УДК 517.53

А. Э. Еременко, Г. М. Левин

О периодических точках многочленов

Напомним основные факты теории Жюлиа—Фату, относящиеся к итерациям многочленов [1—3]. Пусть P — многочлен степени $m \geqslant 2$, P^n — его n-я итерация. Точка z называется периодической, если $P^n z = z$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Множество $\{P^k z\}_{k=1}^n$ называется в этом случае циклом, а его мощность — порядком цикла. Мультипликатором цикла порядка n называется число $\lambda = (P^n)'(z)$, где $z \neq \infty$ — элемент цикла. Цикл называется отталкивающим, если $|\lambda| > 1$. Положим $D_\infty = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : P^n z \to \infty,\ n \to \infty\}$. Легко видеть, что D_∞ — область, $\infty \in D_\infty$. Граница этой области называется множеством Жюлиа $J = J(P)$. Эквивалентное определение получится, если обозначить через $N(P)$ наибольшее открытое множество в $\mathbb{C}$, на котором семейство $\{P^n\}$ нормально. Тогда $J(P) = \mathbb{C} \setminus N(P)$. Множество Жюлиа совершенно и вполне инвариантно, т. е. $P^{-1}(J) = J$. Кроме того, $J(P^n) = J$, $n \in \mathbb{N}$. Многочлен P имеет не более $m - 1$ неотталкивающих циклов [2]. С другой стороны, количество отталкивающих циклов бесконечно; их объединение — плотное подмножество в J.

Пусть D — область, $z_0 \in \partial D$. Точка z_0 называется достижимой (из D), если существует кривая $\Gamma \subset D$, оканчивающаяся в z_0.

Теорема 1. *Отталкивающие периодические точки многочлена P достижимы из D_∞.*

В случае, когда множество $J(P)$ связно, теорема 1 была анонсирована Дуади [2]. Насколько известно авторам, доказательство не было опубликовано.

Обозначим через T_m многочлен, определяемый функциональным уравнением $\cos m\omega = T_m(\cos \omega)$. Множество Жюлиа $J(T_m)$ есть отрезок $[-1, 1]$. Если $R_m(z) = z^m$, то $J(R_m)$ — единичная окружность. Многочлены T_m и R_m играют в теории итераций исключительную роль [1, 3].

Теорема 2. *Пусть множество $J(P)$ связно. Тогда для мультипликатора λ любого цикла порядка n справедливо*

$$|\lambda| \leqslant m^{2n}, \quad m = \deg P. \tag{1}$$

Равенство в (1) достигается тогда и только тогда, когда P сопряжен линейным преобразованием с T_m и λ — мультипликатор неподвижной точки — конца отрезка $J(P)$.

Отметим, что если установлена теорема 1, то неравенство (1) (без исследования случая равенства) вытекает из теоремы 3 работы Поммеренке [4].

Теорема 3. *Для любого многочлена P степени m выполняется альтернатива:*

1) *существует цикл порядка n с мультипликатором λ такой, что $|\lambda| > m^n$;*

2) *P сопряжен линейным преобразованием с R_m.*

Заметим, что теоремы 1 и 2 достаточно доказать для неподвижных точек, т. е. циклов порядка 1.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на изучении целой функции, введенной Пуанкаре. Пусть $P(z_0) = z_0$, $P'(z_0) = \lambda$, $|\lambda| > 1$. Согласно теореме Пуанкаре [1] функциональное уравнение

$$f(\lambda z) = P(f(z)) \tag{2}$$

имеет целое решение f, причем это решение однозначно определяется условиями

$$f(0) = z_0, \quad f'(0) = 1. \tag{3}$$

(Простейшее доказательство этих фактов, принадлежащее Пуанкаре, выглядит так: сначала находим формальный степенной ряд $f(z) = z_0 + z + c_2 z^2 + \ldots$, удовлетворяющий (2), затем с помощью прямой оценки коэффициентов показываем, что ряд сходится в некоторой окрестности нуля; наконец, продолжаем функцию f в $\mathbb{C}$ с помощью уравнения (2), учитывая, что $|\lambda|>1$.)

Обозначим через I множество точек, в которых семейство $\{f(\lambda^n z): n\in\mathbb{N}\}$ не является нормальным. Ясно, что $I=f^{-1}(J)$. Положим $D=f^{-1}(D_\infty)$. Из (2) и полной инвариантности J и D_∞ следует

$$\lambda I=I, \quad \lambda D=D. \tag{4}$$

Пусть G — функция Грина области D_∞ с полюсом в точке ∞, продолженная нулем в $\mathbb{C}\setminus D_\infty$. Функция G непрерывна и субгармонична в $\mathbb{C}$ и удовлетворяет функциональному уравнению [2]

$$G(P(z))=mG(z), \quad z\in\mathbb{C}. \tag{5}$$

(Это свойство сразу вытекает из явного выражения $G(z)=\lim\limits_{n\to\infty} m^{-n}\ln|P^n(z)|$).

Функция $u(z)=G(f(z))$ непрерывная и субгармоническая в $\mathbb{C}$. Из (2) и (5) следует

$$u(\lambda z)=mu(z), \ z\in\mathbb{C}. \tag{6}$$

Субгармонические функции со свойством (6) играют важную роль в теории целых функций (см., например, [5]).

Порядок ρ функции u, субгармонической в $\mathbb{C}$, определяется формулой $\rho=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\ln B(r,u)/\ln r$, где $B(r,u)=\max\{u(z):|z|=r\}$. Из (6) получаем

$$\rho=\ln m/\ln|\lambda|. \tag{7}$$

Согласно «субгармонической версии теоремы Данжуа—Карлемана — Альфорса» [6] (теорема 4.16) количество связных компонент множества $\{z: u(z)>0\}$ не превышает $\max\{2\rho, 1\}$. Обозначим эти компоненты через $D_1, \ldots, D_p$. В силу (4) найдется такое N, что $\lambda^N D_1=D_1$. Выберем точку $\omega_0\in D_1$ и соединим ее кривой $\Gamma_0\subset D_1$ с точкой $\lambda^{-N}\omega_0\in D_1$. Тогда $\Gamma= \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^{-Nn}\Gamma_0\subset D_1$ — кривая, стремящаяся к нулю. Ее образ $f(\Gamma)\subset D_\infty$ — кривая, стремящаяся к z_0 в силу (3). Это доказывает теорему 1.

Чтобы доказать теорему 2, заметим, что если множество Жюлиа J связно, то множество $I=f^{-1}(J)$ содержит континуум K, соединяющий 0 и ∞. В самом деле, если это не так, то найдется замкнутая жорданова кривая γ, разделяющая 0 и ∞, причем $\gamma\cap I=\varnothing$. Пусть V — окрестность нуля, в которой f взаимно однозначна (существует в силу (3)). Выберем V настолько малой, чтобы J не содержалось в $f(V)$. Пусть M — настолько большое число, что $\lambda^{-M}\gamma\subset V$. Учитывая (4), получаем $\lambda^{-M}\gamma\cap I=\varnothing$. Поэтому $f(\lambda^{-M}\gamma)\cap J=\varnothing$, и кривая $f(\lambda^{-M}\gamma)$ разделяет z_0 и ∞. Это противоречит связности множества J.

Классическая теорема Вимана (см., например, [5]) утверждает, что для субгармонической функции v порядка $\rho<1$ выполняется

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} A(r,v)/B(r,v)\geqslant\cos\pi\rho,$$

где $A(r,v)=\inf\{v(z):|z|=r\}$.

Поскольку $u(z)=0$, $z\in K$, имеем $A(r,u)\equiv 0$, следовательно, $\rho\geqslant 1/2$. Неравенство (1) (с $n=1$) теперь следует из (7).

Пусть теперь в (1) имеет место равенство. Тогда $\rho=1/2$. Покажем, что субгармоническая функция $u\geqslant 0$ порядка 1/2 со свойствами (6) и $A(r,v)\equiv 0$ обязательно имеет вид

$$u(re^{i\theta})=cr^{1/2}\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta_0), \quad |\theta|\leqslant\pi, \tag{8}$$

где $c>0$ и $\theta_0\in[-\pi,\pi]$ — некоторые постоянные. Этот результат может быть выведен из работ [7, 8], однако мы приведем независимое простое доказательство.

Функция u допускает представление [9]

$$u(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu_\zeta,$$

где μ — некоторая борелевская мера. Пусть $n(t) = \mu\{\zeta : |\zeta| \leqslant t\}$. Тогда $\rho = \lim\limits_{t\to\infty} \ln n(t)/\ln t$. Положим

$$u^*(z) = \int\limits_0^\infty \ln \left| 1 - \frac{z}{t} \right| dn(t).$$

Субгармоническая функция u^* имеет порядок ρ. Покажем, что мера μ сосредоточена на луче $l = \{\zeta : \arg \zeta = \theta_0\}$. Пусть это не так. Учитывая, что величина $\ln|1 - re^{i\theta}|$ при фиксированном $r > 0$ имеет строгий минимум при $\theta = 0$, получаем

$$u^*(r) = A(r, u^*) < A(r, u) = 0, \quad r > 0.$$

Теперь из (6) следует $u^*(|\lambda| z) = mu^*(z)$, значит,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} A(r, u^*)/B(r, u^*) < 0.$$

Это противоречит теореме Вимана.

Таким образом, мера μ сосредоточена на некотором луче l и функция u гармоническая в $\mathbb{C} \setminus l$. Поскольку $u \geqslant 0$, то $u > 0$ в $\mathbb{C} \setminus l$. Кроме того, $u = 0$ на l, так как $A(r, u) \equiv 0$. Поэтому u имеет вид (8).

Из доказанного следует, что I — луч. Поскольку $I = f^{-1}(J)$, найдется такой круг V, что $J \cap V$ — аналитическая кривая. Тогда по теореме Фату [1, с. 225] многочлен P сопряжен с T_m или с R_m. Последняя возможность исключается прямой проверкой. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть G — область, $z_0 \in \partial G$ — достижимая граничная точка. Две кривые $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$, оканчивающиеся в точке z_0, называются эквивалентными, если найдется последовательность кривых $\gamma_n \subset G$, $\gamma_n \to z_0$, соединяющих Γ_1 и Γ_2. Из результатов Дуади [2] (п. 6, лемма 1) следует, что если множество Жюлиа связно, то имеется конечное число классов эквивалентных кривых в D_∞, оканчивающихся в периодической точке z_0. Можно показать, что количество p этих классов равно количеству связных компонент множества $D = \{z : u(z) > 0\}$. Применяя теорему Данжуа — Карлемана—Альфорса, получаем $p \leqslant 2\rho$. Учитывая (7), находим $|\lambda| \leqslant m^{2/p}$ для неподвижной точки или $|\lambda| \leqslant m^{2n/p}$ для цикла порядка n. Более тонкие рассуждения показывают, что равенство в этой оценке возможно лишь в двух случаях: 1) $p = 1$; P сопряжен с T_m, z_0 — конец отрезка $J(P)$; 2) $p = 2$; P сопряжен с T_m, z_0 — внутренняя точка отрезка $J(P)$.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Не уменьшая общности, можно считать, что старший коэффициент многочлена P равен 1. Этого всегда можно добиться сопряжением линейной функции, не меняющим мультипликаторов. Нам потребуются следующие леммы.

Л е м м а 1. *Положим*

$$c = c(A) = \sum_{P(z)=A} P'(z).$$

Тогда c не зависит от A. Кроме того,

$$\sum_{P^n(z)=A} (P^n)'(z) = c^n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

$$\sum_{P^n(z)=z} (P^n)'(z) = m^n(m^n - 1) + c^n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

$$m = \deg P.$$

Доказательство. По теореме о вычетах

$$c(A) - c(B) = \int_{|z|=r} \left\{ \frac{(P')^2}{P-A} - \frac{(P')^2}{P-B} \right\} dz,$$

где r достаточно велико. Подынтегральное выражение есть $O(z^{-2})$, $z \to \infty$, поэтому $c(A) = c(B)$. Докажем (9) по индукции;

$$\sum_{P^{k+1}(z)=A} (P^{k+1})'(z) = \sum_{P^k(\omega)=A} (P^k)'(\omega) \sum_{P(z)=\omega} P'(z) = c \sum_{P^k(\omega)=A} (P^k)'(\omega).$$

Ввиду (9) соотношение (10) достаточно доказать при $n = 1$. Тогда (10) вытекает из того, что вычет функции

$$\frac{P'(z)(P(z)-z)'}{P(z)-z} - \frac{(P')^2(z)}{P(z)}$$

в точке ∞ равен $m(m-1)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть все неподвижные точки многочлена P, кроме, быть может, одной, имеют мультипликаторы, равные $m = \deg P$. Тогда P сопряжен с R_m.*

Доказательство. Сопряжением функцией $z + a$ добъемся того, чтобы исключительной точкой был 0. Из условия леммы вытекает, что $P(z) - z = \frac{z}{m}(P'(z) - m)$. Решая это дифференциальное уравнение с условием $P(0) = 0$, получаем $P = R_m$.

Лемма 3. *Пусть $c, \lambda \in \mathbb{C}$. Если $\operatorname{Re}(\lambda^n) > \operatorname{Re}(c^n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lambda > 0$.*

Доказательство. Случаи $c\lambda = 0$, $\arg c = \pm\pi/2$, $\arg \lambda = \pm\pi/2$ легко исключаются. Существует $\delta > 0$ такое, что бесконечно много точек c^n лежат в угле $\{z : |\arg z| \leqslant \pi/2 - \delta\}$. Отсюда следует $|\lambda| \geqslant |c|$. Если $\arg \lambda \neq 0$, то бесконечно много точек λ^n лежат в некотором угле вида $\{z : |\arg z - \pi| \leqslant \pi/2 - \delta\}$. Поэтому $|\lambda| = |c|$. Полагая $\theta_1 = \arg \lambda$, $\theta_2 = \arg c$, получаем

$$\cos n\theta_1 > \cos n\theta_2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

В частности, $\cos 2n\theta_1 > \cos 2n\theta_2$, откуда

$$\cos^2 n\theta_1 > \cos^2 n\theta_2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Из (11), (12) следует $\cos n\theta_1 > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\theta_1 = 0$, что и требовалось.

Завершим доказательство теоремы 3. Предположим, что модули мультипликаторов всех циклов не превышают m^n, где n — порядок цикла.

Пусть λ — мультипликатор любой неподвижной точки. Тогда по предположению

$$\operatorname{Re} \sum_{P^n(z)=z} (P^n)'(z) \leqslant m^n(m^n - 1) + \operatorname{Re}(\lambda^n), \tag{13}$$

причем равенство имеет место только в том случае, когда мультипликаторы всех неподвижных точек, кроме одной, равны m. Тогда по лемме 2 P сопряжен с R_m. Пусть неравенство (13) строгое при всех $n \in \mathbb{N}$. Сравнивая (13) и (10), видим, что $\operatorname{Re}(\lambda^n) > \operatorname{Re}(c^n)$, $n \in \mathbb{N}$. По лемме 3 $\lambda > 0$. Это справедливо для всех неподвижных точек. Если все их мультипликаторы равны m, опять применяем лемму 2. Пусть для двух мультипликаторов выполняется $\lambda_i < m - \varepsilon$, $i = 1, 2$, $\varepsilon > 0$. Выберем последовательность n_k так, чтобы выполнялось $\operatorname{Re}(c^{n_k}) \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$. В силу (10) имеем $m^{n_k}(m^{n_k} - 1) \leqslant \sum_{P^{n_k}(z)=z} \operatorname{Re}(P^{n_k})'(z) \leqslant m^{n_k}(m^{n_k} - 2) + 2(m-\varepsilon)^{n_k}$ или $m^{n_k} \leqslant 2(m-\varepsilon)^{n_k}$, что невозможно. Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть $P(z)$ — многочлен степени $m \geqslant 2$, у которого множество Жюлиа связно. Обозначим через $K(P)$ нижнюю грань таких $x > 0$, что неравенство $|\lambda| \leqslant m^{nx}$ выполняется для мультипликаторов λ всех циклов порядка $n \in \mathbb{N}$. Мы доказали, что $1 \leqslant K(P) \leqslant 2$. Методом экстремальных длин можно доказать строгое неравенство $K(P) < 2$ в том случае, когда отображение $P: J(P) \to J(P)$ гиперболично [3].

1. *Fatou P*. Mémoire sur les équations fonctionnelles // Bull. Soc. Math. France.— 1919.— **47**.— P. 161—271; 1920.— **48**.— P. 33—94, 208—314.
2. *Douady A*. Systèmes dynamiques holomorphes // Séminaire Bourbaki, 35e année.— 1982/83.— N 599.— P. 1—25.
3. *Любич М. Ю*. Динамика рациональных преобразований : топологическая картина // Успехи мат. наук.— 1986.— **41**, № 4.— С. 35—95.
4. *Pommerenke Ch*. On conformal mapping and iteration of rational functions// Complex Variables.— 1986.— **5**, N 2—4.— P. 117—126.
5. *Kjellberg B*. On certain integral and harmonic functions.— Dissertation, Uppsala, 1948.— 64 p.
6. *Хейман У., Кеннеди П*. Субгармонические функции.— М. : Мир, 1980.— 304 с.
7. *Edrei A*. Extremal problems of the cos$\pi\rho$-type / J. d'anal Math.—1976.—**29**.—P. 19—66.
8. *Drasin D., Shea D*. Convolution inequalities, regular variation and exceptional sets// Ibid.— P. 232—292.
9. *Азарин В. С*. Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб.— 1979.— **108**, № 2.— С. 147—167.

Физ.-техн. ин-т низ. температур АН УССР,
Харьков

Получено 23.11.87