УДК 517.512
М. Ф. Бурляй

О логарифмическом методе суммирования интегралов

Пусть функция $f(t)$ задана на промежутке $1 \leqslant t < +\infty$ и интегрируем по Лебегу на любом конечном отрезке $[1; x]$. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \tag{1}$$

и пусть

$$S(x) = \int_1^x f(t)\,dt \tag{2}$$

$$F(p) = \frac{-1}{\ln p} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-px}}{x} S(x)\,dx, \tag{3}$$

где интеграл в правой части равенства (3) существует для любого $p > 0$. Комплексное число A, конечное или бесконечное, называется частичным пределом интеграла (2) при $k \to +\infty$, если существует последовательность положительных чисел $x_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ такая, что $S(x_k) \to A$, $k \to \infty$.

Обозначим через E_1 и $E_1(x_k)$ множества всех частичных пределов функций $S(x)$ и $S(x_k)$, где x_k — возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к $+\infty$. Через E_2 обозначим множество всех предельных значений $F(p)$, когда $p \to 0_+$. Если множество E_2 состоит из одной конечной точки S, то говорят [1, с. 7], чть интеграл (1) суммируется к числу S логарифмическим методом (L-методом).

Пусть G — замкнутое выпуклое множество в комплексной плоскости, G_ε — замкнутая выпуклая ε-окрестность множества G и G_k — последовательность замкнутых выпуклых множеств в комплексной плоскости, стягивающихся к бесконечно удаленной точке. Следуя Н. А. Давыдову [2, 3], назовем замкнутое выпуклое множество G, отличное от всей комплексной плоскости, (L)-множеством функции $S(\varkappa)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность отрезков $[x_k; y_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, что

$$S(x) \in G_\varepsilon \text{ для } x_k \leqslant x \leqslant y_k < x_{k+1}, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\ln y_k}{\ln x_k} = +\infty, \; x_k \to +\infty, \; k \to \infty. \tag{4}$$

Если (L)-множеством функции $S(x)$ является точка, то эту точку назовем (L)-точкой этой функции. Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости назовем (L)-точкой функции $S(x)$, если существуют последовательность отрезков $[x_k; y_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, и последовательность замкнутых выпуклых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, стягивающихся к бесконечно удаленной точке, такие, что

$$S(x) \in G_k \text{ для } x_k \leqslant x \leqslant y_k < x_{k+1}, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\ln y_k}{\ln x_k} = +\infty, \; x_k \to +\infty, \; k \to \infty.$$

Лемма. *Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию $f(t) = o\left(\frac{1}{t \ln t}\right)$, то каждая точка множества E_1 всех частичных пределов функции $S(x)$ является (L)-точкой этой функции.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in E_1$ есть конечная точка. Если интеграл (1) сходится к z_0, то z_0 есть (L)-точка функции $S(x)$. Предположим теперь, что интеграл (1) расходится. Тогда найдется последовательность положительных чисел $x_k \to +\infty$, $k \to \infty$, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} S(x_k) = z_0$. Можем считать, что все $S(x_k)$ попадут в круг $K_{\varepsilon/2}\,(|z - z_0| \leqslant \varepsilon/2)$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Число y_k выберем так, чтобы $|S(x) - z_0| \leqslant \varepsilon$ для $x_k \leqslant x \leqslant y_k$ и в сколь угодно малой окрестности точки y_k найдется точка $y_k^* > y_k$, для которой $|S(y_k^*) - z_0| > \varepsilon$. Можем считать, что $y_k^* - y_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$. В силу непрерывности функции $S(x)$ такая точка y_k^* существует. Из условия $f(t) = o\left(\frac{1}{t\ln t}\right)$ следует, что $f(t) = \frac{\varepsilon(t)}{t\ln t}$, где $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Обозначим $\varepsilon_k = \max\limits_{x_k \leqslant t \leqslant y_k^*} |\varepsilon(t)|$. Тогда получим

$$\frac{\varepsilon}{2} < |S(y_k^*) - S(x_k)| = \left| \int\limits_1^{y_k^*} f(t)\,dt - \int\limits_0^{x_k} f(t)\,dt \right| = \left| \int\limits_{x_k}^{y_k^*} f(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_k \int\limits_{x_k}^{y_k^*} \frac{dt}{t\ln t} = \varepsilon_k \ln \frac{\ln y_k^*}{\ln x_k}.$$

Отсюда для $k > K$

$$\frac{\ln y_k^*}{\ln x_k} > e^{\frac{\varepsilon}{2\varepsilon_k}}.$$

Поскольку $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, то из последнего неравенства следует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln y_k}{\ln x_k} = +\infty,$$

а это значит, что точка z_0 является (L)-точкой функции $S(x)$. Случай, когда z_0 — бесконечно удаленная точка, доказывается аналогично.

Теорема 1. *Если $|S(x)| \leqslant C$, $C > 0$ и множество G является (L)-множеством функции $S(x)$, то пересечение $E_2 \cap G$ содержит по крайней мере одну точку.*

Доказательство. Пусть G является (L)-множеством функции $S(x)$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность отрезков $[x_k, y_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, $x_k \to \infty$, $k \to \infty$, что будут выполнены условия (4). Положим $p_k = \frac{1}{y_k}$. Тогда

$$F(p_k) = \frac{-1}{\ln p_k} \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-p_k x}}{x} S(x)\,dx = -\frac{1}{\ln p_k} \int\limits_1^{x_k} \frac{e^{-p_k x}}{x} S(x)\,dx +$$

$$+ \frac{-1}{\ln p_k} \int\limits_{x_k}^{y_k} \frac{e^{-p_k x}}{x} S(x)\,dx + \frac{-1}{\ln p_k} \int\limits_{y_k}^{+\infty} \frac{e^{-p_k x}}{x} S(x)\,dx = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$$

Поскольку $|S(x)| \leqslant C$, то в силу (4) получим

$$|\sigma_1| = \left| \frac{-1}{\ln p_k} \int\limits_1^{x_k} \frac{e^{-p_k x}}{x} S(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\ln y_k} \int\limits_1^{x_k} \frac{e^{-\frac{x_k}{y_k}}}{x}\,dx \leqslant \frac{\ln x_k}{\ln y_k} \to 0, \quad k \to \infty,$$

$$|\sigma_3| = \left| \frac{-1}{\ln p_k} \int\limits_{y_k}^{+\infty} \frac{e^{-p_k x}}{x} S(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\ln y_k}\,\frac{1}{y_k}\int\limits_{y_k}^{+\infty} e^{-\frac{x_k}{y_k}}\,dx = \frac{C}{e\ln y_k}\to 0,\quad k\to\infty.$$

Следовательно,

$$F(p_k) = \frac{-1}{\ln p_k}\int\limits_{x_k}^{y_k}\frac{e^{-p_k x}}{x}S(x)\,dx + o(1).$$

Обозначим

$$\varepsilon_k = 1 - \frac{-1}{\ln p_k}\int\limits_{x_k}^{y_k}\frac{e^{-p_k x}}{x}\,dx.$$

Поскольку [1, с. 7]

$$\frac{-1}{\ln p}\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{e^{-px}}{x}\,dx\to 1,\ \ p\to 0_+,$$

то, учитывая ограниченность $S(x)$, легко показать, что $\varepsilon_k S(x_k)\to 0$, $k\to\infty$. Тогда $F(p_k)$ можно представить в виде

$$F(p_k) = \frac{-1}{\ln p_k}\int\limits_{x_k}^{y_k}\frac{e^{-p_k x}}{x}S(x)\,dx + \varepsilon_k S(x_k) + o(1) = z_k + o(1),$$

где

$$z_k = \frac{-1}{\ln p_k}\int\limits_{x_k}^{y_k}\frac{e^{-p_k x}}{x}S(x)\,dx + \varepsilon_k S(x_k).$$

Число z_k в силу (4) принадлежит G_ε. Следовательно, $F(p_k)\in G_{2\varepsilon}$ для всех достаточно больших k. Таким образом, пересечение $E_2\cap G_{2\varepsilon}$ содержит по крайней мере одну точку, откуда в силу произвольной малости $\varepsilon>0$ и замкнутости множеств E_2 и G следует справедливость теоремы.

Теорема 2. *Если $|S(x)|\leqslant C$, $C>0$, и функция $f(t)$ удовлетворяет условию $f(t) = o\left(\frac{1}{t\ln t}\right)$ и интеграл* (1) *суммируется логарифмическим методом к числу S, то интеграл* (1) *сходится к числу S.*

Теорема 2 следует из теоремы 1 и доказанной выше леммы.

Теорема 3. *Если $|S(x)|\leqslant C$, $C>0$, x_k — заданная возрастающая последовательность положительных чисел, $x_k\to+\infty$, $k\to\infty$, и $\lim\limits_{k\to\infty}(S(x)-S(x_k)) = 0$ в одном из двух случаев:*

1) *при* $x>x_k$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\frac{\ln x}{\ln x_k}<\infty$,

2) *при* $x_k>x$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\frac{\ln x_k}{\ln x}<\infty$,

то $E_1(x_k)\subset E_2$. Если, кроме того, $\lim\limits_{p\to 0+}F(p) = S$, то $\lim\limits_{k\to\infty}S(x_k) = S$.

Доказательство. Докажем теорему для случая 1. Для случая 2 теорема доказывается аналогично. Предположим, что множество $E(x_k)$ содержит точку a, не принадлежащую множеству E_2, и возьмем круг K_ε ($|z-a|\leqslant\varepsilon$), где $\varepsilon>0$ настолько мало, что этот круг не содержит ни одной точки множества E_2. Пусть $S(x_{k_p})\to a$, $p\to\infty$. Без ограничения общности можем считать, что $S(x_{k_p})\in K_{\varepsilon/2}$ ($|z-a|\leqslant\varepsilon/2$) для $p=1,2,\ldots$. Выберем число x'_{k_p} такое, что $S(x)\in K_\varepsilon$ ($|z-a|\leqslant\varepsilon$) для $x_{k_p}\leqslant x\leqslant x'_{k_p}$ и в сколь угодно малой окрестности точки x'_{k_p} найдется точка $x^*_{k_p}$ такая, что $S(x^*_{k_p})$ не принадлежит кругу K_ε. Можем считать, что $x^*_{k_p}-x_{k_p}<1$.

Легко видеть, что

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\ln x^{*}_{k_p}}{\ln x_{k_p}} < \infty.$$

Действительно, если бы это было не так, то

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\ln x'_{k_p}}{\ln x_{k_p}} = +\infty.$$

Тогда круг K_ε был бы (L)-множеством функции $S(x)$ и по теореме 1 он содержал бы, по крайней мере, одну точку множества E_2, что противоречит предположению.

В силу условия теоремы имеем

$$\lim_{p\to\infty} (S(x^{*}_{k_p}) - S(x_{k_p})) = 0,$$

что противоречит неравенствам

$$|S(x^{*}_{k_p}) - S(x_{k_p})| > \frac{\varepsilon}{2}, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

справедливость которых следует из выбора чисел $S(x^{*}_{k_p})$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть x_k — заданная возрастающая последовательность положительных чисел, $x_k \to +\infty$, $k \to \infty$, и пусть интеграл* (2), *в котором $f(t)$ — действительная функция, удовлетворяющая условию*

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} (S(x) - S(x_k)) \geqslant 0$$

при $x > x_k$ и $\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln x}{\ln x_k} < \infty$, а также условию

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} (S(x_k) - S(x) \geqslant 0$$

при $x_k > x$ и $\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln x_k}{\ln x} < \infty$.

Тогда если $\lim_{p\to 0+} F(p) = S$, то $\lim_{k\to\infty} S(x_k) = S$.

1. *Челидзе В. Г.* Суммирование интегралов логарифмическим методом // Тр. Тбил. ун-та.— 1976.— **179**.— С. 7—18.
2. *Давыдов Н. А.* О границах неопределенности при суммировании ряда методами Чезаро и Пуассона—Абеля // Успехи мат. наук.— 1957.— **12**, вып. 4.— С. 167—174.
3. *Давыдов Н. А.* Тауберовы теоремы для методов Чезаро суммирования интегралов Лебега // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1966.— Вып. 2.— С. 108—115.

Чернигов, пед. ин-т

Получено 21.12.87