УДК 517.537

О. Б. Скаскив

О теореме типа Бореля для ряда Дирихле, имеющего нулевую абсциссу абсолютной сходимости

1. Введение и формулировка результатов. Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — целая функция, а $\mu_*(r) = \max\{|a_n| r^n: n \geqslant 0\}$, $M_*(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$, то хорошо известен следующий, получаемый методом Вимана — Валирона, результат: соотношение $\ln M_*(r) \sim \ln \mu_*(r)$ выполняется при $r \to +\infty$ вне некоторого множества E, $\int\limits_{E \cap [1, +\infty[} d \ln t < \infty$, который впервые был доказан для целых функций конечного порядка Э. Борелем, при этом исключительное множество E отсутствует. Установлению аналогов этого результата в различных классах целых функций $F(z)$, представленных абсолютно сходящимися во всей комплексной плоскости рядами Дирихле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \qquad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \uparrow +\infty$$
$$(n \to +\infty),\ a_0 = 1, \tag{1}$$

посвящены многочисленные исследования, начиная еще с работ [1, 2] и заканчивая [3—5]. В заметке [5] получен следующий, в некотором смысле окончательный, результат в этом направлении.

Т е о р е м а А. *Для того чтобы для каждой целой функции вида* (1) *соотношение*

$$\ln M(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F) \tag{2}$$

выполнялось при $x \to +\infty$ *вне некоторого множества* E_1 *конечной меры* $\left(\text{т. е.} \int\limits_{E_1 \cap [0, +\infty[} dx < \infty\right)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty, \tag{3}$$

где $M(x, F) = \sup\{|F(x+iy)|: y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(x, F) = \max\{|a_n| e^{x\lambda_n}: n \geqslant 0\}$.

Если же ряд (1) имеет абсциссу абсолютной сходимости равную нулю, то получить условие только на показатели ряда (1), обеспечивающее выполнимость соотношения (2) даже только вдоль некоторой последовательности $x = x_n \to -0$, не представляется возможным. Это утверждает следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Для любой последовательности* (λ_n) *такой, что* $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \uparrow +\infty$, $n \to \infty$, *и для любого* $h > 0$ *существует ряд* (1), *имеющий абсциссу абсолютной сходимости равную нулю, для которого*

$$\ln M(x, F) > (1 + h) \ln \mu(x, F), \qquad x_0 \leqslant x < 0, \tag{4}$$

при этом

$$\sup\{|a_n| : n \geqslant 0\} = +\infty. \tag{5}$$

Оказывается, однако, что в случае, когда ряд (1) имеет абсциссу абсолютной сходимости равную нулю (т. е. функция $F(z)$ — аналитическая в $\Pi_0 = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$), коэффициенты (a_n) ряда (1) играют, вообще говоря, ту же роль, что и показатели (λ_n) в случае целых функций вида (1). Этот факт, содержащийся в теореме 2, доказываем при помощи сведения вопроса о получении оценок общего члена ряда (1), представляющего аналитическую в Π_0 функцию, к решению аналогичного вопроса для некоторого другого связанного с ним ряда Дирихле, представляющего целую функцию. Для получения оценок общего члена ряда Дирихле, представляющего целую функцию, используем модификацию метода Вимана—Валирона, применявшуюся ранее в [3, 5]. В этой связи отметим, что ранее к рядам (1), абсолютно сходящимся только в Π_0, а также к аналитическим в $K_1 = \{z : |z| < 1\}$ степенным рядам, удавалось применить лишь метод П. Розенблума [6], хотя и несколько более простой, но дающий в случае рядов Дирихле менее общие результаты, поскольку для его применимости нужна некоторая регулярность возрастания показателей, определяемая условием на шаг $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ (см., например [7—9]).

Всюду в дальнейшем предполагаем выполненным условие (5), поскольку в случае $\sup\{|a_n| : n \geqslant 0\} < \infty$ соотношение (2) невозможно. Условие (5) эквивалентно (см., например, [10]) соотношению $\mu(x, F) \uparrow +\infty$ $(x \to -0)$. Класс таких аналитических в Π_0 функций F вида (1) обозначим через $S(\Lambda)$, а через $S_0(\Lambda)$ — подкласс функций $F \in S(\Lambda)$, последовательность показателей которых $\Lambda = (\lambda_n)_0^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\ln n = o(\lambda_n), \qquad n \to +\infty. \tag{6}$$

Отсюда, в частности, следует, что (см. [11, с. 85])

$$\varliminf_{n \to +\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n} = 0. \tag{7}$$

Логарифмической мерой измеримого множества $E_1 \subset [-1; 0[$ называем величину $l_0 - \operatorname{mes}(E_1) = \int\limits_{E_1 \cap [-1; 0[} d \ln\left(-\frac{1}{x}\right)$. Пусть, кроме того, $S = \bigcup\limits_{\Lambda} S(\Lambda)$.

В дальнейшем будем использовать также понятие мажоранты Ньютона для функций вида (1). Отметим, что определение мажоранты Ньютона вводится в [12, с. 180—183] с помощью так называемого выпуклого полигона Ньютона точек P_n на плоскости с координатами $(\lambda_n, -\ln|a_n|)$, лишь для абсолютно сходящихся в $\mathbb{C}$ рядов вида (1). Для произвольного ряда (1) строим мажоранту Ньютона, как и в [13, с. 163], следующим способом. В прямоугольной системе координат $\lambda O\mu$ отметим точки P_n и проведем из них лучи V_n в направлении положительной полуоси $O\mu$. Обозначим через Q выпуклую оболочку (полигон Ньютона) множества $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} V_n$. Если множество Q отлично от полуплоскости, то каждая прямая $\lambda=\lambda_n$, $n=1, 2, \ldots$, пересекает границу ∂Q множества Q в единственной точке $\tilde{P}_n$ с координатами $(\lambda_n, -\ln a_n^*)$. Формальный ряд

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* e^{z\lambda_n} \tag{8}$$

называем мажорантой Ньютона ряда (1). Если Q — полуплоскость, то говорим, что мажоранта Ньютона не существует. В [13] (теорема 2) доказано, что мажоранта Ньютона для ряда (1) существует только тогда, когда его абсцисса абсолютной сходимости отлична от $-\infty$, т. е. мажоранта Ньютона существует для любой функции $F\in S$.

Лемма 1 ([13], теоремы 3 и 7). *Пусть σ_H и σ_F — абсциссы абсолютной сходимости соответственно ряда* (8) *и* (1). *Если* $\ln n=o(\lambda_n)$, $n\to+\infty$, *то*

$$\sigma_H=\lim_{n\to+\infty}\frac{-\ln a_n^*}{\lambda_n}=\varliminf_{n\to+\infty}\frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n}=\sigma_F.$$

Отметим также следующие элементарные свойства мажоранты Ньютона.

Лемма 2. *Если $\sigma_H=0$ и выполняется условие* (5), *то* а) $a_n^*\geqslant|a_n|$ $(n\geqslant 0)$; б) $a_{n+1}^*\geqslant a_n^*$ $(n\geqslant 0)$; в) $\mu(x,F)=\mu(x,H)$; г) $x_n^*=\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}(\ln a_n^*-\ln a_{n+1}^*)\uparrow 0$, $n\to+\infty$.

Заметим, что если для коэффициентов ряда (1) выполняется условие г), то ряд (1) и его мажоранта Ньютона совпадают.

Основным результатом этой заметки является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $F\in S$. Если для ее мажоранты Ньютона выполняется условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln a_n^*}<+\infty, \tag{9}$$

то

$$\ln M(x,F)=o\left(\frac{1}{|x|}\ln\mu(x,F)\right) \tag{10}$$

при $x\to-0$ вне некоторого множества E конечной логарифмической меры, т. е. $l_0-\mathrm{mes}\,(E)<+\infty$. Если дополнительно потребовать выполнения условия

$$(\exists q>0)\,(|x|^q\ln\mu(x,F)\uparrow(x_0\leqslant x<0)), \tag{11}$$

то имеет место соотношение (2) *при $x\to-0$ вне некоторого множества конечной логарифмической меры.*

На неулучшаемость теоремы 2 указывает следующая теорема.

Теорема 3. *Для любой последовательности (a_n) такой, что $0<|a_n|\uparrow+\infty$, $\ln n=O(\ln|a_n|)$, $n\to\infty$, и условие* (9) *не выполняется, существует функция $F\in S$ вида* (1), *для которой*

$$\ln M(x,F)\geqslant\frac{\beta_1}{|x|}\ln\mu(x,F),\quad x_0\leqslant x<0, \tag{12}$$

а условие (11) *имеет место с* $q = 1$, *где* $\beta_1 > 0$ — *некоторая постоянная.*
Нам потребуется также следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $F \in S$. *Если для ее мажоранты Ньютона выполняется условие* (9), *то ее показатели удовлетворяют условию* (6).

Для доказательства заметим, что из условия (9) следует

$$\ln n = o(\ln a_n^*), \qquad n \to +\infty. \tag{13}$$

Обозначив $\Phi(\sigma) = \sigma \ln \mu\left(-\frac{1}{\sigma}, F\right)$ $(\sigma > 0)$, по свойству в) мажоранты Ньютона из неравенства Коши при $\sigma = \varphi(\lambda_n)$, где $\varphi(t)$ — функция, обратная к функции $\Phi(\sigma)$, имеем

$$\ln a_n^* \leqslant \frac{1}{\sigma}(\Phi(\sigma) + \lambda_n) = \frac{2\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)}. \tag{14}$$

Отсюда и из соотношения (13) следует, что [11, с. 85] выполняется (6).

2. Доказательство теоремы 2. Пусть $\mu_n = \ln a_n^*$, $n \geqslant 0$. Обозначим через $n_1(t) = \sum\limits_{\mu_n \leqslant t} 1$ — считающую функцию последовательности $0 \leqslant \mu_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$. Поскольку условие (9) эквивалентно условию (см. [5]) $\int\limits_{\mu_0}^{+\infty} t^{-2} \ln n_1(t)\, dt < +\infty$, то существует возрастающая к $+\infty$ при $t \to +\infty$ положительная на $[\mu_0, +\infty[$ функция $c(t)$ такая, что

$$M = \int\limits_{\mu_0}^{+\infty} t^{-2} c(t) \ln n_1(4t)\, dt < +\infty. \tag{15}$$

Положим $c_1(t) = c(t)/(3M)$ и выберем

$$\alpha(t) = \int\limits_{\mu_0}^{t} u^{-2} c_1(u)\, \varphi_1\left(\frac{u}{2}\right) \ln n_1(4u)\, du, \tag{16}$$

где $\varphi_1(u)$ — функция, равная функции $\Phi_1^{-1}(u)$, обратной к функции $\Phi_1(\sigma) = \ln \mu\left(-\frac{1}{\sigma}, F\right) \uparrow +\infty\ (0 \leqslant \sigma \to +\infty)$ там, где $\Phi_1^{-1}(u)$ существует, и равная 0 — в противном случае. Заметим, что $\varphi_1(u) \neq 0$ для всех достаточно больших значений u. Положим далее $\alpha_n = \exp\left\{-\int\limits_{\mu_0}^{\mu_n} \alpha(t)\, dt\right\}$, $\tau_n = \alpha(\mu_n)$. Покажем, что функция

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\alpha_n} e^{s\mu_n} \tag{17}$$

целая, здесь $b_n = \exp\{-\lambda_n\}$. Действительно, за неравенством Коши при $|x| = 1/\varphi_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right)$ последовательно имеем $\lambda_n x \leqslant -\ln a_n^* + \ln \mu(x, F)$ и

$$\lambda_n \geqslant \frac{1}{|x|}\mu_n - \frac{1}{|x|}\ln \mu(x, F) = \frac{1}{|x|}\mu_n - \frac{1}{|x|}\Phi_1\left(\frac{1}{|x|}\right) = \frac{\mu_n}{2}\varphi_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right), \quad n \geqslant n_0. \tag{18}$$

Следовательно,

$$\frac{-\ln \alpha_n}{-\ln b_n} = \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_{\mu_0}^{\mu_n} \alpha(t)\, dt \leqslant \frac{2\alpha(\mu_n)}{\varphi_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right)} \leqslant \frac{2}{3}, \qquad n \geqslant n_0. \tag{19}$$

Из (19) выводим

$$\ln(b_n/\alpha_n) \leqslant \frac{1}{3}\ln b_n = -\frac{1}{3}\lambda_n, \qquad n \geqslant n_0. \tag{20}$$

Поскольку из условия (9) следует (13), т. е. $\ln n = o(\mu_n)$, $n \to +\infty$, а также неравенство (14), то учитывая неравенство (20), по лемме 1 выводим $-\dfrac{1}{\mu_n}\ln(b_n/\alpha_n) \geqslant \lambda_n/(3\ln a_n^*) \to +\infty$, $n \to \infty$. Следовательно [11, с. 85], абсцисса абсолютной сходимости ряда (17) равна $+\infty$ и $f(s)$ — функция целая.

Пусть теперь $[s_\nu, s_{\nu+1}]$ — промежуток, на котором центральный индекс $\nu(\sigma, f) = \nu$, кроме того, если при переходе через точку $s_{\nu+1}$ центральный индекс изменяет свое значение с ν на $\nu + p$, то считаем, что $s_{\nu+1} = s_{\nu+2} = \ldots = s_{\nu+p}$. Если $(\sigma - \tau_\nu) \in [s_\nu, s_{\nu+1}[$, то для всех $\sigma \in [s_\nu + \tau_\nu, s_{\nu+1} + \tau_\nu[\stackrel{\text{def}}{=} E_\nu^*$ и для всех $n \geqslant 0$ по определению максимального члена имеем $(b_n/\alpha_n)\exp\{(\sigma - \tau_\nu)\mu_n\} \leqslant \mu(\sigma - \tau_\nu, f)$, откуда выводим

$$(b_n/b_\nu)\exp\{\sigma(\mu_n - \mu_\nu)\} \leqslant (\alpha_n/\alpha_\nu)\exp\{\tau_\nu(\lambda_n - \lambda_\nu)\} =$$

$$= \exp\Big\{-\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}(\alpha(t) - \alpha(\mu_\nu))\,dt\Big\} < 1 \ (n \neq \nu). \tag{21}$$

Полагая $x = -1/\sigma$, из неравенства (21) получаем $a_n^*\exp\{x\lambda_n\}/(a_\nu^*\exp\{x\lambda_\nu\}) = (b_n\exp\{\sigma\mu_n\}/(b_\nu\exp\{\sigma\mu_\nu\}))^{|x|} < 1$, $n \neq \nu$, т. е. $\nu(x, H) = \nu$ и, значит, $\mu(x, F) = a_\nu^*\exp\{x\lambda_\nu\}$ при $x \in [-(s_\nu + \tau_\nu)^{-1}, -(s_{\nu+1} + \tau_\nu)^{-1}[$. Следовательно, для всех $x < 0$ таких, что $\sigma = |x|^{-1} \in \bigcup_{k\in J} E_k^*$ (здесь $J \subset \mathbb{N}$ — множество значений центрального индекса $\nu(\sigma, f)$), для всех $n \geqslant 0$

$$a_n^*\exp\{x\lambda_n\} \leqslant \mu(x, F)\exp\Big\{-|x|\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}(\alpha(t) - \alpha(\mu_\nu))\,dt\Big\} =$$

$$= \mu(x, F)\exp\Big\{-|x|\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}(\mu_n - t)\,\alpha'(t)\,dt\Big\}. \tag{22}$$

Отсюда при $n = 0$ получаем

$$\ln\mu(x, F) \geqslant |x|\int_{\mu_0}^{\mu_\nu}(t - \mu_0)\,\alpha'(t)\,dt. \tag{23}$$

Пусть $E^* = \bigcup_{k\in J} E_k^*$, а $E_1 \subset]-\infty, 0[$ — образ множества при отображении $x = -\sigma^{-1}$. Ясно, что $[s_1, +\infty[\setminus E^* = \bigcup_{k=1}^{\infty}[s_k + \tau_{k-1}, s_k + \tau_k[$, поэтому $E_2 = [-s_1^{-1}, 0[\setminus E_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty}[-(s_k + \tau_{k-1})^{-1}, -(s_k + \tau_k)^{-1}[$. Как уже отмечалось выше, $\nu(x, H) = \nu$ при $x \in [-(s_\nu + \tau_\nu)^{-1}, -(s_{\nu+1} + \tau_\nu)^{-1}[$, а поскольку из неравенства (18) следует $0 \leqslant \ln\mu(x, H) = \mu_\nu - |x|\lambda_\nu \leqslant \lambda_\nu\left(-|x| + 2/\varphi_1\left(\frac{\mu_\nu}{2}\right)\right)$, т. е.

$$x \leqslant 2/\varphi_1\left(\frac{\mu_\nu}{2}\right), \qquad x_0 \leqslant x < 0, \tag{24}$$

то для всех $k \in J$ имеем

$$s_k + \tau_k \geqslant \frac{1}{2} \varphi_1\left(\frac{\mu_k}{2}\right). \qquad (25)$$

Перейдем теперь к оценке меры множества E_2. Если $k \in J$, то

$$l_k = l_0 - \operatorname{mes}([-(s_k + \tau_{k-1})^{-1}, (s_k + \tau_k)^{-1}[) = \ln((s_k + \tau_k)/(s_k + \tau_{k-1})) \leqslant$$
$$\leqslant (\tau_k - \tau_{k-1})/(s_k + \tau_{k-1})$$

и, вспоминая определение τ_k, а также применяя неравенство (25), выводим $l_k \leqslant 2 \int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} t^{-2} c_1(t) \ln n_1(4t)\, dt \Big/ \left(1 - 2 \int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} t^{-2} c_1(t) \ln n_1(4t)\, dt\right)$, т. е. для достаточно больших $k \in J$

$$l_k \leqslant 4 \int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} t^{-2} c_1(t) \ln n_1(4t)\, dt. \qquad (26)$$

Если теперь $j \notin J$, то найдутся такие k и p, что $k, p \in J$, $k < j < p$ и $s_k < s_{k+1} = s_j = s_p < s_{p+1}$, поэтому

$$E^*_{k,p} = \bigcup_{j=k+1}^{p} [s_j + \tau_{j-1}, s_j + \tau_j[= \bigcup_{j=k+1}^{p} [s_{k+1} + \tau_{j-1}, s_{k+1} + \tau_j[=$$
$$= [s_{k+1} + \tau_k, s_{k+1} + \tau_p[.$$

Пусть теперь $E_{k,p}$ — образ множества $E^*_{k,p}$ при отображении $x = -\sigma^{-1}$. Тогда $l_0 - \operatorname{mes}(E_{k,p}) = \ln((s_{k+1} + \tau_p)/(s_{k+1} + \tau_k)) \leqslant (\tau_p - \tau_k)/(s_p + \tau_p - (\tau_p - \tau_k))$. Учитывая, что $p \in J$, отсюда и из неравенства (25) для достаточно больших $k \in J$, как и выше, имеем $l_0 - \operatorname{mes}(E_{k,p}) \leqslant 4 \int\limits_{\mu_k}^{\mu_p} t^{-2} c_1(t) \ln n_1(4t)\, dt$.

Отсюда и из (26) немедленно получаем

$$l_0 - \operatorname{mes}(E_2) = 4 \int\limits_{\mu_0}^{+\infty} t^{-2} c_1(t) \ln n_1(4t)\, dt + K_1 = K_1 + 8/3,$$

где $K_1 < +\infty$ — некоторая постоянная, следовательно, множество E_2 имеет конечную логарифмическую меру на $[-1; 0[$.

Для всех $x \in [-1; 0[\setminus E_2$ выполняются неравенства (22) и (23). Из (22), благодаря свойству а) мажоранты Ньютона для оценки $\sigma(x) = \sum\limits_{\mu_n > 3\mu_\nu} |a_n| \exp\{x\lambda_n\}$ $(\nu = \nu(x, F))$ имеем

$$\sigma(x)/\mu(x, F) \leqslant \sum_{\mu_n > 3\mu_\nu} \exp\left\{-|x| \int\limits_{\mu_\nu}^{\mu_n} t^{-2} (\mu_n - t)\, c_1(t)\, \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) \ln n_1(4t)\, dt\right\}. \qquad (27)$$

Заметим теперь, что $\Phi_1(1/|x|) = \ln \mu(x, H) < \ln a^*_\nu = \mu_\nu$, поэтому $|x| \geqslant 1/\varphi_1(\mu_\nu)$ и, таким образом, для всех n таких, что $\mu_n \geqslant 3\mu_\nu$, имеем

$$|x| \int\limits_{\mu_\nu}^{\mu_n} t^{-2} (\mu_n - t)\, c_1(t)\, \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) \ln n_1(4t)\, dt \geqslant$$

$$\geqslant |x| \int\limits_{2\mu_n/3}^{\mu_n} t^{-2} (\mu_n - t)\, c_1(t)\, \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) \ln n_1(4t)\, dt > c_1(2\mu_\nu)\left(\frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2}\right) \ln n.$$

Отсюда и из неравенства (27) выводим

$$\sigma(x)/\mu(x, F) \leqslant \sum_{\mu_n > 3\mu_\nu} \exp\left\{-c_1(\mu_\nu)\left(\frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2}\right)\ln n\right\} = o(1) \tag{28}$$

при $x \to -0$ $(x \notin E_2)$.

Далее, из неравенства (23) имеем

$$\ln \mu(x, F) \geqslant |x| \int_{\mu_0}^{\mu_n} t^{-2}(t-\mu_0)\, c_1(t)\, \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) \ln n_1(4t)\, dt\Big\} \geqslant$$

$$\geqslant |x|\, \varphi_1(3\mu_\nu/8)\, c_1(3\mu_\nu/4) \ln n_1(3\mu_\nu) \int_{3\mu_\nu/4}^{\mu_\nu} t^{-2}(t-\mu_0)\, dt =$$

$$= |x|\, \varphi_1(3\mu_\nu/8)\, c_1(3\mu_\nu/4)\left(\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{3}(\mu_0/\mu_\nu)\right) \ln n_1(3\mu_\nu). \tag{29}$$

Из (29) немедленно имеем $\ln n_1(3\mu_\nu) = o\left(\frac{1}{|x|}\ln \mu(x, F)\right)(x \to -0,\ x \notin E_2)$. Поэтому из (28) получим

$$\ln M(x, F) \leqslant \ln(n_1(3\mu_\nu)\, \mu(x, F) + \sigma(x)) =$$

$$= \ln(n_1(3\mu_\nu)\, \mu(x, F) + o(\mu(x, F))) = o\left(\frac{1}{|x|}\ln \mu(x, F)\right),$$

что доказывает первую часть теоремы 2. Для доказательства второй части достаточно заметить, что из условия (11) следует $(t^{1/q}/\varphi_1(t) \uparrow (t \to +\infty)$. Поэтому $\varphi_1(3\mu_\nu/8) \geqslant \varphi_1(\mu_\nu)(3/8)^{1/q}$ и, значит, из (29) получаем $\ln n_1(3\mu_\nu) = O((\ln \mu(x, F)/c_1(3\mu_\nu/4)) = o(\ln \mu(x, F))$. Отсюда, как и выше, $\ln M(x, F) \leqslant \ln(n_1(3\mu_\nu)\, \mu(x, F) + o(\mu(x, F))) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$ $(x \to -0,\ x \notin E_2)$. Этим завершается доказательство теоремы 2.

Замечание. Насколько существенным является условие (11) для выполнимости соотношения (2) автору неизвестно. Однако, как легко видеть из доказательства, его можно заменить условием $\varphi_1(2t) = O(\varphi_1 \times (t))$ $(t \to +\infty)$.

3. Доказательство теоремы 3. Предположим, что (a_n) — произвольная возрастающая к $+\infty$ последовательность положительных чисел, для которой $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n \ln a_n) = +\infty$ и

$$\ln n = o\left(\ln a_n \sum_{k=1}^{n} 1/(k \ln a_k)\right), \qquad n \to +\infty. \tag{30}$$

Не уменьшая общности можем считать, что $a_1 > e$. Определим показатели (λ_n) рода (1) следующим образом:

$$\lambda_n = \lambda_1 + \beta \sum_{s=1}^{n-1} (\ln a_{s+1} - \ln a_s) \sum_{k=1}^{s} 1/(k \ln a_k), \qquad \lambda_1 = 1,$$

$\beta > 0$ — произвольный параметр. Покажем, что абсцисса абсолютной сходимости ряда (1) с только что определенными показателями равна 0. Применяя (30), имеем

$$\lambda_n = \lambda_1 + \beta \sum_{k=1}^{n-1} (\ln a_n - \ln a_k)/(k \ln a_k) > \beta \sum_{k=1}^{n-1} \ln a_n/(k \ln a_k) -$$

$$- \beta \sum_{k=1}^{n-1} 1/k \geqslant (\beta/2) \ln a_n \sum_{k=1}^{n} 1/(k \ln a_k), \qquad n \to +\infty. \tag{31}$$

Поэтому в силу расходимости ряда (9) получаем

$$0 < (\ln a_n)/\lambda_n \leqslant \Big((\beta/2) \sum_{k=1}^{n} 1/(k \ln a_k)\Big)^{-1} = o(1),\ n \to +\infty,$$

значит [11, с. 85], абсцисса абсолютной сходимости ряда (1) равна нулю, поскольку из (30) и (31) вытекает, что $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to +\infty$. Положим теперь $\varkappa_n = (\ln a_{n-1} - \ln a_n)/(\lambda_n - \lambda_{n-1})$. Поскольку

$$\varkappa_n = -\Big(\beta \sum_{k=1}^{n-1} 1/(k \ln a_k)\Big)^{-1} \uparrow 0,\ 1 \leqslant n \to \infty,$$

то, как хорошо известно, $\mu(x, F) = a_\nu \exp\{x\lambda_\nu\}$ при $x \in [\varkappa_\nu, \varkappa_{\nu+1}[$. Кроме того, легко показать, что при $x \in [\varkappa_\nu, \varkappa_{\nu+1}[$ для всех $0 \leqslant n \leqslant \nu - 1$ имеет место неравенство $a_n \exp\{x\lambda_n\} \leqslant a_{n+1} \exp\{x\lambda_{n+1}\}$. Следовательно, обозначив $m_\nu = [\nu/2]$, получим

$$F(x) \geqslant \sum_{n=m_\nu}^{\nu} a_n \exp\{x\lambda_n\} \geqslant [\nu/2]\, a_{m_\nu} \exp\{x\lambda_{m_\nu}\}. \tag{32}$$

Оценим теперь $a_{m_\nu} \exp\{x\lambda_{m_\nu}\}$ через максимальный член. Прежде всего заметим, что при $x \in [\varkappa_\nu, \varkappa_{\nu+1}[$

$$\ln \mu(x, F) = |x| \left(\frac{1}{|x|} \ln a_\nu - \lambda_\nu\right) \leqslant |x| (\ln a_\nu / |\varkappa_{\nu+1}| - \lambda_\nu) =$$

$$= |x| \Big(\beta \sum_{k=1}^{\nu} \ln a_\nu/(k \ln a_k) - \lambda_1 - \beta \sum_{k=1}^{\nu-1} (\ln a_\nu - \ln a_k)/(k \ln a_k)\Big) =$$

$$= |x| \Big(-\lambda_1 + \beta \sum_{k=1}^{\nu} 1/k\Big) = |x| (\beta + o(1)) \ln \nu \qquad \nu \to +\infty. \tag{33}$$

Аналогично этому имеем

$$\ln (a_{m_\nu} \exp\{x\lambda_{m_\nu}\}) \geqslant |x| \Big(\beta \sum_{k=m_\nu}^{\nu-1} \ln a_{m_\nu}/(k \ln a_k) - \lambda_1 +$$

$$+ \beta \sum_{k=1}^{m_\nu - 1} \frac{1}{k}\Big) \geqslant |x| (-\lambda_1 + \beta \ln m_\nu) = |x| (\beta + o(1)) \ln \nu, \quad \nu \to +\infty. \tag{34}$$

Из (32) — (34) немедленно получаем

$$\ln M(x, F) = \ln F(x) \geqslant \ln \left[\frac{\nu}{2}\right] +$$

$$+ |x| (\beta + o(1)) \ln \nu \geqslant \left(1 + \frac{1 + o(1)}{\beta |x|}\right) \ln \mu(x, F), \quad x \to -0.$$

Отсюда следует, что неравенство (12) из теоремы 3 выполнено.

Покажем теперь, что для значений x, достаточно близких к нулю, функция $h(x) = |x| \ln \mu(x, F)$ возрастает. Заметим, что на промежутке $x \in]\varkappa_\nu, \varkappa_{\nu+1}[$ производная $h'(x) = -\ln a_\nu + 2\lambda_\nu |x|$ больше нуля, если только $x < (-\ln a_\nu)/\lambda_\nu = t_\nu$. Последнее неравенство возможно для всех $x \in]\varkappa_\nu, \varkappa_{\nu+1}[$, если выполнено условие $t_\nu > \varkappa_{\nu+1}$, т. е. если

$$(\lambda_{n+1} - \lambda_n)/(\ln a_{n+1} - \ln a_n) < 2\lambda_n / \ln a_n. \tag{35}$$

Таким образом, $h(x)$ возрастает, если для всех достаточно больших n имеет место (35). Покажем, что для построенной функции неравенство

(35) выполняется. Действительно, $\lambda_n = \lambda_1 + \beta \sum_{k=1}^{n-1} (\ln a_n - \ln a_k)/(k \ln a_k) >$ $> \beta \sum_{k=1}^{n} \ln a_n/(k \ln a_k) - \beta \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Следовательно, если выбрать $\beta > \frac{1}{2}$, то в силу условия (30), отсюда получаем (35). Этим теорема 3 доказана полностью, поскольку из условия $\ln n = O(\ln a_n)$, $n \to +\infty$, следует условие (30). Кроме того, сделанное предположение о положительности (a_n), очевидно, не влияет на общность проведенных рассуждений.

4. Доказательство теоремы 1. Прежде всего отметим, что не уменьшая общности рассуждений можем считать $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\lambda_n) < +\infty$ и $\lambda_0 = 0$. Определим коэффициенты ряда (1) следующим образом: $\ln a_n = \beta \sum_{k=1}^{n} 1/k + \beta\lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/(k\lambda_k)$, $a_0 = 1$. Поскольку $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to +\infty$, то $\ln a_n = o(\lambda_n)$, $n \to +\infty$, и, значит ряд (1) абсолютно сходится в Π_0. Далее, $\varkappa_n = (\ln a_{n-1} - \ln a_n)/(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = -\beta \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/(k\lambda_k) \uparrow -0, n \to +\infty$. Следовательно, как и в п. 3 при $x \in [\varkappa_\nu, \varkappa_{\nu+1}[$ получим (32). Для оценки максимального члена при $x \in [\varkappa_\nu, \varkappa_{\nu+1}[$ имеем

$$\ln \mu(x, F) \leqslant \ln a_\nu + \lambda_\nu \varkappa_{\nu+1} =$$

$$= \beta \sum_{k=1}^{\nu} 1/k + \beta\lambda_\nu/((\nu+1)\lambda_{\nu+1}) = (\beta + o(1)) \ln \nu, \qquad \nu \to \infty. \tag{36}$$

Аналогично

$$\ln a_{m_\nu} + \lambda_{m_\nu} x \geqslant \ln a_{m_\nu} + \lambda_{m_\nu} \varkappa_\nu =$$

$$= \beta \sum_{k=1}^{m_\nu} 1/k + \beta\lambda_{m_\nu} \sum_{k=m_\nu+1}^{\nu} 1/(k\lambda_k) \geqslant (\beta + o(1)) \ln \nu, \qquad \nu \to +\infty. \tag{37}$$

Следовательно, из (32), (36) и (37) выводим

$$\ln M(x, F) \geqslant \ln \left[\frac{\nu}{2}\right] + (\beta + o(1)) \ln \nu \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 + \frac{1}{\beta} + o(1)\right) \ln \mu(x, F), \quad x \to -0,$$

что и завершает доказательство.

1. *Sugimura K.* Übertragung einiger Satze aus Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletschen Reihen // Math. Z.— 1929.— **29**.— S. 264—277.
2. *Amira B.* Maximalbetrag und Maximalglied Dirichletscher Reihen // Ibid.— 1930.— **31**.— S. 594—600.
3. *Шеремета М. Н.* Аналоги теоремы Вимана для рядов Дирихле // Мат. сб.— 1979.— **110**, № 1.— С. 102—116.
4. *Хомяк М. М.* Метод Вимана—Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле, с условием на рост на некоторой последовательности // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 4.— С. 527—533.
5. *Скаскив О. Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Мат. заметки.— 1985.— **37**, № 1.— С. 41—47.
6. *Rosenbloom P.* Probability and entire functions // Stud. Math. Anal. and Related Topics, Stanford, Calif. Univ. Press.— 1962.— P. 325—332.
7. *Kövari T.* On the maximum modulus and maximum term of functions analytic in unit disc // J. London. Math. Soc.— 1966.— **41**, N 1.— P. 129—137.
8. *Сулейманов Н. М.* Оценки типа Вимана—Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости и их точность // Докл. АН СССР.— 1980.— **253**, № 4.— С. 822—825.

9. *Галь Ю. М.* Об аналогах теоремы Вимана—Валирона для рядов Дирихле, показатели которых имеют положительный шаг // Изв. вузов. Математика. — 1986. — № 2. — С. 57—59.
10. *Дагене Е.* О центральном показателе ряда Дирихле // Лит. мат. сб.— 1968.— **8**, № 3.— С. 504—521.
11. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент.— М. : Наука, 1983.— 176 с.
12. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М. : Наука, 1976.— 536 с.
13. *Гече Ф. И., Онипчук С. В.* О абсциссах сходящегося ряда Дирихле и его мажоранты Ньютона // Укр. мат. журн.— 1974.— **26**, № 2.— С. 161—168.

Львов. ун-т

Получено 19.10.87