УДК 517.53

В. А. Зморович, И. К. Коробкова

Об одном классе гаммаморфных функций

В настоящей статье вводится класс аналитических функций, содержащий в качестве частного случая Г-функцию Эйлера. Насколько авторам известно, этот класс не встречался в математической литературе.

Теорема. *Пусть* $0 < h \leqslant h_k \leqslant H$, $h < H$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *Положим* $p_1 = h_0 + z$, $z = Re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, $p_{k+1} = p_k + h_k$, $\lambda_1 = h_1/2$, $\lambda_{k+1} = (h_k + h_{k+1})/2$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n-2$, $\lambda_n = h_{n-1}/2$.

Тогда

$$p_1^{p_1} e^{-p_1} e^{\vartheta} = p_n^{p_n} e^{-p_n} e^{\vartheta_n} / \prod_1^n p_k^{\lambda_k}, \tag{1}$$

где $\vartheta = \sum_1^\infty L_k(z)$, $\vartheta_n = \sum_n^\infty L_k(z)$, $L_k(z) = (1/2) \int_0^{h_k/2} (h_k - 2x)^2 dx/(p_k + x) \times (p_{k+1} - x)$, $k = 1, 2, 3 \ldots$. *Ряд* $\sum_1^\infty L_k(z)$ *абсолютно и равномерно сходится в области* $|\theta| \leqslant \pi - \delta$, $R \geqslant 0$, *где* $\delta > 0$ *и как угодно мало, причем имеет место оценка*

$$\sum_1^\infty |L_k(Re^{i\theta})| \leqslant H^2/12h \sin^2(\delta/2).$$

Доказательство. Из тождества

$$\int_{p_1}^{p_n} \ln x dx = \ln(p_2 \ldots p_n) + \sum_{k=1}^{n-1} [(p_{k+1} - 1) \ln p_{k+1} - p_k \ln p_k - h_k]$$

следует

$$p_n \ln p_n - p_n - p_1 \ln p_1 + p_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (h_k/2) \ln(p_k p_{k+1}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \{[(h_k/2) + p_k] \ln(p_{k+1}/p_k) - h_k\}. \tag{2}$$

Замечая, что $[(h_k/2) + p_k] \ln(p_{k+1}/p_k) - h_k = L_k(z)$, и потенцируя равенство (2), получаем

$$p_n^{p_n} e^{-p_n} / \prod_1^n p_k^{\lambda_k} = p_1^{p_1} e^{-p_1} e^{\theta_n}, \tag{3}$$

где $\theta_n = \sum_1^{n-1} L_k(z)$. Остается доказать сходимость ряда $\sum_1^\infty L_k(z)$. Пусть $A > 0$, $R > 0$, $\theta \in]-\pi, \pi[$. Имеем $|A + Re^{i\theta}|^2 = (A + R)^2 \cos^2(\theta/2) + (A - R)^2 \sin^2(\theta/2)$. Отсюда

$$|A + Re^{i\theta}| \geqslant (A + R) \cos(\theta/2). \tag{4}$$

Положим $p_k = q_k + z = q_k + Re^{i\theta}$, $k = 1, 2, 3 \ldots$ Тогда на основании (4) имеем

$|q_k + Re^{i\theta} + x| \, |q_k + Re^{i\theta} + h_k - x| \geqslant (q_k + R + x)(q_k + R + h_k - x) \cos^2(\theta/2)$,

где $0 \leqslant x \leqslant h_k/2$. Тогда

$$|L_k(z)| \leqslant (1/2) \int_0^{h_k/2} (h_k - 2x)^2 dx / (|q_k + z + x| \, |q_k + z + h_k - x|) \leqslant$$

$$\leqslant (1/2) \sec^2(\theta/2) \int_0^{h_k/2} (h_k - 2x)^2 dx / (q_k - R + x)(q_k + R + h_k - x).$$

Замечаем, что

$$(q_k + R + x)(q_k + R + h_k - x) =$$

$$= (q_k + R)(q_{k+1} + R) + x(h_k - x) \geqslant (q_k + R)(q_{k+1} + R).$$

Поэтому

$$|L_k(\theta)| \leqslant \left[1/2\,(q_k + R)\,(q_{k+1} + R)\right] \int\limits_0^{h_k/2} (h_k - 2x)^2 \sec^2(\theta/2)\,dx =$$

$$= (h_k^2/2)\,[1/(q_k + R) - 1/(q_{k+1} + R)] \sec^2(\theta/2), \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

Следовательно,

$$\sum_1^\infty |L_k(z)| \leqslant H^2 \sec^2(\theta/2)/12\,(q_1 + R) \leqslant H^2 \sec^2(\theta/2)/12h.$$

Пусть $|\theta|/2 \leqslant \pi/2 - \delta/2$, где $\delta > 0$ и как угодно мало. Тогда

$$\sum_1^\infty |L_k(z)| \leqslant H^2 \operatorname{cosec}^2(\delta/2)/12h.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_1^\infty L_k(z)$ сходится и притом абсолютно в области $R \geqslant 0$, $-\pi < \theta < \pi$. Так как $\sum\limits_n^\infty |L_k(z)| \leqslant H^2 \operatorname{cosec}^2(\delta/2)/2\,(q_n + R)$, то, учитывая, что $q_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, видим, что ряд $\sum\limits_1^\infty L_k(z)$ сходится равномерно в области $R \geqslant 0$, $|\theta| \leqslant \pi - \delta$, где $\delta > 0$ и как угодно мало.

Заметим, что равенство (3) можно переписать в виде (1), что и требовалось доказать.

Примечание 1. Из формулы (1) следует

$$p_1^{p_1} e^{-p_1} e^{\vartheta} = \lim_{n \to \infty} \left(p_n^{p_n} e^{-p_n} \Big/ \prod_1^n p_k^{\lambda_k}\right), \tag{5}$$

так как $\vartheta_n \to 0$ при $n \to \infty$, если $R \geqslant 0$, $-\pi < \theta < \pi$.

Примечание 2. Если положить $p_1 = 1 + z$ и $h_k = 1$, $k = 1, 2, 3 \ldots$, то $p_1^{p_1} e^{-p_1} e^{\vartheta} = \Gamma(z + 1)$ [1].

1. *Валле-Пуссен Ш. Ж.* Курс анализа бесконечно малых: В 2-х т.— М.; Л.: Гостехтеоретиздат. 1933.— 464 с.

Киев. политехн. ин-т

Получено 03.12.87