УДК 517.9:519.3

В. С. Мельник

Об экстремальных решениях некоторых дифференциально-операторных систем

1. Изучаются экстремальные свойства решений дифференциально-операторных систем вида

$$y' + A(z, y) = f, \quad y(t=0) = y_0, \tag{1}$$

$$z = G(u, z, y) + g, \tag{2}$$

$$F(u, z, y) \geqslant 0, \tag{3}$$

$$u \in U \subset \mathbf{U}, \quad z \in M \subset Z, \quad y \in K \subset X, \tag{4}$$

где $\mathbf{U}$, Z и X — некоторые банаховы пространства (конкретизация ниже).

Системы (1)—(3) естественным образом возникают в теории управления объектами, описываемыми квазилинейными уравнениями (или системами уравнений) с частными производными, интегро-дифференциальными уравнениями [1—3] и др. При этом уравнение (1) описывает нелинейную динамику объекта управления, (2) характеризует управляющее устройство, которое также может быть динамическим, а (3), (4) — ограничения на управления и переменные состояния. Мы не приводим условия разрешимости смешанной операторно-эволюционной системы (1), (2). Эта задача имеет самостоятельное значение, кроме того, многочисленные исследования по «теоремам несуществования» (см., например, [7, 8]) показывают ее нетривиальность. В [9] для некоторых A и G рассмотрены вариационные методы регуляризации (1), (2). Мы предполагаем, что при некотором $u \in U$ существует пара $(z(u); y(u))$ (возможно не одна), удовлетворяющая (1), (2), и изучаем некоторые свойства решений в зависимости от $u \in U$ и $\alpha = (y_0; g; f) \in E_1 \times E_2 \times E_3 = N$. Пусть $\rho(\cdot, \alpha) : U \to 2^{Z \times X}$ — разрешающий (вообще говоря, многозначный) оператор системы (1), (2), $\operatorname{dom} \rho(\cdot, \alpha) \neq \varnothing$ и определен целевой функционал $L : U \times M \times K \to \overline{R}$. Требуется среди всех решений системы (1), (2), удовлетворяющих ограничениям (3), (4), выбрать такие, которые являются экстремалями функционала L. Наш подход основан на установлении функционально-топологических свойств многозначного оператора $\rho : U \times N \to 2^{Z \times X}$ и, в частности, согласуется с [2, 3]. Кроме того, на этом пути с единых позиций удается охватить некоторые задачи управления в условиях неопределенности и ряд других оптимизационных задач, возникающих при регуляризации некоэрцитивных и неустойчивых систем и др. Обозначим через U_0 совокупность тех $w \in \mathrm{dom}\ \rho(\cdot, \alpha)$, для которых $\exists (z(w);\ y(w)) \in \rho(w, \alpha)$, что $(w;\ z(w);\ y(w)) \in \mathrm{graph}\, \rho(\cdot, \alpha)$ удовлетворяет ограничениям (3), (4). Аналогично через U_1 обозначается множество таких $w \in \left\{v \in U \mid \forall \alpha\, \rho(v, \alpha) \neq \varnothing\right\}$, что $\forall\, \alpha \in N\ (z(w, \alpha);\ y(w, \alpha)) \in \rho(w, \alpha)$, причем $(w;\ z(w, \alpha);\ y(w, \alpha))$ удовлетворяет (3), (4) $\forall\, \alpha \in N$.

Определение 1. *Многозначное отображение* $\rho_1(\cdot, \cdot) : U_0 \times N \to 2^{Z \times X}$ *называется максимально допустимым подотображением (м. д. п.) относительно* (3), (4), *если* $\rho_1(w, \alpha) \subseteq \rho(w, \alpha)\ \forall\, (w;\ \alpha) \in U_0 \times N$ *и из того, что* $(z(w);\ y(w)) \in \rho(w, \alpha)$ *и* $(w;\ z(w);\ y(w))$ *удовлетворяет* (3), (4), *следует* $(w;\ z(w);\ y(w)) \in \mathrm{graph}\, [\rho_1(\cdot, \alpha) \upharpoonright_{U_0}]$.

Положим $\mathcal{R}_\alpha(u) = (u;\ \rho_1(u, \alpha))$, тогда суперпозиция $L(\mathcal{R}_\alpha(u))$ является многозначной функцией и необходимо уточнить, что понимается под оптимизационной задачей. Рассмотрим несколько возможных случаев: 1) среди сечений $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ находится «наилучшее» $\hat{r}_\alpha$, затем по этому сечению выбирается оптимальный элемент, т. е. $L_1(\hat{r}_\alpha(u)) = \inf\limits_{r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha} L(r_\alpha(u)) \to \inf\limits_u$; 2) $L_2(\bar{r}_\alpha(u)) = \sup\limits_{r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha} L(r_\alpha(u)) \to \inf\limits_u$; 3) $L_3(\bar{r}_\alpha(u)) \to \inf\limits_u$, где $\bar{r}_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ — некоторое априори фиксированное сечение; 4) $L_4(\hat{r}_{\hat{\alpha}}(u)) = \sup\limits_{\alpha \in N} \inf\limits_{r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha} L(r_\alpha(u)) \to \inf\limits_u$; 5) $L_5(\hat{r}_{\hat{\alpha}}(u)) = \sup\limits_{\alpha \in N} \sup\limits_{r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha} L(r_\alpha(u)) \to \inf\limits_u$ и др.

Определение 2. *Элемент* $w \in U_0$ *называется* L_i*-экстремальным* $(i = 1-3)$ *(для* $i = 4, 5$, $w \in U_1$*), если найдется* r_α *такое (для* $i = 4, 5$ *и* $\hat{\alpha} \in N$*), что* $L_i(r_\alpha(w)) = \inf\limits_u L_i(r_\alpha(u))$. *При этом соответствующее* $r_\alpha(w)$ *называется* L_i*-экстремальным решением* (1) — (4).

2. Уточним теперь входящие в (1) — (4) объекты. Пусть $X = X_1 \cap X_2$, $X_1 = L_{p_1}(S;\ V)$, $X_2 = L_{p_0}(S;\ H)$, $S = [0, T]$, $T < \infty$, $1 < p_1 < \infty$ $p_1 \leqslant p_0 < \infty$ (в некоторых случаях допускается $p_0 = \infty$), где V — рефлексивное банахово пространство непрерывно и плотно вложенное в гильбертово пространство H; X^* — пространство топологически двойственное X; $\mathbf{U} = B_1^*$, $Z = B_2^*$; B_1, B_2 — банаховы пространства; Y — банахово пространство, полуупорядоченное воспроизводящим конусом $\mathbf{K}$; $N \subset H \times Z \times X^*$, $G : U \times M \times K \to Z$, $F : U \times M \times K \to Y$, $A : M \times K \to X^*$ — нелинейные операторы (A — возможно, многозначный [1, 2]); K — слабо замкнутое подмножество в X, а U и M — $*$-слабо замкнуты в $\mathbf{U}$ и Z соответственно; y' — обобщенная производная $y \in X$ в смысле $\mathcal{D}^*(S;\ V^*)$ [2].

Далее используются обозначения: $\langle \cdot, \cdot \rangle_X : X^* \times X \to \mathbf{R}$ — каноническая двойственность, $\rightharpoonup$ — слабая сходимость, $\overset{*}{\rightharpoonup}$ — $*$-слабая сходимость, $W = \{y \in X \mid y' \in X^*\}$.

Определение 3. а) *многозначное отображение* $\mathcal{R} : \mathbf{U} \to 2^{\mathbf{U} \times Z \times X}$ $*$*-слабо полунепрерывно сверху ($*$-сл. пн. св.), если из* $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *в* $\mathbf{U}$, $\xi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \xi$ *в топологии произведения на* $\mathbf{U} \times Z \times X$ $(\xi_n \in \mathcal{R}(u_n))$, *следует* $\xi \in \mathcal{R}(u)$; б) *функционал* $L : \mathbf{U} \times Z \times X \to \overline{\mathbf{R}}$ $*$*-сл. полукомпактен снизу ($*$-сл. пк. сн.), если для произвольных ограниченных последовательностей* $\{u_n\}$, $\{z_n\}$, $\{y_n\}$ *можно извлечь подпоследовательности* $\{u_m\}$, $\{z_m\}$, $\{y_m\}$ *такие, что* $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *в* $\mathbf{U}$, $z_m \overset{*}{\rightharpoonup} z$ *в* Z, $y_m \rightharpoonup y$ *в* X *и* $\varliminf L(u_m, z_m, y_m) \geqslant L(u, z, y)$.

Предложение 1. *Пусть функционал* $L : \mathbf{U} \times Z \times X \to \overline{\mathbf{R}}$ $*$*-сл. пк. сн. и коэрцитивен* ($L(u, z, y) \to +\infty$ *равномерно по* $(z;\ y) \in Z \times X$ *при* $\|u\|_{\mathbf{U}} \to \infty$), *а многозначное отображение* $\mathcal{R} : \mathbf{U} \to 2^{\mathbf{U} \times Z \times X}$ $(\mathcal{R}(u) = (u;\ \rho(u)),$

$\rho:\mathbf{U}\to 2^{Z\times X}$) *ограничено и $*$-сл. пн. св. Тогда* $\exists w\in\mathbf{U}$ *и сечение* $r\in\mathcal{R}$ *такие, что* $L(r(w))=\inf\{L(\mathcal{R}(u)),\ v\in\mathbf{U}\}$.

Следствие 1. *Положим* $\mathcal{L}(w)=\sup\limits_{r\in\mathcal{R}} L(r(u))$. *Тогда существует* $u\in\mathbf{U}$, *для которого* $\mathcal{L}(u)\leqslant\mathcal{L}(w)\ \forall\, w\in\mathbf{U}$.

Рассмотрим семейство $\{\mathcal{R}_\alpha:\mathbf{U}\to 2^{\mathbf{U}\times Z\times X},\ \alpha\in N\}$, $\mathcal{R}=\underset{\alpha}{\times}\mathcal{R}_\alpha$, $r=\{r_\alpha\}\in\in\mathcal{R}$, $r_\alpha(u)\in\mathcal{R}_\alpha(u)=(u;\ \rho_\alpha(u))$, $\rho_\alpha:\mathbf{U}\to 2^{Z\times X}$. Пусть $\pi_\alpha:[\mathbf{U}\times Z\times X]^N\to\to\mathbf{U}\times Z\times X$ — проекция N-декартова произведения на α-компоненту и положим $\mathcal{L}(\mathcal{R}(u))=\{l(r(u)),\ r\in\mathcal{R}\}$, где отображение $l:[\mathbf{U}\times Z\times X]^N\to\overline{\mathbf{R}}$ определяется равенством $l(r(u))=\sup\limits_\alpha L(\pi_\alpha r(u))$.

Следствие 2. *Пусть* $\forall\,\alpha\in N$ $\mathcal{R}_\alpha$ — *ограниченное $*$-сл. пн. св. отображение. Тогда* $\exists\, u\in\mathbf{U}$ *и* $r\in\mathcal{R}$ *такие, что* $l(r(u))=\inf\{\mathcal{L}(\mathcal{R}(w)),\ w\in\mathbf{U}\}$.

Замечание 1. Предложение 1 остается в силе, если пространство X сопряженное к банахову (или сепарабельному нормированному). Можно также освободиться от коэрцитивности функции L, если U ограниченное $*$-сл. замкнутое подмножество $\mathbf{U}$ и $\mathcal{R}:U\to 2^{U\times Z\times X}$.

3. Определение 4. *Оператор* $A:M\times K\to X^*$ *обладает свойством* $\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}'$), *если из* $M\ni z_n\overset{*}{\rightharpoonup} z$ *в* Z, $K\cap W\ni y_n\rightharpoonup y$ *в* W ($K\ni y_n\rightharpoonup y$ *в* X *и* $y_n\rightharpoonup y$ *в* $C_w(S;V)$ — *пространство деминепрерывных функций из* S *в* V), $A(z_n,y_n)\rightharpoonup d$ в X^* *и* $\overline{\lim}\,\langle A(z_n,y_n),y_n\rangle_X\leqslant\langle d,y\rangle_X$ *следует* $d=A(z,y)$.

Примеры отображений, обладающих свойством $\mathfrak{N}$, рассмотрены в [1, 4]. Введем основные условия. Пусть $K_W=K\cap W$. У1) оператор $A:M\times K\to\to X^*$ обладает свойством $\mathfrak{N}$ и коэрцитивен, т. е. $\|y\|_X^{-1}\langle A(z,y),y\rangle_X\to\to+\infty$ равномерно по $z\in M_1$ при $\|y\|_X\to\infty$, где M_1 — произвольное ограниченное подмножество M; У2) $F:U\times M\times K_W\to Y$ $*$-сл. компактный оператор, т. е. из произвольных $U\ni u_n\overset{*}{\rightharpoonup} u$ в $\mathbf{U}$, $M\ni z_n\overset{*}{\rightharpoonup} z$ в Z, $K_W\ni y_n\rightharpoonup y$ в W можно извлечь подпоследовательности $\{u_m\}$, $\{z_m\}$, $\{y_m\}$ такие, что $F(u_m,z_m,y_m)\rightharpoonup F(u,z,y)$ в Y: У3) Z — вложимое пространство, отображение $\mathcal{G}:U\times M\times K\to Z$ ($\mathcal{G}(u,z,y)=z-G(u,z,y)$) обладает свойством $\mathfrak{N}$ и если $y\in K_W$, $\|u\|_{\mathbf{U}}^*\leqslant l$, $\|z\|_Z\geqslant\lambda>0$, то $\langle G(u,z,y)+g,z\rangle_Z\leqslant 0$.

Теорема 1. *Пусть* $A:M\times K\to X^*$ — *ограниченное отображение, выполнены условия* У1) — У3), *функция* $L:U\times M\times K\to\overline{R}$ $*$-*сл. пк. сн. и либо* U — *ограниченное множество, либо* L — *коэрцитивна. При этих условиях система* (1)—(4) *имеет* L_1-*экстремальное решение, если* $U_0\neq\varnothing$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{K}^*$ — сопряженная полугруппа конуса $\mathbf{K}$. На $\mathbf{K}^*\setminus\{o\}$ введем отношение $\sim$: $\varphi_1\sim\varphi_2\Leftrightarrow\exists\, t\in(0,\infty)$, $\varphi_1=t\varphi_2$ ($\varphi_1,\varphi_2\in\in\mathbf{K}^*$), а через $\mathbf{P}_+(\mathbf{K}^*)$ обозначим фактор по этому отношению. Сужение $\pi^*\restriction_{\mathbf{K}^*\cap S_1^*}$ канонического фактор-отображения является непрерывной сюръекцией относительно фактор-топологии на $\mathbf{P}_+(\mathbf{K}^*)$, где S_1^* — единичная сфера в Y^*. Если для $(u;\ z;\ y)$ $F(u,z,y)\not\geqslant 0$, то найдется $\psi\in\mathbf{K}^*$, для которого $\langle F(v,z,y),\sigma\rangle_Y<0\ \forall\,\sigma\in\pi^*(\psi)$. Пусть $\mathcal{F}(\mathbf{R};\mathbf{R}_+)$ — совокупность выпуклых пн. сн. убывающих функций, строго монотонных на $\mathbf{R}_-$. Рассмотрим параметрическое семейство задач со «штрафом»:

на решениях (1), (2) с ограничениями (4) минимизировать функционал

$$L^\varepsilon(u,z(u),y(u))=L(u,z(u),y(u))+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\sup_{\varphi\in\mathbf{K}^*\cap S_1^*}\mu(\langle F(u,z(u),y(u)),\varphi\rangle_Y)\to\inf_u,\tag{5}$$

где $\varepsilon>0$, $\mu\in\mathcal{F}(\mathbf{R};\mathbf{R}_+)$, $\mu(0)=0$.

Лемма 1. *При любых* $\varepsilon>0$ *и* $\mu\in\mathcal{F}(\mathbf{R};\mathbf{R}_+)$ *задача* (1), (2), (4), (5) *имеет* L_1^ε-*экстремальное решение.*

Доказательство. Пусть $\tilde{U}_0$ — множество тех $w\in\operatorname{dom}\rho(\cdot,\alpha)$, что $\exists\,(z(w);\ y(w))\in\rho(w,\alpha)\cap(M\times K)$ и пусть $\bar{\rho}_1(\cdot,\alpha):\tilde{U}_0\to 2^{Z\times X}$ — м. д. п.

для (4). Для произвольного ограниченного $U' \subset \tilde{U}_0$ множество $\tilde{\rho}_1(U', \alpha)$ ограничено в $Z \times W$, в противном случае можно указать последовательность $\{z_n; y_n\} \subset \tilde{\rho}_1(U', \alpha)$, что $\| z_n \|_Z + \| y_n \|_W \to \infty$ (допустим $\| z_n \|_Z \to \infty$ и $\| y_n \|_W \to \infty$). Умножая (1) и (2) на y_n и z_n соответственно, находим $\langle A(z_n, y_n), y_n \rangle_X - \frac{1}{2} \| y_0 \|_H^2 \leqslant \frac{1}{2} (\| y_n(T) \|_H^2 - \| y_0 \|_H^2) + \langle A(z_n, y_n), y_n \rangle_X \leqslant$ $\leqslant \| f \|_{X^*} \| y_n \|_X$, $\langle G(u_n, z_n, y_n) + g, z_n \rangle_Z > 0$. Отсюда и свойств коэрцитивности У1), У2) получаем $\| z_n \|_Z \leqslant k_1$, $\| y_n \|_X \leqslant k_2$, а поскольку оператор A ограничен, то $\| y_n' \|_{X^*} \leqslant k_3$, т. е. $\| y_n \|_W \leqslant k_4$, что противоречит допущению. Положим $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha(u) = (u; \tilde{\rho}_1(u, \alpha))$ и докажем, что отображение $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha : \tilde{U}_0 \to$ $\to 2^{\tilde{U}_0 \times Z \times X}$ — сл. пн. св. Пусть $\tilde{U}_0 \ni u_n \xrightarrow{*} u$ в $\mathbf{U}$. Множество $\{\tilde{\rho}_1(u_n, \alpha)\}$ ограничено в $Z \times W$ и можно считать $\mathbf{K}_W \ni y_n \to y$ в W, $M \ni z_n \xrightarrow{*} z$ в Z, где $(z_n; y_n) \in \hat{\rho}_1(u_n, \alpha)$, причем $(z; y) \in M \times K$. В силу ограниченности A и теоремы Банаха — Алаоглу $A(z_n, y_n) \to d$ в X^*, кроме того, $G(u_n, z_n, y_n) \xrightarrow{*}$ $\xrightarrow{*} \varkappa = z - g$ в Z. Множество $\{y_n'\}$ ограничено в X^*, следовательно, $y_n' \to$ $\to \zeta$ в X^*, а с другой стороны, $y_n' \to y'$ в $\mathcal{D}^*(S; V^*)$, поэтому $\zeta = y'$ и $y' + d = f$, $z = \varkappa - g$. Для компактного S пространство W вложено в $C(S; H)$ непрерывным оператором i. Пусть $\mathcal{M}(S)$ — множество мер Бэра на S, тогда $\forall \nu \in \mathcal{M}(S)$ и $\forall h \in H$ отображение $C(S; H) \ni f \mapsto \left(\int_S f(t) \times \right.$ $\left. \times \nu(dt), h \right)$ непрерывно на $C(S; H)$ с равномерной топологией (здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H). Поскольку $\left(h, \int_S f(t) \nu(dt) \right) =$ $= \int_S (h, f(t)) \nu(dt) = \varphi(f)$, то $\varphi \in [C(S; H)]^*$. Оператор i непрерывен относительно слабых топологий, следовательно, $y_n \to y$ в $C(S; H)$ и $\int_S (h, y_n(t) - y(t)) \nu(dt) \to 0$ $\forall \nu \in \mathcal{M}(S)$. Возьмем в качестве ν меру Дирака ε_0, сосредоточенную в точке 0, тогда $\int_S (h, y_n(t) - y(t)) \varepsilon_0(dt) =$ $= (y_n(0) - y(0), h) \to 0$ $\forall h \in H$, т. е. $y(0) = y_0$. Аналогично $y_n(T) \to y(T)$ в H. Переходя к пределу в равенстве

$$\langle A(z_n, y_n), y_n \rangle_X \leqslant \langle f, y_n \rangle_X - \frac{1}{2} (\| y_n(T) \|_H^2 - \| y_0 \|_H^2), \tag{6}$$

находим $\overline{\lim} \langle A(z_n, y_n), y_n \rangle_X \leqslant \langle d, y \rangle_X$, а так как оператор A обладает свойством $\mathfrak{N}$, то $d = A(z, y)$. Также доказывается, что $\varkappa = G(u, z, y)$. Таким образом $(u; z; y) \in \operatorname{graph} [\tilde{\rho}_1(\cdot, \alpha) \restriction_{U_0}]$ и отображение $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ $*$-сл. пн. св. Остается показать, что $\forall \varepsilon > 0$ и $\mu \in \mathcal{F}(\mathbf{R}; \mathbf{R}_+)$ функция L^ε $*$-сл. пк. сн. Пусть $U \ni u_n \xrightarrow{*} u$ в $\mathbf{U}$, $K_W \ni y_n \to y$ в W, $M \ni z_n \xrightarrow{*} z$ в Z, тогда в силу $*$-сл. компактности F можно считать, что $F(u_n, z_n, y_n) \to F(u, z, y)$ в Y. Если конус $\mathbf{K}$ воспроизводящий, то $\mathbf{K}^* \subset Y^*$, следовательно, $\langle F(u_n, z_n, y_n), \varphi \rangle_Y \to$ $\to \langle F(u, z, y), \varphi \rangle_Y$ $\forall \varphi \in \mathbf{K}^*$, а поскольку функция $Y \in \xi \mapsto \sup\limits_{\varphi \in \mathbf{K}^* \cap S_1^*} \mu(\langle \xi, \varphi \rangle_Y)$ выпукла и пн. сн. $\forall \mu \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$, то L^ε удовлетворяет требованиям предложения 1 и, таким образом, лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть при каждом ε тройка $(u_\varepsilon; z_\varepsilon; y_\varepsilon)$ является экстремальной для (1), (2), (4), (5) и устремим ε к 0. Множество $\{u_\varepsilon\}$ ограничено в $\mathbf{U}$, что следует из ограниченности U либо коэрцитивности L, так как

$$L(u_\varepsilon, z_\varepsilon, y_\varepsilon) \leqslant L^\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon, y_\varepsilon) \leqslant L(\zeta(w)) \ \forall w \in \tilde{U}_0 \ \forall \zeta \in \mathcal{R}_\alpha.$$

Далее, из коэрцитивности A и G и того, что $(u_\varepsilon; z_\varepsilon; y_\varepsilon) \in \operatorname{graph} \tilde{\rho}_1(\cdot, \alpha)$ вытекают оценки $\|y_\varepsilon\|_W \leqslant l_1$, $\|z_\varepsilon\|_Z \leqslant l_2$. Следовательно (переходя если нужно к подпоследовательностям), $K_W \ni y_\varepsilon \to y$ в W, $\tilde{U}_0 \ni u_\varepsilon \xrightarrow{*} u$, в $\mathbf{U}$, $M \ni z_\varepsilon \xrightarrow{*} z$ в Z, а поскольку отображение $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ $*$-сл. пн. св., то $(u; z; y) \in \operatorname{graph} [\tilde{\rho}_1(\cdot, \alpha) \restriction_{\tilde{U}_0}]$. Докажем, что $F(u, z, y) \geqslant 0$ и тем самым установим соотношение $(u; z; y) \in \operatorname{graph} [\rho_1(\cdot, \alpha) \restriction_{U_0}]$. Из неравенства $L^\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon, y_\varepsilon) \leqslant L^\varepsilon(\zeta(w)) \leqslant L(\zeta(w))$, справедливого $\forall (w; \zeta) \in U_0 \times \mathcal{R}_\alpha$, получаем $\sup\limits_{\varphi \in \mathbf{K}^* \cap S_1^*} \mu(\langle F(u_\varepsilon, z_\varepsilon, y_\varepsilon), \varphi\rangle_Y) \leqslant C\varepsilon$, где $C = \text{const}$, откуда $0 \geqslant \underline{\lim} \sup\limits_{\varphi \in \mathbf{K}^* \cap S_1^*} \mu(\langle F(u_\varepsilon, z_\varepsilon, y_\varepsilon), \varphi\rangle_Y) \geqslant \sup\limits_{\varphi \in \mathbf{K}^* \cap S_1^*} \mu(\langle F(u_\varepsilon, z_\varepsilon, y_\varepsilon), \varphi\rangle_Y)$, т. е. $F(u, z, y) \geqslant 0$. Остается доказать L_1-оптимальность $u \in U_0$. Пусть от противного $\exists w \in U_0$ и $\zeta \in \mathcal{R}_\alpha$, для которых $L(u, z, y) > L(\zeta(w))$. Но тогда в силу $*$-сл. пк. сн. L получаем противоречие. Теорема доказана.

Замечание 2. Теорема справедлива, если коэрцитивность A или G заменить на ограниченность K или M соответственно.

Следствие 3. *Пусть функция L ограничена снизу* (о. сн.) *и удовлетворяет условию* (*f*) [3]: $\forall c > 0$ *множество* $\{(u; z; y) \in U \times M \times K \mid L(u, z, y) \leqslant c\}$ *ограничено в* $\mathbf{U} \times Z \times X$. *Тогда утверждение теоремы сохранится для некоэрцитивных A, G и L и неограниченных U, M и K.*

Доказательство основано на том, что предложение 1 справедливо для неограниченных $\mathcal{R} : U \to 2^{U \times M \times K}$ и некоэрцитивных L, если функция $L : U \times M \times K \to \bar{R}$ ограничена снизу и $*$-сл. пк. сн. и обладает свойством (*f*).

Определение 5. *Оператор $A : M \times K \to X^*$ называется оператором с равномерно полуограниченной вариацией, если $\forall y_1, y_2 \in K$ и некоторого $R > 0$ такого, что $\|y_i\|_X \leqslant R$, $i = 1, 2$, справедливо неравенство*

$$\langle A(z, y_1) - A(z, y_2), y_1 - y_2\rangle_X \geqslant -\inf_{y \in M_1} C(z; R; \|y_1 - y_2\|'_X) \quad \forall z \in M_1,$$

где M_1 — произвольное ограниченное подмножество M; при каждом $z \in M$ $\forall C(z; \cdot; \cdot) : R_+ \times R_+ \to R$ — непрерывная функция, причем $t^{-1} \times C(z; \rho; t\eta) \to 0$ при $t \to +0$ $\forall \rho, \eta \geqslant 0$, а норма $\|\cdot\|'_X$ компактна относительно $\|\cdot\|_X$.

Следствие 4. *Теорема справедлива, если вместо компактности S и ограниченности A оператор $A : M \times K \to X$ — оператор с равномерно полуограниченной вариацией, ограниченный по первому аргументу при фиксированном втором.*

Замечание 3. Если $\forall z \in Z$ оператор $A(z, \cdot)$ радиально непрерывен [1], а для любого $y \in X$ отображение $A(\cdot, y) : M \to X^*$ непрерывно относительно $*$-топологии Z и слабой топологии X^* и из $z_n \xrightarrow{*} z$ в Z, $y_n \to y$ в $W \Rightarrow \langle A(z_n, y), y_n - y\rangle_X \to 0$, то в условиях следствия 1 оператор A обладает свойством $\mathfrak{N}$ [1].

Замечание 4. Приведенные выше утверждения справедливы, если условие $\mathfrak{N}$ заменить на $\mathfrak{N}'$.

Доказательство. Пусть $\hat{U}_0$ — произвольно ограниченное подмножество U_0. Тогда $\rho_1(\hat{U}_0, \alpha)$ ограничено в $Z \times W$, иначе можно указать такие $\{z_n; y_n\} \subset M \times K_W$, что $\|z_n\|_Z + \|y_n\|_W \to \infty$. Для любого $t \in S$ имеем

$$\int_0^t \langle A(z_n, y_n)(\tau), \quad y_n(\tau)\rangle_V \, d\tau \leqslant \frac{1}{2} \|y_n(t)\|_H^2 +$$

$$+ \int_0^t \langle A(z_n, y_n)(\tau), y_n(\tau)\rangle_V \, d\tau \leqslant \|f\|_{X^*} \|y_n\|_X + \frac{1}{2} \|y_0\|_H^2, \tag{7}$$

откуда ввиду произвольности $t \in S$, коэрцитивности A и G получаем оценки $\|z_n\|_Z \leqslant k_1$ и $\|y_n\|_X \leqslant k_2$. Следовательно, можно предположить, что $z_n \overset{*}{\rightharpoonup} z$ в Z, $y_n \rightharpoonup y$ в X, $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ в $\mathbf{U}$, где $(z_n; y_n) \in \rho_1(u_n, \alpha)$. Ограниченность $\{A(z_n, y_n)\}$ является следствием ограниченности $\{z_n; y_n\}$, оценки (7) и следующей леммы.

Лемма 2 [1]. *Пусть $A: M \times K \to X^*$ — оператор с равномерно полуограниченной вариацией, ограниченный по первому аргументу при фиксированном втором и $\forall\, l_1, l_2 > 0\, \exists\, l_3$ такое, что $\langle A(z, y), y\rangle_X \leqslant l_3$, если $\|z\|_Z \leqslant l_1$ и $\|y\|_X \leqslant l_2$. Тогда найдется k, для которого $\|A(z, y\|_{X^*} \leqslant k$ при $\|z\|_Z \leqslant l_1$, $\|y\|_X \leqslant l_2$.*

Таким образом, имеем $\|y_n\|_W \leqslant l$, $A(z_n, y_n) \rightharpoonup d$ в X^*, $G(u_n, z_n, y_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \varkappa$ в Z, $y_n' \rightharpoonup y'$ в X^* и $y' + d = f$, $z - \varkappa = g$. Для $t \in S$ положим $X_t = L_{p_1}([0, t]; V) \cap L_{p_0}([0, t]; H)$, X_t^* — сопряженное пространство, $W_t = \{\xi \in X_t \mid \xi_t' \in X_t^*\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_t : X_t^* \times X_t \to \mathbf{R}$ — двойственность, $\pi_t : X \to X_t$ — оператор сужения функций на $[0, t]$, а $r_t : X_t \to X$ — оператор продолжения функций из X нулем на $S \setminus [0, t]$. Определим отображение $A^t : Z \times X_t \to X_t^*$ по правилу $A^t(z, y^t) = r_t^* A(z, r_t y^t)$, $z \in Z$, $y^t \in X_t$. Многие важные свойства оператора A наследуются A^t.

Лемма 3. *Для любого $t \in S$ $A^t : Z \times X_t \to X_t^*$ обладает свойством $\mathfrak{N}$.*

Доказательство. Пусть $z_n \overset{*}{\rightharpoonup} z$ в Z, $y_n^t \rightharpoonup y^t$ в W_t, $A^t(z_n, y_n^t) \rightharpoonup d^t$ в X_t^* и $\overline{\lim} \langle A^t(z_n, y_n^t), y_n^t\rangle_t \leqslant \langle d^t, y^t\rangle_t$. Но тогда $r_t y_n^t \rightharpoonup r_t y^t$ в X и $\bar{r}_t y_n^{t\prime} \rightharpoonup \bar{r}_t y^{t\prime}$ в X^* (здесь $\bar{r}_t : X_t^* \to X^*$ — оператор продолжения), поскольку $\|r_t y^t\|_X = \|y^t\|_{X_t}$ и $\|\bar{r}_t \xi^t\|_{X^*} = \|\xi^t\|_{X_t^*}$, кроме того, $\langle A(z_n, r_t y_n^t), r_t \varphi^t\rangle_X = \langle A^t(z_n, y_n^t), \varphi_t\rangle_t \to \langle d^t, \varphi^t\rangle_t$ и $A(z_n, r_t y_n^t) \rightharpoonup \hat{d}^t$ в X^*, где $\tilde{d}^t = r^t d^t$. Тогда $\overline{\lim} \langle A(z_n, r_t y_n^t), r_t y_n^t\rangle_X = \overline{\lim} \langle A^t(z_n, y_n^t), y_n^t\rangle_t \leqslant \langle d^t, y^t\rangle_t = \langle \tilde{d}^t, r_t y^t\rangle_X$ и поскольку оператор A обладает свойством $\mathfrak{N}$, $A(z, r_t y^t) = \tilde{d}^t$, т. е. $A^t(z, y^t) = d^t$. Лемма доказана.

Далее, так как $A(z_n, y_n) \rightharpoonup d$ в X^* при $M \ni z_n \overset{*}{\rightharpoonup} z$ в Z, $K_W \ni y_n \rightharpoonup y$ в W, то $r_t^* A(z_n, y_n) \rightharpoonup r_t^* d$ в X_t^* $\forall\, t \in S$. Но ввиду «неупреждаемости» $r_t^* A(z_n, y_n) = r_t^* A(z_n, \pi_t y_n) = A^t(z_n, y_n^t)$ и, таким образом, $A^t(z_n, y_n^t) \rightharpoonup d^t$ в X_t^*, $y_n^t \rightharpoonup y^t$ в W_t, $z_n \overset{*}{\rightharpoonup} z$ в Z. Переходя к пределу в равенстве

$$\langle A^t(z_n, y_n^t), y_n^t\rangle_t = \int_0^t \langle A(z_n, y_n)(\tau), y_n(\tau)\rangle_V \, d\tau =$$

$$= \int_0^t \langle f(\tau), y_n(\tau)\rangle_V \, d\tau - \frac{1}{2}(\|y_n(t)\|_H^2 - \|y_0\|_H^2),$$

справедливом $\forall\, t \in S$, получаем $\overline{\lim} \langle A^t(z_n, y_n^t), y_n^t\rangle_t \leqslant \langle d^t, y^t\rangle_t$, где $d^t = r_t^*(f - y')$. Однако в силу леммы 3 оператор A^t обладает свойством $\mathfrak{N}$, значит, $A^t(z, y^t) = d^t$ $\forall\, t \in S$, а поскольку $\bigcap_{t \in S} r_t^{*-1}(0) = \{0\}$, то $A(z, y) = d$. Равенство $G(u, z, y) = \varkappa$ доказывается аналогично теореме 1, а из соотношения $0 \leqslant \lim \langle F(u_n, z_n, y_n), \varphi\rangle_Y = \langle F(u, z, y), \varphi\rangle_Y$ $\forall\, \varphi \in \mathbf{K}^*$ следует $(u; z; y) \in \operatorname{graph}[\rho_1(\cdot, \alpha) \restriction y_0]$. Оптимальность u вытекает из замечания 1.

Следствие 5. *Если вместо условия У3) множество M ограничено, а $G: U \times M \times K_W \to Z$ — $*$-сл. компактное отображение, то система (1)—(4) имеет L_1-экстремальное решение.*

Пусть E — рефлексивное банахово пространство (либо сопряженное к банахову), причем $E \subset \mathcal{D}^*(S; V^*)$, $\overline{W} = \{y \in X^* \mid y' \in E\}$, где $X^* = L_{p_1}(S; V) \cap L_{p_0}(S; H)$, $p_0 \leqslant \infty$, K^* — $*$-сл. замкнутое подмножество X^*, $f \in E$.

Теорема 2. *Пусть либо M, K^*, U — ограниченные подмножества, либо функция L — о. сн. и удовлетворяет условию (f). Если, кроме того,*

$A : M \times K^*_W \to E$, $F : U \times M \times K^*_{\overline{W}} \to Y$, $G : U \times M \times K^*_{\overline{W}} \to Z$ — *-сл. компактные операторы, отображение $A : M \times K^* \to E$ ограничено и $U_0 \neq \varnothing$, то задача (1)—(4) имеет L_1-экстремальное решение.*

Следствие 6. *Если $E = X$ и оператор $A : M \times K^* \to E$ коэрцитивен, то теорема 2 справедлива для неограниченных K^* без требования о. сн. L и условия (f).*

Следствие 7. *Предположим, что E непрерывно вложено в X и выполнены аналоги условий теоремы 1 или ее следствий (где всюду условие «$K_W \ni y_n \to y$ в W» заменено на «$K^*_{\overline{W}} \ni y_n \overset{*}{\to} y$ в $\overline{W}$»). При этом система (1)—(4) имеет L_1-экстремальное решение.*

Замечание 5. Теорема 2 справедлива для неограниченных A в следующих ситуациях: 1) $L : U \times M \times K^* \to \overline{\mathbf{R}}$ о. сн. и обладает свойством (f) на $U \times M \times K^*_{\overline{W}}$; 2) множества U, M и K^* ограничены в $\mathbf{U}$, Z и $\overline{W}$ соответственно.

Пусть $J : Z \to Z^*$.

Определение 6. *Отображение $\mathcal{G} : U \times M \times K \to Z$ называется J-квазимонотонным, если из $U \ni u_n \overset{*}{\to} u$ в $\mathbf{U}$, $M \ni z_n \overset{*}{\to} z$ в Z, $K_W \ni y_n \to y$ в W и $\overline{\lim} \langle \mathcal{G}(u_n, z_n, y_n), J(z_n - z)\rangle_Z \leqslant 0$ вытекает, что*

$$\underline{\lim} \langle \mathcal{G}(u_n, z_n, y_n), J(z_n - \eta)\rangle_Z \geqslant \langle \mathcal{G}(u, z, y), J(z - \eta)\rangle_Z \quad \forall \eta \in Z.$$

Предложение 2. *Пусть $J : Z \to Z^*$ — сюръекция. Тогда каждый J-квазимонотонный оператор $\mathcal{G} : U \times M \times K \to Z$ обладает свойством $\mathfrak{R}_J$: если $U \ni u_n \overset{*}{\to} u$ в $\mathbf{U}$, $M \ni z_n \overset{*}{\to} z$ в Z, $K_W \ni y_n \to y$ в W, $\mathcal{G}(u_n, z_n, y_n) \overset{*}{\to} \sigma$ в Z и $\overline{\lim} \langle \mathcal{G}(u_n, z_n, y_n), J(z_n - \zeta)\rangle_Z \leqslant \langle \sigma, J(z - \zeta)\rangle_Z \quad \forall \zeta \in Z$. то $\sigma = \mathcal{G}(u, z, y)$.*

Теорема 3. *Предположим, что A, F, L удовлетворяют условиям теорем 1, 2 или их следствий. Пусть $J : Z \to Z^*$ — *-сл. непрерывное отображение, оператор $\mathcal{G} : U \times M \times K \to Z$ обладает свойством $\mathfrak{R}_J$ и либо M ограничено в Z, либо $\langle Jz, z\rangle_Z^* \geqslant 0$ и $\langle G(u, z, y), Jz\rangle_Z \geqslant \langle g, Jz\rangle_Z$ для $(u; y) \in U \times K$ и $\| z \|_Z \geqslant \lambda > 0$. В этом случае из $U_0 \neq \varnothing$ следует, что для (1)—(4) существует L_1-экстремальное решение.*

Замечание 6. В условиях приведенных выше в п. 3 утверждений задача (1)—(4) имеет L_2- и L_3-экстремальные решения.

Теорема 4. *Пусть $U_1 \neq \varnothing$, тогда в условиях теорем 1—3 система (1)—(4) имеет L_4-и L_5-экстремальные решения.*

Доказательство проводится аналогично теореме 1 с использованием следствия 2 п. 2.

Замечание 7. Пусть оператор $A : M \times K \to X^*$ (или $A : M \times K^* \to X$)) обладает свойством β, т. е. из $M \ni z_n \overset{*}{\to} z$ в Z, $K_W \ni y_n \to y$ в W и $\overline{\lim} \langle A(z_n, y_n), y_n - y\rangle_X \leqslant 0$, то $y_n \to y$ сильно в X. Тогда утверждения теорем 1, 3, 4 и следствий 3—7 сохранятся, если $L : U \times M \times K \to \overline{\mathbf{R}}$ пн. сн. относительно *-топологий $\mathbf{U}$ и Z и сильной топологии X. При этом отображение $\mathcal{R}_\alpha : U \to 2^{U \times M \times K}$ пн. св. относительно этих же топологий и в данном случае верны предложение 1 и следствия 1, 2 п. 2.

Замечание 8. Приведенные в п. 3 результаты с некоторыми техническими модификациями можно распространить на случай многозначных отображений $A : M \times K \to 2^{X^*}$ и $G : U \times M \times K \to 2^Z$ [10].

1. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами.— Киев : Наук. думка, 1988.— 288 с.
2. *Лионс Ж. Л.* Управление сингулярными распределенными системами.— М. : Наука, 1987.— 368 с.
3. *Фурсиков А. В.* Свойства решений некоторых экстремальных задач, связанных с системой Навье—Стокса // Мат. сб.— 1982.— 118, вып. 3.— С. 323—349.
4. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Метод монотонных операторов в задачах управления для квазилинейных систем // Кибернетика.— 1988.— № 2.— С. 63—67.
5. *Mackenroth U.* On parabolic distributed optimal control problems with restriction on the gradient // Appl. Math. and Optim.— 1983.— 10, N 1.— P. 69—95.

6. *Neittaanmaki P., Tiba D.* A varitional inequality apprach to constrained control problems for parabolic equations // Ibid.— 1988.— **17**, N 3.— P. 185—201.
7. *Калантаров В. К., Ладыженская О. А.* Явления коллапса для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1977.— **69**.— С. 77—102.
8. *Галактионов В. А.* Об условиях отсутствия лобальных решений одного класса квазилинейных параболических уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1982.— **22**, № 2.— С. 322—338.
9. *Мельник В. С.* Экстремальные задачи для эволюционных уравнений с операторными ограничениями // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1989.— № 3.— С. 72—75.
10. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Об оптимальном управлении для эволюционных уравнений с многозначными операторами // Докл. АН СССР.— 1987.— **297**, № 6.— С. 1010—1013.

Ин-т кибернетики АН УССР, Киев

Получено 24.01.89