УДК 517.9

Ю. И. Петунин, В. И. Савкин

Непрерывность обратных отображений к квадратичным операторным полиномам

Пусть X, Y — банаховы пространства, $Z = X \times .... \times X$ — декартово произведение k экземпляров пространства X, $k \geqslant 2$, наделенное нормой

$$\| (x_1, \ldots, x_k) \| = \frac{1}{k} (\| x_1 \| + \ldots + \| x_k \|), \ (x_1, \ldots, x_k) \in X \times \ldots \times X$$

и B_k — сужение на диагональ $\Delta_k = \{(x, \ldots, x) \in X \times \ldots \times X\}$ k-линейного оператора $\overline{B}_k$, действующего из пространства Z в Y. Поскольку $\| (x, \ldots, x) \| = \| x \|$, то Δ изометрически изоморфно пространству X, поэтому B_k можно рассматривать как оператор из X в Y. Легко видеть, что множество таких сужений B_k образует векторное пространство, которое мы будем обозначать символом $L_{\Delta_k}(X;\ Y)$; кроме того для оператора B_k существует единственный симметричный k-линейный оператор $\overline{B}_k^*$, сужение которого на Δ_k также является оператором B_k. Действительно, в качестве $\overline{B}_k^*$ можно взять симметризацию оператора $\overline{B}_k$

$$\overline{B}_k^*(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\sigma_k} \overline{B}_k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}),$$

где σ_k — группа перестановок чисел $\{1, 2, \ldots, k\}$. Единственность оператора $\overline{B}_k^*$ обусловлена тем, что симметричный k-линейный оператор полностью определяется своими значениями на диагональных элементах:

$$B_k^*(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!}\{B_k(x_1 + \ldots + x_k) - [B_k(x_1 + \ldots + x_{k-1}) + \ldots$$
$$\ldots + B_k(x_2 + \ldots + x_k)] + [B_k(x_1 + \ldots + x_{k-2}) + \ldots + B_k(x_3 + \ldots + x_k)] + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1}[B_k(x_1) + \ldots + B_k(x_k)]\}. \qquad (1)$$

На векторном пространстве $L_{\Delta_k}(X;\ Y)$ введем числовую функцию

$$\| B_k \| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \| B_k(x) \|, \ B_k \in L_{\Delta_k}(X;\ Y). \qquad (2)$$

Нетрудно заметить, что множество операторов B_k, для которых $\| B_k \| < \infty$, образует линейное нормированное пространство $\mathscr{L}_{\Delta_k}(X;\ Y)$ с нормой (2).

Напомним, что операторным полиномом степени n называется отображение Ψ_n, действующее из банахова пространства X в Y, определяемое формулой

$$\Psi_n(x) = \sum_{k=2}^{n} B_k(x) + B_1(x) + B_0(x), \qquad (3)$$

где $B_k \in L_{\Delta_k}(X; Y)$, $k \geqslant 2$, B_1 — линейный оператор из X в Y, $B_0(x) = b_0 \in Y \quad \forall x \in X$.

Определение 1. *Будем называть слагаемые $B_k(x)$, входящие в формулу* (3), *операторными одночленами степени k, $k = 0, 1, \ldots, n$, составляющими операторный полином $\Psi_n(x)$.*

Теорема 1. *Операторный полином $\Psi_n(x)$ степени n, действующий из банахова пространства X в Y, будет непрерывным тогда и только тогда, когда непрерывны все операторные одночлены $B_k(x)$, составляющие операторный полином $\Psi_n(x)$.*

Доказательство. Необходимость. Очевидно, можно считать без ограничения общности $b_0 = \theta$. Из условий теоремы вытекает, что оператор $\Psi_n(x)$ непрерывен в нуле θ пространства X. Покажем, что отсюда следует непрерывность в нуле каждого из операторных одночленов $B_k(x)$. Действительно,

$$\Psi_n(x_1 + x_2) = B_1(x_1 + x_2) + \ldots + B_n(x_1 + x_2) = B_1(x_1 + x_2) +$$
$$+ \overline{B}_2^*(x_1 + x_2,\ x_1 + x_2) + \ldots + \overline{B}_n^*(x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2) =$$
$$= \Psi_n(x_1) + \Psi_n(x_2) + \Phi_1(x_1\ x_2), \qquad (4)$$

где $\Phi_1(x_1,\ x_2) = 2\overline{B}_2^*(x_1,\ x_2) + \ldots$ — остаточные слагаемые в сумме (4). Нетрудно заметить, что $\Phi_1(x_1, x_2)$ является симметричным непрерывным в нуле оператором, действующим из произведения $X \times X$ в Y. Далее,

$$\Psi_n(x_1 + x_2 + x_3) = B_1(x_1 + x_2 + x_3) + \ldots + B_n(x_1 + x_2 + x_3) =$$
$$= B_1(x_1 + x_2 + x_3) + \overline{B}_2^*(x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3) + \ldots$$

$$\ldots + \overline{B}_n^*(x_1 + x_2 + x_3, \ldots , x_1 + x_2 + x_3) = \Psi_n(x_1) + \Psi_n(x_2) + \Psi_n(x_3) + \\ + \Phi_1(x_1, x_2) + \Phi_1(x_1, x_3) + \Phi_1(x_2, x_3) + \Phi_2(x_1, x_2, x_3), \tag{5}$$

где $\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = 6\overline{B}_3^*(x_1, x_2, x_3) + \ldots$ — остаточные слагаемые в сумме (5) причем $\Phi_2(x_1, x_2, x_3)$ — симметричный непрерывный в нуле оператор, действующий из декартова произведения $X \times X \times X$ в Y. Продолжая этот процесс, получаем конечный набор $\{\Phi_k\}_{k=1}^{n-1}$ симметричных непрерывных в нуле операторов Φ_k от $k+1$ переменных, действующих из декартова произведения $X \times X \times \ldots \times X$ в Y, так как

$$\Psi_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = B_1(x_1 + \ldots + x_n) + \ldots + B_n(x_1 + \ldots + x_n) = \\ = B_1(x_1 + \ldots + x_n) + \overline{B}_2^*(x_1 + \ldots + x_n, x_1 + \ldots + x_n) + \ldots \\ \ldots + \overline{B}_n^*(x_1 + \ldots + x_n, \ldots , x_1 + \ldots + x_n) = [\Psi_n(x_1) + \ldots + \Psi_n(x_n)] + \\ + [\Phi_1(x_1, x_2) + \ldots + \Phi_1(x_{n-1}, x_n)] + \ldots + [\Phi_{n-1}(x_1, \ldots , x_{n-1}) + \ldots \\ \ldots + \Phi_{n-2}(x_2, \ldots ,x_n)] + \Phi_{n-2}(x_1, \ldots , x_n),$$

причем

$$\Phi_{n-1}(x_1, \ldots , x_n) = n!\ \overline{B}_n^*(x_1, \ldots , x_n).$$

Из последней формулы следует, что операторы $\overline{B}_n^*$, а потом и B_n непрерывны в нуле, а отсюда вытекает непрерывность в нуле оператора $\Psi_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} B_k$. Далее, проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что из условия непрерывности в нуле оператора Ψ_{n-1} следует непрерывность в нуле операторного одночлена B_{n-1} и т. д.

Таким образом, показано, что каждый из операторных одночленов $B_k(x)$ непрерывен в нуле пространства X. Из результатов работы [1] (см. определение 1 и теорема 1) следует, что из непрерывности операторного полинома в фиксированной точке банахова пространства X вытекает его непрерывность на всем пространстве X.

Доказательство достаточности теоремы очевидно. Теорема доказана.

Определение 3. *Операторный полином $\Psi_n(x)$, действующий из банахова пространства X в Y, называется ограниченным, если*

$$\| \Psi_n \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| \Psi_n(x) \| < \infty. \tag{6}$$

Векторное пространство ограниченных операторных полиномов, действующих из банахова пространства X в Y будем обозначать символом $P_n(X, Y)$.

В силу результатов работы [1] операторный полином $\Psi_n(x)$, действующий из банахова пространства X в Y, будет непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен.

Следствие 1. *Пусть B_k — операторный одночлен степени k из пространства $L_{\Delta_k}(X, Y)$, $k \geqslant 1$, и $\overline{B}_k^*$ — соответствующий ему полилинейный симметричный оператор. Для того чтобы оператор B_k был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\overline{B}_k^*$ был непрерывным; при этом существует такое число $C > 0$, не зависящее от B_k, но зависящее от числа k, что*

$$\| B_k \| \leqslant \| \overline{B}_k^* \| \leqslant C \| B_k \|. \tag{7}$$

Доказательство этого утверждения вытекает из доказательства теоремы 1 и эквивалентности понятия непрерывности и ограниченности для операторных полиномов.

Перейдем теперь к исследованию проблемы непрерывности обратных операторов к квадратичным операторным полиномам; для гильбертова пространства, в котором задано разложение единицы, некоторые достаточные условия непрерывности таких операторов получены в работе [2]. Основная цель этой статьи — получить достаточные условия непрерывности обратных операторов к квадратичным операторным полиномам в абстрактных гильбертовых пространствах, в которых нет никаких дополнительных структур.

Прежде всего заметим, что квадратичный операторный полином в бесконечномерном гильбертовом пространстве в отличие от числовой прямой может быть биективным отображением. Действительно, рассмотрим в пространстве l_2 отображение $A(x) = (I + B_2)(x) = (x_1, x_2 + x_1^2, x_3, x_4 + x_3^2, \ldots)$, где $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l_2$, $B_2(x) = (0, x_1^2, 0, x_3^2, \ldots)$. Легко видеть, что $A(x)$ вяляется непрерывным биективным отображением, действующим в пространстве l_2, обратный оператор $A^{-1}(x)$ к которому будет непрерывным квадратичным операторным полиномом. Для исследования свойств обратных отображений рассмотрим полноту пространств $\mathcal{L}_{\Delta_k}(X; Y)$ и $P_n(X; Y)$.

Следствие 2. *Векторное пространство $\mathcal{L}_{\Delta_k}(X; Y)$, наделенное нормой* (2), *является банаховым.*

Доказательство. Как известно, пространство полилинейных симметричных непрерывных операторов $B_k^s(X; Y)$, наделенное нормой

$$\| \overline{B}_k^* \| = \sup_{\|x_1\| = \ldots = \|x_k\| = 1} \| \overline{B}_k^* (x_1, \ldots, x_k) \| \ \forall\, \overline{B}_k^* \in B_k^s(X; Y),$$

является банаховым. Так как отображение $U : B_k^s(X; Y) \to \mathcal{L}_{\Delta_k}(X; Y)$ определяемое формулой $U(\overline{B}_k^*) = B_k$, будет линейным и биективным, то в силу неравенства (7) U представляет линейный гомеоморфизм, поэтому $\mathcal{L}_{\Delta_k}(X; Y)$ — банахово пространство.

Определение 3. *Формальный ряд $\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} B_k$ будем называть степенным оператором, действующим из X в Y. Число $R = (\overline{\lim_{k\to\infty}} \| B_k \|^{\frac{1}{k}})^{-1}$ называется радиусом равномерной сходимости оператора Ψ* [3, *с.* 782, *п.* 26.6]. *Степенной оператор Ψ будем называть степенным аналитическим оператором, если его радиус равномерной сходимости $R > 0$.*

Лемма 1. *Пусть $\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} B_k$ — степенной аналитический оператор, действующий из X в Y, с радиусом равномерной сходимости R. Если $\Psi(t) = 0$ для всех элементов t, принадлежащих шару $S_r(\theta)$ при некотором $r \in (0, R]$, то $B_k(t) = 0 \ \forall\, t \in X$, $k = 0, 1, \ldots$.*

Доказательство. Очевидно, что $B_0(t) = B_0(\theta) = \theta$. Далее, пусть t — произвольный элемент из $S_r(\theta)$. Тогда

$$\Psi(\alpha t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(\alpha t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k B_k(t) = \theta \quad \forall\, \alpha \in [-1, 1].$$

Покажем, что $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $B_k(t) = \theta$. Предположим противное. Тогда существует наименьший номер h, для которого $B_h(t) \neq \theta$ и

$$\Psi(\alpha t) = \alpha^h [B_h(t) + \alpha B_{h+1}(t) + \ldots],$$

причем ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k B_{h+k}(t) \quad \forall\, \alpha \in [-1, 1]$$

абсолютно сходится. Положим $g(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k B_{h+k}(t)$. Легко видеть, что g —

непрерывная функция, действующая из отрезка $[-1, 1]$ в Y. Поскольку $g(0) = B_h(t) \neq \theta$, то существует число α_0, $0 < \alpha_0 \leqslant 1$, такое, что при $|\alpha| < \alpha_0$ $g(\alpha) \neq \theta$. Поэтому при $0 < |\alpha| < \alpha_0$ $\Psi(\alpha t) \neq \theta$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $\forall k \in \mathbb{N}$ $B_k(t) = \theta$. Так как t — произвольный элемент из $S_r(\theta)$, то $B_h \equiv \theta$ на $S_r(\theta)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает $B_k \equiv \theta$ на X $\forall k \in \mathbb{N}$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\Psi_1 = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(1)}$ *и* $\Psi_2 = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(2)}$ — *два степенных аналитических оператора, действующих из* X *в* Y *с радиусами равномерной сходимости* R_1 *и* R_2 *соответственно и при некотором* $r \in \mathbb{R}^1$, $0 < r \leqslant \min(R_1, R_2)$ $\Psi_1(t) = \Psi_2(t)$ $\forall t \in S_r(\theta)$. *Тогда* $B_k^{(1)}(t) = B_k^{(2)}(t)$ $\forall t \in X$, $k = 0, 1, \ldots$.

Следствие 2. *Функция* $\|\cdot\|$, *определяемая формулой* (6), *заданная на векторном пространстве* $P_n(X; Y)$ *непрерывных операторных полиномов степени* n $\Psi_n = \sum_{k=0}^{n} B_k$, $B_1 \in \mathcal{L}(X; Y)$, $B_k \in \mathcal{L}_{\Delta_k}(X; Y)$, $k \geqslant 2$, $\forall x \in X$, $B_0(x) = b_0 \in Y$ *является нормой.*

Следствие 3. *Функция* $\|\cdot\|_1$, *определяемая формулой*

$$\|\Psi_n\|_1 = \sum_{k=0}^{n} \|B_k\| \quad \forall\ \Psi_n \in P_n(X; Y), \tag{8}$$

на векторном пространстве $P_n(X; Y)$ *является нормой.*

Теорема 2. *Векторное пространство* $P_n(X; Y)$, *наделенное нормой* (6) *или* (8), *есть банахово пространство.*

Доказательство. Вторая часть этого утверждения немедленно вытекает из леммы 1 и следствия 2 теоремы 1. Докажем его первую часть. Пусть $\{\Psi_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность из пространства $P_n(X; Y)$, наделенного нормой (6). Проводя аналогичные рассуждения, как и при доказательстве теоремы 1, можно построить функции $\{\Phi_p^{(k)}(x_1, \ldots, x_{p+1})\}_{p=1}^{n-1}$, удовлетворяющие условию: $\forall \varepsilon > 0$ существует k_0 такое, что $\forall k_1, k_2 \geqslant k_0$

$$\sup_{\|x_1\| \leqslant \frac{1}{n}, \ldots, \|x_{p+1}\| \leqslant \frac{1}{n}} \|\Phi_p^{(k_1)}(x_1, \ldots, x_{p+1}) - \Phi_p^{(k_2)}(x_1, \ldots, x_{p+1})\| \leqslant \varepsilon,$$

$$p = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Положим $\Psi_n^{(k)} = \sum_{m=0}^{n} B_m^{(k)}$. Поскольку $\Phi_{n-1}^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) = n!\ \overline{B_n^{(k)*}}(x_1, \ldots, x_n)$, то последовательность $\{B_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к некоторому B_n из $\mathcal{L}_{\Delta_n}(X; Y)$. Отсюда следует, что последовательность $\{\Psi_{n-1}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, где $\Psi_{n-1}^{(k)} = \sum_{m=0}^{n-1} B_m^{(k)}$, фундаментальна. Рассуждая как и выше, можно доказать, что последовательность $\{B_{n-1}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к некоторому элементу B_{n-1} из $\mathcal{L}_{\Delta_{n-1}}(X; Y)$. Продолжая этот процесс, получаем многочлен $\Psi_n = \sum_{m=0}^{n} B_m$ из $P_n(X; Y)$, к которому сходится последовательность $\{\Psi_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$. Теорема доказана.

Следствие. *Нормы* (6) *и* (8) *на векторном пространстве* $P_n(X; Y)$ *эквивалентны.*

Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство. Положим

$$\mathcal{L}_{\Delta_2}(H) = \mathcal{L}_{\Delta_2}(H; H),\ P_2(H) = P_2(H; H),\ \mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H; H).$$

Пусть $B_2 \in \mathcal{L}_{\Delta_2}(H)$, $\overline{B}_2^*$ — соответствующий ему билинейный симметричный непрерывный оператор, действующий из $H \times H$ в H и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$—ортонормированный базис в H. Очевидно $\overline{B}_2^*(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{f}_2^{(k)*}(x, y)\, e_k \ \forall\, x, y \in H$, где $\overline{f}_2^{(k)*}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — билинейные симметричные непрерывные функционалы, заданные на $H \times H$. Как известно, всякий непрерывный билинейный функционал $f(x, y)$ на $H \times H$ имеет вид $f(x, y) = (Ax, y)$, где A — ограниченный линейный оператор в H, который однозначно определяется билинейным функционалом, причем $\|A\| = \|f\|$ [4, с. 76]. В силу этого замечания существует последовательность $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограниченных линейных операторов из $\mathscr{L}(H)$ таких, что $\overline{f_2^{(k)*}}(x, y) = (A_k x, y)$, $\|\overline{f_2^{(k)*}}\| = \|A_k\| \ \forall k \in \mathbb{N}$. Поскольку $\overline{f_2^{(k)*}}$ — симметричный билинейный функционал $\forall k \in \mathbb{N}$, то $A_k = A_k^* \ \forall k \in \mathbb{N}$, т. е. A_k, $k \in \mathbb{N}$, — самосопряженный оператор. Итак $B_2(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (A_k x, x)\, e_k$. Последовательность $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограниченных линейных самосопряженных операторов из $\mathscr{L}(H)$ будем называть последовательностью, представляющей оператор B_2 относительно базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Отметим, что последовательность $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ самосопряженных операторов из $\mathscr{L}(H)$ будет последовательностью, представляющей оператор $B_2 \in \mathscr{L}_{\Delta_2}(H)$ относительно ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (A_k x, x)^2 < \infty$.

Определение 4. *Последовательность $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, представляющая оператор $B_2 \in \mathscr{L}_{\Delta_2}(H)$ относительно ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, называется коммутативной, если $A_k A_l = A_l A_k \ \forall k, l \in \mathbb{N}$.*

Определение 5. *Последовательность $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, представляющая оператор $B_2 \in \mathscr{L}_{\Delta_2}(H)$ относительно ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, называется квазикоммутативной, если существует конечное подмножество $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ такое, что $A_k A_l = A_l A_k \ \forall k, l \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$.*

Определение 6. *Оператор $B_2 \in \mathscr{L}_{\Delta_2}(H)$ будем называть оператором с коммутативным (квазикоммутативным) представлением, если в H существует ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, относительно которого представляющая оператор B_2 последовательность является коммутативной (квазикоммутативной).*

Теорема 3. *Пусть $B_2 \in \mathscr{L}_{\Delta_2}(H)$ и $\{A_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, $n = 1, 2,$ — две представляющие оператор B_2 относительно ортонормированных базисов $\{a_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ $n = 1, 2$, последовательности. Тогда они коммутативны или нет одновременно.*

Доказательство. Предположим, что представляющая оператор B_2 относительно базиса $\{a_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность $\{A_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ коммутативна. Покажем, что тогда последовательность $\{A_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ также коммутативна. Пусть $\overline{B}_2^*$ — билинейный симметричный оператор, соответствующий оператору B_2 и $a_k^{(1)} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \alpha_{km} a_m^{(2)}$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \alpha_{km}^2 = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\overline{B}_2^*(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(1)} x, y)\, a_k^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{B}_2^*(x, y), a_k^{(2)}) a_k^{(2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (A_m^{(1)} x, y) a_m^{(1)}, a_k^{(2)} \right) a_k^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (A_m^{(1)} x, y) \alpha_{mk} \right) a_k^{(2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(2)} x, y)\, a_k^{(2)}.$$

Отсюда следует, что $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mk}(A_m^{(1)}x, y) = (A_k^{(2)}x, y)$, т. е. $\forall k \in \mathbb{N}$ $A_k^{(2)}$ принадлежит слабому замыканию кольца, порожденного последовательностью $\{A_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ Следовательно, $A_k^{(i)}A_l^{(j)} = A_l^{(j)}A_k^{(i)}$; $k, l \in \mathbb{N}$, $i, j = 1,2$ [4, с. 306]. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $B_2 \in \mathcal{L}_{\Delta_2}(H)$ — квадратичный оператор с коммутативным представлением. Тогда производная $DB_2(x_0)$ оператора B_2 в любой точке $x_0 \in H$ является вполне непрерывным оператором в H.*

Доказательство. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — коммутативная последовательность, представляющая оператор B_2 относительно ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда $B_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_kx, x)e_k$. Легко видеть, что $\forall x_0 \in H$ $DB_2(x_0)(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(A_kx, x_0)e_k$. В силу теоремы о спектральном разложении самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве оператору A_k соответствует спектральная мера $\mu_t^{(k)}$ и имеет место равенство $A_k = \int_{-\infty}^{\infty} t d\mu_t^{(k)}$. Поэтому для всякого положительного числа $\varepsilon > 0$ существуют разбиения числовой прямой $\tau_0^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что при $\tau \geqslant \tau_0^{(k)}$ $t_e \in e$, $e \in \tau$, $e \neq \varnothing$, ряд $\sum_{e\in\tau} t_e(\mu_t^{(k)}e)x$ $\forall x \in H$ сходится и $\| A_k - \sum_{e\in\tau} t_e(\mu_t^{(k)}e)\| \leqslant \varepsilon^k$. Этот факт был указан в лекциях Г. П. Акилова по функциональному анализу, которые были прочитаны в 1972 г. в Новосибирском университете.

Рассмотрим оператор $E_\varepsilon(x_0)$, определенный по формуле

$$E_\varepsilon(x_0)(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{e\in\tau_0^{(k)}} t_e(\mu_t^{(k)}e)x, x_0\right)e_k.$$

Имеем

$$\| E_\varepsilon(x_0) - DB_2(x_0)\|^2 \leqslant 4\sup_{\|x\|\leqslant 1}\left\|\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_e(\mu_t^{(k)}e)x, x_0\right)e_k - \sum_{k=1}^{\infty}(A_kx, x_0)e_k\right\|^2 =$$

$$= 4\sup_{\|x\|\leqslant 1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_kx - \sum_{e\in\tau_0^{(k)}} t_e(\mu_t^{(k)}e)x, x_0\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{\|x\|\leqslant 1}\left(A_kx - \sum_{e\in\tau_0^{(k)}} t_e(\mu_t^{(k)}e)x, x_0\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{\|x\|\leqslant 1}\| A_kx - \sum_{e\in\tau_0^{(k)}} t_e(\mu_t^{(k)}e)x\|^2\|x_0\|^2 =$$

$$= 4\|x_0\|^2\sum_{k=1}^{\infty}\| A_k - \sum_{e\in\tau_0^{(k)}} t_e(\mu_t^{(k)}e)\|^2 \leqslant 4\|x_0\|^2\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{2k} = 4\|x_0\|^2\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}.$$

Отсюда следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ линейный оператор $E_\varepsilon(x_0)$ и билинейный оператор $E_\varepsilon^*(x, y) = E_\varepsilon(x)(y)$ являются непрерывными. Покажем, что $E_\varepsilon(x_0)$ есть оператор Гильберта-Шмидта. Дайствительно, для всякого $e \in \tau_0^{(k)}$, $\mu_t^{(k)}e$ — ортопроектор пространства H на некоторое подпространство $H_e^{(k)}$. В силу коммутативности последовательности $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, представляющей оператор B_2, имеем $\mu_t^{(k)}e_1\cdot\mu_t^{(m)}e_2 = \mu_t^{(m)}e_2\cdot\mu_t^{(k)}e_1$ $\forall e_1 \in \tau_0^{(k)}$, $e_2 \in \tau_0^{(m)}$, $k, m \in \mathbb{N}$, поэтому $H_{e_1}^{(k)} \perp H_{e_2}^{(m)}$, если $e_1 \cap e_2 = \varnothing$ и $H_{e_1}^{(k)} \ominus (H_{e_1}^{(k)} \cap H_{e_2}^{(m)}) \perp$

$\perp H_{e_2}^{(m)} \ominus (H_{e_1}^{(k)} \cap H_{e_2}^{(m)})$, если $e_1 \cap e_2 \neq \varnothing$. Выберем в подпространстве $H_e^{(1)}$, $e \in \tau_0^{(1)}$, ортонормированный базис $\{a_k^{(1)}(e)\}_{k=1}^{\infty}$, затем в каждом подпространстве $H_e^{(2)}$, $e \in \tau_0^{(2)}$, построим ортонормированный базис $\{a_k^{(2)}(e)\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы

$$\{a_k^{(2)}(e)\}_{k=1}^{\infty} \supset H_e^{(2)} \cap \left\{ \bigcup_{e \in \tau_0^{(1)}} \{a_k^{(1)}(e)\}_{k=1}^{\infty} \right\}$$

в каждом $H_e^{(3)}$, $e \in \tau_0^{(3)}$ — базис $\{a_k^{(3)}(e)\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы

$$\{a_k^{(3)}(e)\}_{k=1}^{\infty} \supset H_e^{(3)} \cap \left(\bigcup_{e \in \tau_0^{(1)}} \{a_k^{(1)}(e)\}_{k=1}^{\infty} \cup \bigcup_{e \in \tau_0^{(2)}} \{a_k^{(2)}(e)\}_{k=1}^{\infty} \right)$$

и т. д. Пусть $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{e \in \tau_0^{(n)}} \{a_k^{(n)}(e)\}_{k=1}^{\infty} \right)$. Тогда в силу изложенного выше имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| E_\varepsilon(x_0) e_n \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (E_\varepsilon(x_0) e_n,\ E_\varepsilon(x_0) e_n) =$$

$$= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{e \in \tau_0^{(k)}} t_e (\mu_t^{(k)} e) e_n,\ x_0 \right) e_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{e \in \tau_0^{(k)}} t_e (\mu_t^{(k)} e) e_n,\ x_0 \right) e_k \right) =$$

$$= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{e \in \tau_0^{(k)}} t_e (\mu_t^{(k)} e) e_n,\ x_0 \right)^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{e \in \tau_0^{(k)}} t_e (\mu_t^{(k)} e) x_0,\ e_n \right)^2 =$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{e \in \tau_0^{(k)}} t_e (\mu_t^{(k)} e) x_0,\ e_n \right)^2 = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{e \in \tau_0^{(k)}} t_e (\mu_t^{(k)} e) x_0 \right\|^2 =$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{e \in \tau_0^{(k)}} t_e^2 \| (\mu_t^{(k)} e) x_0 \|^2 = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{e \in \tau_0^{(k)}} t_e^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(k)}(e),\ x_0)^2 =$$

$$= \sum_{a_n^{(k)}(e) \in M} \| E_\varepsilon(x_0) (a_n^{(k)}(e)) \|^2 = \sum_{a_n^{(k)}(e) \in M} \| E_\varepsilon (a_n^{(k)}(e)) (a_n^{(k)}(e)) \|^2 (a_n^{(k)}(e),\ x_0)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{a_n^{(k)}(e) \in M} \| E_\varepsilon (a_n^{(k)}(e)) (a_n^{(k)}(e)) \|^2 \sum_{a_n^{(k)}(e) \in M} (a_n^{(k)}(e),\ x_0)^2 \leqslant \| E_\varepsilon^* \|^2 \| x_0 \|^2 < \infty.$$

Отсюда следует, что оператор $E_\varepsilon(x_0)$ является оператором Гильберта-Шмидта и, следовательно, вполне непрерывным. Так как $\| E_\varepsilon(x_0) - DB_2(x_0) \| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а пространство вполне непрерывных операторов замкнуто в $\mathscr{L}(H)$, то оператор $DB_2(x_0)$ будет вполне непрерывным. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть $\Psi = B_1 + B_2$ — инъективный оператор из пространства $P_2(X; Y)$, где X и Y — банаховы пространства. Тогда производная $D\Psi(x_0)$ оператора Ψ в любой точке $x_0 \in X$ является инъективным оператором из X в Y.*

Доказательство. Пусть $\overline{B}_2^*$ — соответствующий оператору B_2 непрерывный билинейный симметричный оператор из $X \times X$ в Y. Легко видеть, что $D\Psi(x_0)(x) = B_1(x) + 2\overline{B}_2^*(x_0, x)$. Оператор $F(x) = \Psi(x_0 + x) = B_1(x_0) + B_2(x_0) + B_1(x) + 2\overline{B}_2^*(x_0, x) + B_2(x)$ инъективен, следовательно, оператор $\Phi(x) = B_1(x) + 2\overline{B}_2^*(x_0, x) + B_2(x)$ также инъективен. Далее, пусть $x_1 \neq x_2$. Покажем, что $D\Psi(x_0)(x_1) \neq D\Psi(x_0)(x_2)$. Предположим противное: $D\Psi(x_0)(x_1) = D\Psi(x_0)(x_2)$. Тогда $\Phi(x_1 - x_2) = B_1(x_1 - x_2) + 2\overline{B}_2^*(x_0, x_1 - x_2) + B_2(x_1 - x_2)$, $\Phi(x_2 - x_1) = -B_1(x_1 - x_2) - 2\overline{B}_2^*(x_0,$

$x_1 - x_2) + B_2(x_1 - x_2)$. Отсюда получаем $\Phi(x_1 - x_2) - \Phi(x_2 - x_1) = 2 \times$ $\times B_1(x_1 - x_2) + 4\overline{B}_2^*(x_0, x_1 - x_2) = 2D\Psi(x_0)(x_1 - x_2) = 0$, или $\Phi(x_1 - x_2) =$ $= \Phi(x_2 - x_1)$, что противоречит инъективности оператора Φ, так что $D\Psi(x_0)$ — инъективное отображение. Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть $\Psi = I + B_2$ — биективный оператор из пространства $P_2(H)$, где $B_2 \in \mathscr{L}_{\Delta_2}(H)$ — оператор с квазикоммутативным представлением. Тогда обратное отображение Ψ^{-1} является непрерывным оператором.*

Доказательство. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — квазикоммутативная последовательность, представляющая оператор B_2 относительно ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. существует конечное подмножество $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ такое, что $A_k A_m = A_m A_k \ \ \forall m, \ k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$ и $B_2(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}_0} (A_k x, x) e_k + \sum\limits_{k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0} (A_k x, x) e_k$.

Положим $B_2^{(1)}(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}_0} (A_k x, x) e_k$, $B_2^{(2)}(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0} (A_k x, x) e_k \Rightarrow B_2 = B_2^{(1)} +$ $+ B_2^{(2)}$, $B_2^{(1)}$, $B_2^{(2)} \in \mathscr{L}_{\Delta_2}(H)$, $B_2^{(1)}$ — конечномерный оператор, $B_2^{(2)}$ — оператор с коммутативным представлением. Поскольку $DB_2(x_0) = DB_2^{(1)}(x_0) + DB_2^{(2)}(x_0)$, $DB_2^{(1)}(x_0)$ — конечномерный оператор, а значит, вполне непрерывный и оператор $DB_2^{(2)}(x_0)$ вполне непрерывен в силу теоремы 3, то $DB_2(x_0)$ — также вполне непрерывный оператор. Производная $D\Psi(x_0) = I + DB_2(x_0)$ оператора Ψ в любой точке $x_0 \in H$ на основании леммы 2 является инъективным оператором, поэтому в силу теоремы 11.3.4 из книги [3, с. 372] $D\Psi(x_0)$ — биективное отображение. Так как Ψ — биективное отображение, то, применяя теорему о неявной функции, получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. В вещественном бесконечномерном банаховом пространстве для операторных полиномов степени $n > 2$ теорема 5 не имеет места.

Действительно, пусть X — вещественное бесконечномерное сепарабельное банахово пространство. Покажем, что существует биективный оператор Ψ_3 из $P_3(X, X)$ такой, что отображение Ψ_3^{-1} разрывно в нуле. Для построения этого оператора на единичной сфере $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ выделим счетное всюду плотное в S множество $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. При этом можно указать последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных линейных функционалов на X, удовлетворяющих условию $\|f_n\| = 1, f_n(x_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\Psi_3(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n^2(x)\right] x.$$

Очевидно, $\|\Psi_3\| \leqslant e - 1 < \infty$, поэтому $\Psi_3 \in P_3(X, X)$. Покажем, что для всякого $x \in S$ величина $\Psi_3(x) \neq 0$. Действительно, предполагая противное, имеем $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) = 0$. Тогда в силу плотности в S последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ для всякого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует k такое, что $\|x - x_k\| < \varepsilon$. Отсюда получается противоречие: $1 = f_k(x_k) = f_k(x_k) - f_k(x) \leqslant \|x_k - x\| <$ $< \varepsilon$. Следовательно, $\Psi_3(x)$ обращается в нуль лишь при $x = \theta$. Отсюда вытекает инъективность отображения Ψ_3. В самом деле, если $x_1 \neq x_2$ и x_1, x_2 линейно независимы, то, очевидно, $\Psi_3(x_1) \neq \Psi_3(x_2)$, если же $x_1 =$ $= \alpha x_2$ и $\Psi_3(x_1) = \Psi_3(x_2)$, то $\alpha^3 = 1$, т. е. $x_1 = x_2$, так что инъективность $\Psi_3(x)$ доказана. Покажем, что Ψ_3 сюръективно. Пусть элемент $y \in X$. Тогда его прообразом является элемент $x = y[\lambda(y)]^{-1/3}$, где $\lambda(y) =$ $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n^2(y)$. Далее, пусть $z_n \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k$, $\|z_n\| = 1$. Очевидно, $\Psi_3(z_n) \to$ $\to \theta$. Отсюда вытекает, что оператор Ψ_3^{-1} разрывен в нуле.

Замечание 2. Вопрос о непрерывности обратного отображения для произвольного непрерывного биективного квадратичного операторного полинома, действующего в бесконечномерном банаховом пространстве, является открытым.

1. *Mazur S., Orlicz W.* Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen, I,II // Stud. math.— 1934.— **5**.— S. 50—68; 179—189.
2. *DeSantis R. M., Porter W. A.* On the analysis of feedback systems with a polynomic plant // Int. J. Contr.— 1975.— **21**, N 1.— P. 159—175.
3. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 836 с.
4. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Наука, 1966.— 544 с.
5. *Дьедоне Ж.* Основы современного анализа.— М. : Мир, 1964.— 430 с.

Киев. ун-т

Получено 07.06.88