволом) семейство $\{u_j\}$ С. В. Если возможно их упорядочить таким образом, чтобы λ_j и u_j стали гладкими, то будем говорить о гладкости С. З. и С. В. (см. подробнее [5]). Известно [5], что С. З. непрерывно дифференцируемой матрицы-функции непрерывно дифференцируемы. Представляется естественным, что С. З. p раз непрерывно дифференцируемой матрицы-функции также p раз непрерывно дифференцируемы. В теореме 1 доказывается ослабленный вариант этой гипотезы.

Далее через точки поворота (Т. П.) будем обозначать те точки x, в которых у матрицы $A(x)$ есть кратные С. З. Точку поворота будем называть невырожденной, если при $i \neq j$ и $\lambda_i(x) = \lambda_j(x)$ всегда $\lambda_i'(x) \neq \lambda_j'(x)$ (графики С. З. пересекаются без касания).

Теорема 1. *Пусть $A(x)$ — эрмитова матрица-функция, p раз непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ и Т. П. матрицы $A(x)$ невырождены. Тогда С. З. матрицы p раз дифференцируемы.*

Лемма 1. *Пусть матрица-функция $B(x) \in C^p[\alpha, \beta]$, $B(x_0) = 0$, и при $x \neq x_0$ С. З. $\{\mu_j(x)\}$ матрицы $B(x)$ просты. Тогда* а) *семейство $\{\mu_j'(x_0)\}$ есть семейство С. З. матрицы $B'(x_0)$,* б) *если С. З. матрицы $B'(x_0)$ различны, то С. З. $\mu_j(x)$ дифференцируемы p раз.*

Доказательство леммы. а). Введем матрицу-функцию $\tilde{B}(x) = (x - x_0)^{-1} B(x)$. С. З. матрицы $\tilde{B}$ обозначим через $\tilde{\mu}_j$. Очевидно, что $\tilde{B} \in C^{p-1}[\alpha, \beta]$ и что

$$\mu_j(x) = (x - x_0)\, \tilde{\mu}_j(x). \tag{1}$$

Отсюда следует дифференцируемость μ_j в точке x_0 и равенство $\mu_j'(x_0) = \tilde{\mu}_j(x_0)$ Утверждение а) доказано.

б) Поскольку $\tilde{B}(x_0) = B'(x_0)$, то С. З. $\tilde{\mu}_j(x_0)$ просты в точке x_0. Тогда они просты всюду на $[\alpha, \beta]$ (поскольку при $x \neq x_0$ просты С. З. μ_j матрицы B). Из теоремы о неявной функции следует тогда, что $\tilde{\mu}_j \in C^{p-1}[\alpha, \beta]$. Дифференцируя (1) $p - 1$ раз, имеем

$$\mu_j^{(p-1)}(x) = (x - x_0)\, \tilde{\mu}_j^{(p-1)}(x) + (p - 1)\, \tilde{\mu}_j^{(p-2)}(x).$$

Вне точки x_0 С. З. μ_j непрерывно дифференцируемы p раз, поскольку С. З. просты. В точке x_0 из дифференцируемости $\tilde{\mu}^{(p-2)}$ следует дифференцируемость $\mu^{(p-1)}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Вне Т. П. собственные значения λ_j непрерывно дифференцируемы p раз. Рассмотрим достаточно малую окрестность Т. П. x_0. Если не все С. З. совпадают в x_0, то можно найти [11] матрицу-функцию $T(x)$ такую, что преобразование подобия приводит A к блочно диагональному виду:

$$A(x) = T(x) \operatorname{diag} [A_j(x)]_{j=1}^{n} T^{-1}(x),$$

причем матрицы T и A_j непрерывно дифференцируемы p раз в некоторой

* Тот факт, что главный член асимптотики не зависит от кратности С. З., был в частном случае получен в [7]. В общей ситуации он доказан в [8] и затем, по крайней мере, дважды переоткрывался [9, 10].

окрестности x_0, и в x_0 у каждой матрицы A_j все С. З. совпадают. Таким образом, можно считать, что все С. З. исходной матрицы $A(x_0)$ равны λ_0. Полагая $B(x) = A(x) - \lambda_0$, приходим к ситуации леммы 1. По а) С. З. матрицы $B'(x_0)$ суть $\{\lambda_j'(x_0)\}$. По условию теоремы они различны и тогда в силу леммы 1б) λ_j дифференцируемы p раз в окрестности Т. П. Теорема доказана.

Замечание. Как видно из теоремы, разрыв между гладкостью элементов эрмитовой матрицы-функции и гладкостью ее С. З. невелик: это разрыв между дифференцируемостью и непрерывной дифференцируемостью.

Теперь исследуем гладкость С. В. эрмитовой матрицы-функции.

Теорема 2. *Пусть $A(x)$—эрмитова матрица-функция с С. З. $\{\lambda_j\}_1^N$ и при любом $x_0 \in [a, b]$.*

а) *матрица $A(x)$ и С. З. непрерывно дифференцируемы $p(x_0)$ раз в некоторой окрестности x_0.*

б) *кратность нулей любой из функций $R_j(x) = \prod_{i, i \neq j} (\lambda_i(x) - \lambda_j(x))$ в x_0 не превосходит $s(x_0)$, $s(x_0) < p(x_0)$.*

Тогда существует такая унитарная матрица-функция $U(x)$, что $A = U \operatorname{diag}[\lambda_j] U^*$ и $U \in C^q[a, b]$, $q = \min_{x_0 \in [a,b]} (p(x_0) - s(x_0))$.

Условия теоремы не необходимы, как показывает пример диагональной матрицы $\operatorname{diag}[\lambda_1(x), \lambda_2(x)]$. В этом случае точки изменения кратности С. З. не ухудшают гладкость С. В., которые вообще не зависят от x. В то же время эти условия точны, как показывает следующий пример. Пусть $A(x) = U(x) \operatorname{diag}[x^r, 0]\, U^*(x)$, где $U \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $U^{-1} = U^*$ и q-я производная U имеет в нуле разрыв первого рода. Тогда $(A(x))_{ij} = x^r (U(x))_{i1} \times \times (\overline{U(x)})_{j1}$. Видно, что A непрерывно дифференцируема $r + q - 1$ раз. Функций R_j в этом примере две: $\pm x^r$ и кратность нуля R_j равна r. Таким образом, гладкость С. В. в точности равна гладкости A минус кратность нулей функций R_n.

Доказательство теоремы. Получим явное выражение для С. В. вне Т. П. x_0. Фиксируем j и обозначим через $B(x)$ матрицу $A(x) - \lambda_j(x)$. Элементы B обозначим через B_{ij} и введем D_i — главные подматрицы B, получающиеся из B вычеркиванием i-го столбца и i-й строки.

Докажем, что для некоторого i_0 функция $d_{i_0}(x)$, $d_i(x) = \det D_i(x)$, имеет в точке x_0 ноль кратности не выше $s(x_0)$. Действительно, сумма главных миноров порядка m совпадает (с точностью до знака) с коэффициентом характеристического полинома при λ^{N-m}. Следовательно, эта сумма инвариантна и в координатном представлении

$$\sum_{i=1}^N d_i(x) = \sum_{i=1}^N \prod_{r, r \neq i} (\lambda_r(x) - \lambda_j(x)) = R_j(x).$$

Из условия б) теоремы следует тогда, что Σd_i имеет в точке x_0 ноль кратности не выше $s(x_0)$. Поэтому все d_i не могут иметь ноль большей кратности. Без ограничения общности можно считать, что кратность нуля функции d_N не превосходит $s(x_0)$. Обозначим через $\dot{v}_{x_0}$ проколотую окрестность x_0, в замыкании которой $d_N(x)$ не имеет других нулей, кроме x_0, а матрица A и С. З. λ_j имеют гладкость $p(x_0)$. Несложно проверить (см. также [12]), что С. В. u_j, отвечающий λ_j, при $x \in \dot{v}_{x_0}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -D_N^{-1}(x)\, B_N(x) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

где B_N есть матрица-строка $\{B_{iN}\}_{i=1}^{N-1}$.

В тех точках, где $d_N \neq 0$, вектор u_j, очевидно, дифференцируем столько же раз, сколько и B, т. е. $p(x_0)$ раз. В точке x_0 вектор (2) может иметь полюс, порядок которого $r(x_0) \leqslant s(x_0)$. Если домножить этот вектор на $(x - x_0)^{r(x_0)}$ и нормировать, то получим С. В., определенный уже во всей окрестности v_{x_0}. При этом его гладкость будет не меньше $p(x_0) - r(x_0) \geqslant$

$\geqslant q$. Проделав эти построения в окрестности каждой Т. П. и сшив полученные векторы, приходим к j-му С. В. из $C^q [a, b]$. Составим матрицу U из этих векторов. Вне Т. П. U— унитарная матрица-функция, поэтому она унитарна и в Т. П. по непрерывности. Следовательно, U осуществляет C^q-диагонализацию. Теорема доказана.

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1968.— 464 с.
2. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1966.— 240 с.
3. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1983.— 352 с.
4. *Арнольд В. И.* О матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук.— 1971.— **62**, № 2.— С. 101—104.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
6. *Иванов С. А.* Задача Редже для вектор-функций // Теория операторов и теория функций.— 1983.— Вып. 1.— С. 68—86.
7. *Кучеренко В. В.* Асимптотика решения системы $\left(A \quad x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$ при $h \to 0$ в случае характеристик переменной кратности // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1974.— **38**, № 3.— С. 625—662.
8. *Иванов С. А., Павлов Б. С.* Карлесоновские серии резонансов в задаче Редже // Там же.— 1978.— **42**, № 1.— С. 26—55.
9. *Розенблюм Г. В.* Функциональное решение и спектральная асимптотика систем с точки поворота // Пробл. мат. физики.— 1979.— Вып. 9.— С. 122—128.
10. *Gingold H., Hsieh Po-Fang.* A globab study of a Hamiltonian system with multi turing points // Lect. Notes Math.— 1985.— **1151**.— P. 164—171.
11. *Sibuya Y.* Sur un system des equations differentielles ordinaires lineares á coefficients periodiques et contenant des paramétres // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.— 1954.— **7**, P. 229—241.
12. *Wasow W.* On holomorphically similar matrices // J. Math. Anal. Appl.— 1962.— L 4.— P. 202—206.

Ленингр. ун-т Получено 23.11.87