УДК 517.53

А. П. Голуб

Об одной разновидности обобщенных моментных представлений

В 1981 г. В. К. Дзядык [1] впервые рассмотрел задачу об обобщенных моментных представлениях числовых последовательностей, нашедшую полезные применения при изучении рациональных аппроксимаций и интегральных представлений функций.

Определение 1. *Обобщенным моментным представлением (ОМП) последовательности комплексных чисел* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *называется совокупность равенств*

$$s_{i+j} = \int_X a_i(t)\, b_j(t)\, d\mu(t), \quad i, j = \overline{0, \infty}, \tag{1}$$

в которых $d\mu(t)$ — *мера на некотором множестве* X (X — *чаще всего отрезок действительной оси), а* $\{a_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ *и* $\{b_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ — *последовательности измеримых функций на* X, *для которых все интегралы в* (1) *существуют.*

В настоящей статье рассматривается аналогичная конструкция, основанная на введенном Ф. Джексоном [2] понятии q-интеграла.

Определение 2. *Для некоторого фиксированного, вообще говоря, комплексного числа* q, $|q| < 1$, q-*интеграл от заданной на отрезке* [0, 1] *функции* $\varphi(x)$ *определяется по следующей формуле:*

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(u)\, d_q u = x(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(xq^n)\, q^n, \quad x \in [0, 1], \tag{2}$$

если только ряд в правой части (2) *сходится.*

Замечание 1. Очевидно, что, если определить q-производную по формуле (см., например, [3])

$$\frac{d_q}{d_q x} \Phi(x) = \frac{\Phi(qx) - \Phi(x)}{(q-1)x}, \tag{3}$$

то

$$\frac{d_q}{d_q x} \int_0^x \varphi(u)\, d_q u \equiv \varphi(u).$$

Итак, введем в рассмотрение q-интегральные ОМП.

Определение 3. *q-Интегральным обобщенным моментным представлением последовательности комплексных чисел* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *называется сово-*

купность равенств

$$s_{i+j} = \int_0^1 a_i(t)\, b_j(t)\, d_q t, \quad i, j = \overline{0, \infty}, \tag{4}$$

в которых $\{a_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ *и* $\{b_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ — *такие последовательности функций, что все q-интегралы в* (4) *существуют.*

Известно [4], что ОМП вида (1) при определенных условиях могут быть представлены в виде

$$s_k = \int_X (A^k a_0)(t)\, b_0(t)\, d\mu(t), \quad k = \overline{0, \infty},$$

где A — некоторый линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве. Подобное преобразование возможно и для q-интегральных ОМП. Действительно, введем два бесконечномерные пространства заданных на [0, 1] функций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, такие, что $\forall \varphi \in \mathfrak{M}$ и $\forall \psi \in \mathfrak{N}$ определена билинейная форма

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_0^1 \varphi(u)\, \psi(u)\, d_q u = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(q^n)\, \psi(q^n)\, q^n. \tag{5}$$

Рассмотрим некоторый ограниченный линейный оператор $A : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ и допустим, что существует единственный линейный ограниченный оператор $A^* : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ такой, что

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathfrak{M}, \ \psi \in \mathfrak{N}.$$

Оператор A^* будем называть сопряженным к A относительно билинейной формы (5). Если теперь предположить, что $a_0(t) \in \mathfrak{M}$, $b_0(t) \in \mathfrak{N}$ и линейный оператор A обладает свойством $(Aa_i)(t) = a_{i+1}(t)$, $i = \overline{0, \infty}$, где $a_i(t)$, $i = \overline{0, \infty}$, — функции, фигурирующие в равенствах (4), то, очевидно, также будем иметь

$$(A^* b_j)(t) = b_{j+1}(t), \quad j = \overline{0, \infty},$$

и, следовательно, получим эквивалентные (4) представления

$$s_k = \int_0^1 (A^k a_0)(t)\, b_0(t)\, d_q t, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{6}$$

Столь же просто переносится на случай q-интегральных ОМП теорема В. К. Дзядыка [5] о построении диагональных аппроксимант Паде. Сформулируем здесь наиболее общее утверждение, справедливое для произвольных билинейных форм.

Теорема 1. *Пусть аналитическая функция* $f(z)$ *представима в окрестности точки* $z = 0$ *степенным рядом*

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^{k+1}, \tag{7}$$

и для последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *имеет место представление*

$$s_{i+j} = \langle a_i, b_j \rangle, \quad i, j = \overline{0, \infty},$$

где $a_i \in \mathfrak{M}$, $i = \overline{0, \infty}$, $b_j \in \mathfrak{N}$, $j = \overline{0, \infty}$, $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ — *бесконечномерные линейные пространства, а* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — *билинейная форма, определенная на декартовом произведении этих пространств. Пусть, далее, существуют невырожденные биортогональные последовательности* $\{A_M\}_{M=0}^{\infty}$, $\{B_N\}_{N=0}^{\infty}$:

$$A_M = \sum_{i=0}^{M} c_i^{(M)} a_i, \quad c_M^{(M)} \neq 0, \quad M = \overline{0, \infty}; \qquad B_N = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} b_j, \quad N = \overline{0, \infty},$$

для которых

$$\langle A_M, B_N \rangle = \delta_{M,N}, \quad M, N = \overline{0, \infty}.$$

Тогда диагональные полиномы Паде $[N/N]_f(z)$, $N=\overline{0,\infty}$, *функции* $f(z)$ *могут быть представлены в виде*

$$[N/N]_f(z)=\frac{\sum\limits_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} T_j(f;z)}{\sum\limits_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j}},$$

где $T_j(f;z)$ — *частные суммы ряда* (7) *порядка* j.

Построим теперь q-интегральные ОМП для некоторых функций.

Пример. Рассмотрим следующую функцию, называемую иногда q-аналогом экспоненты [6]

$$E_q(z)=1+\sum_{k=0}^{\infty} s_k z^{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k_q!},$$

где $k_q=\dfrac{1-q^k}{1-q}$, $k_q!=\prod\limits_{i=1}^{k} i_q$, $0_q!:=1$.

Чтобы построить q-интегральное ОМП для $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$, воспользуемся определениями и свойствами q-гамма- и q-бета-функций (см., например, [7]). q-Гамма-функция определяется по формуле

$$\Gamma_q(x)=\frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x},$$

где $(a;q)_\infty=\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1-aq^n)$. Очевидно

$$\Gamma_q(n+1)=\frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}{(1-q)^n}=n_q!,$$

q-бета-функция определяется через q-интеграл

$$B_q(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}\frac{(tq;q)_\infty}{(tq^y;q)_\infty}\,d_qt=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{nx}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{n+y};q)_\infty}, \tag{8}$$

q-бета-функция выражается через q-гамма-функции по формуле

$$B_q(x,y)=\frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(y)}{\Gamma_q(x+y)}.$$

Из (8) и (9) получаем

$$\frac{1}{\Gamma_q(x+y)}=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{\Gamma_q(x)}\frac{(tq;q)_\infty}{\Gamma_q(y)(tq^y;q)_\infty}\,d_qt.$$

Подставляя $x=i+1$, $i=\overline{0,\infty}$, $y=j+1$, $j=\overline{0,\infty}$, придем к q-интегральному ОМП

$$s_{i+j}=\frac{1}{(i+j+1)_q!}=\int_0^1\frac{t^i}{i_q!}\frac{\prod\limits_{n=0}^{j-1}(1-tq^{n+1})}{j_q!}\,d_qt.$$

Таким образом, верхнюю часть таблицы Паде для $E_q(z)$ можно построить в терминах многочленов $Q_n(t)$, $n=\overline{0,\infty}$, q-ортогональных на $[0, 1]$, т. е. удовлетворяющих равенствам

$$\int_0^1 Q_n(t)\,Q_m(t)\,d_qt=(1-q)\sum_{i=0}^{\infty} Q_n(q^i)\,Q_m(q^i)\,q^i=0$$

при $m\neq n$. Такие многочлены к настоящему времени достаточно хорошо изучены (см., например, [3, 8, с. 92]).

Обобщая приведенные выше рассуждения, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Для последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ коэффициентов степенного разложения функции*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma_q(\mu k + \nu)}, \quad \mu, \nu > 0, \tag{10}$$

имеет место q-интегральное ОМП вида

$$s_{i+j} = \frac{1}{\Gamma_q(\mu i + \mu j + \nu)} = \int_0^1 \frac{t^{\mu i + \nu_1 - 1}}{\Gamma_q(\mu_i + \nu_1)} \frac{(tq; q)_\infty}{\Gamma_q(\mu j + \nu_2)\,(tq^{\mu j + \nu_2}; q)_\infty}\, d_q t, \tag{11}$$

где $\nu_1, \nu_2 > 0$, $\nu_1 + \nu_2 = \nu$.

Отметим, что ОМП (11) допускает операторную формулировку вида (6) с оператором

$$(Q^\mu \varphi)(x) = \frac{x^\mu}{\Gamma_q(\mu)} \int_0^1 \frac{(tq; q)_\infty}{(tq^\mu; q)_\infty} \varphi(xt)\, d_q t$$

и начальными функциями

$$a_0(t) = \frac{t^{\nu_1 - 1}}{\Gamma_q(\nu_1)}, \quad b_0(t) = \frac{(tq; q)_\infty}{\Gamma_q(\nu_2)\,(tq^{\nu_2}; q)_\infty}. \tag{12}$$

Более сложные q-интегральные ОМП можно построить, если вместо оператора Q^μ рассмотреть оператор

$$(Q_\sigma^\mu \varphi)(x) = x^\mu \varphi(x) + \sigma (Q^\mu \varphi)(x)$$

с теми же начальными функциями (12). В частном случае $\mu = 1$, $\nu_2 = 1$, $\nu_1 = \nu$ получим следующий результат.

Теорема 3. *Для последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ коэффициентов степенного разложения функции*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{m=0}^{k-1} \left[\frac{1 - q^{\nu + m}}{1 - q} + \sigma\right]}{\Gamma_q(\nu + k + 1)} z^k, \quad \nu > 0, \tag{13}$$

имеет место q-интегральное обобщенное моментное представление вида

$$s_{i+j} = \frac{\prod_{m=0}^{i+j-1} \left[\frac{1 - q^{\nu+m}}{1-q} + \sigma\right]}{\Gamma_q(\nu + i + j + 1)} = \int_0^1 a_i(t)\, b_j(t)\, d_q t, \quad i, j = \overline{0, \infty},$$

где полиномы $a_i(t)$, $i = \overline{0, \infty}$, $b_j(t)$, $j = \overline{0, \infty}$, выражаются по формулам

$$a_i(t) = \frac{t^{\nu + i - 1}}{\Gamma_q(\nu + i)} \prod_{m=0}^{i-1} \left[\frac{1 - q^{\nu + m}}{1 - q} + \sigma\right], \tag{14}$$

$$b_j(t) = t^j - \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} \left\{ \int_{qt}^1 \Phi(zu)\, d_q u\, \frac{d_q}{d_q t} \left[\frac{1}{(1 - zt)\,\Phi(zt)}\right] \right\}_{z=0}, \tag{15}$$

в которых

$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varkappa-q^{k})(\varkappa-q^{k-1})\dots(\varkappa-1)}{(1-q^{k})(1-q^{k-1})\dots(1-q)}z^{k},\quad \varkappa=1+\sigma-\sigma q. \tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$(Q_\sigma\varphi)(x)=x\varphi(x)+\sigma(Q\varphi)(x). \tag{17}$$

Построим его сопряженный относительно билинейной формы (5)

$$(Q_\sigma^{*}\psi)(x)=x\psi(x)+\sigma\int_{qx}^{1}\psi(u)\,d_qu. \tag{18}$$

Достаточно просто устанавливается тот факт, что последовательное применение оператора (17) к начальной функции $a_0(t)=\dfrac{t}{\Gamma_q(\nu)}$ приведет к формулам (14), причем соответствующие обобщенные моменты будут равны коэффициентам степенного разложения (13). Чтобы получить формулу (15), сначала построим резольвенту оператора (17). Для этого необходимо решить q-интегральное уравнение

$$\psi(x)-zx\psi(x)-z\sigma\int_{0}^{x}\psi(u)\,d_qu=\varphi(x),$$

которое применением оператора (3) приводится к следующему q-дифференциальному уравнению:

$$(1-zqx)\frac{d_q}{d_qx}\psi(x)-z(1+\sigma)\psi(x)=\frac{d_q}{d_qx}\varphi(x),$$
$$\psi(0)=\varphi(0). \tag{19}$$

Применив метод степенных рядов, установим, что однородному уравнению удовлетворяет функция $\lambda(x)=\Phi(zx)$, определенная формулой (16). Для решения неоднородного уравнения применим метод вариации произвольной постоянной

$$\psi(x)=C(x)\lambda(x). \tag{20}$$

Подставляя выражение (20) в уравнение (19), получаем

$$\frac{d_q}{d_qx}C(x)=\frac{\dfrac{d_q}{d_qx}\varphi(x)}{(1-zqx)\lambda(qx)},$$

откуда

$$C(x)=C_0+\int_{0}^{x}\frac{\dfrac{d_q}{d_qu}\varphi(u)}{(1-zqu)\lambda(qu)}\,d_qu.$$

В итоге получим формулу для резольвенты

$$\psi(x)=(R_zQ_\sigma\varphi)(x)=\frac{\varphi(x)\Phi(zx)}{(1-zqx)\Phi(zqx)}-$$
$$-\Phi(zx)\int_{0}^{qx}\varphi(u)\frac{d_q}{d_qu}\left\{\frac{1}{(1-zu)\Phi(zu)}\right\}d_qu. \tag{21}$$

Очевидно, что резольвента оператора (18) будет сопряженной к оператору

(21). Произведя необходимые выкладки, получим

$$(R_z Q_\sigma^* \psi)(x) = \frac{\psi(x)}{1 - xz} - \int_{qx}^{1} \psi(u)\, \Phi(zu)\, d_q u\, \frac{d_q}{d_q x} \left\{ \frac{1}{(1 - xz)\, \Phi(zx)} \right\},$$

откуда немедленно следует формула (15). Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов вида (10) и (13) с непрерывными мерами построены в [4]. Там же получены формулы для их аппроксимант Паде в терминах специальных биортогональных систем.

1. *Дзядык В. К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 6.— С. 8—12.
2. *Jackson F. H.* Transformation of q-series // Messenger Math.— 1910.— **39**.— P. 145—153.
3. *Andrews E., Askey R.* Classical orthogonal polynomials // Lect. Notes Math.— 1985.— **1171**.— P. 36—62.
4. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации.— Киев, 1987.— 50 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 87.25).
5. *Дзядык В. К., Голуб А. П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде.— Киев, 1981.— С. 3—15.— (/ Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 81.58).
6. *Walliser R.* Rationale Approximation des q-Analogons der Exponentialfunktion und Irrationalitätsaussagen für diese Funktion // Arch. Math.— 1985.— **44**, N 1.— S. 59—64.
7. *Askey R.* The q-gamma and q-beta functions // Appl. Anal.— 1978.— **8**, N 2.— P. 125—141.
8. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные полиномы дискретной переменной.— М. : Наука, 1985.— 215 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 26.11.87