УДК 519.21

В. С. Королюк, А. В. Свищук

Предельное представление непрерывных полумарковских случайных эволюций в схеме серий

Для непрерывных полумарковских случайных эволюций (ПМСЭ) в схеме серий при выполнении условий баланса получено предельное представление в виде решения стохастического интегрального уравнения. Слабая сходимость доказана с использованием мартингального подхода. Вид производящего оператора предельного процесса получен в [1] методом обращения операторов, возмущенных на спектре.

Слабая сходимость в схеме усреднения рассматривалась в [2]. Диффузионная аппроксимация разностных уравнений получена в [3]. Мартингальный подход к аналогичным предельным теоремам предложен в [4]. Стохастические интегральные представления для стационарных случайных эволюций изучались в [5].

Математические модели случайных эволюций применяются в теории процессов запасания [6], популяционной генетике [7], теории переноса [8] и в других областях [9].

В п. 1 приведено определение непрерывных ПМСЭ с дискретным параметром, основной результат сформулирован в виде теоремы 1, в качестве следствия получена диффузионная аппроксимация в задаче теории переноса. В п. 2 получено представление предельного процесса в виде решения стохастического интегрального уравнения. В п. 3 доказана слабая сходимость случайных эволюций в схеме серий при выполнении условия баланса. В п. 4 приведены определение непрерывной ПМСЭ с непрерывным параметром и доказательство основного результата в этом случае (теорема 2).

1. Пусть задано измеримое фазовое пространство $(X, \mathfrak{X})$ со счетно-порожденной σ-алгеброй $\mathfrak{X}$; регулярный полумарковский процесс (ПМП) $\varkappa(t)$, построенный по процессу марковского восстановления (ПМВ) $\{x_n, \theta_n;\ n \geqslant 0\}$, $x_n \in X$, $\theta_n \in [0, +\infty)$, $n \geqslant 0$, с полумарковским ядром $Q(x, A, t)$; $P(x, A) := Q(x, A, +\infty)$ — переходные вероятности вложенной равномерно эргодической цепи Маркова $\{x_n;\ n \geqslant 0\}$ со стационарным распределением $\rho(A)$, $A \in \mathfrak{X}$; $G_x(t) := Q(x, X, t)$ — распределение времен пребывания в состояниях $x \in X$, $t \geqslant 0$ [10].

Рассмотрим также семейство сильно непрерывных сжимающих полугрупп операторов $\{\Gamma_x(t);\ x \in X,\ t \geqslant 0\}$ на сепарабельном банаховом пространстве B и соответствующее им семейство производящих операторов $\{\Gamma(x);\ x \in X\}$, измеримых по x с общей плотной в B областью определения B_0, не зависящей от $x \in X$.

П о л у м а р к о в с к а я с л у ч а й н а я э в о л ю ц и я в с х е м е с е р и й с д и с к р е т н ы м п а р а м е т р о м определяется соотношением

$$V_n^{\varepsilon} := \Gamma_{x_0}(\varepsilon\theta_1)\,\Gamma_{x_1}(\varepsilon\theta_2)\ldots\Gamma_{x_{n-1}}(\varepsilon\theta_n), \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

$\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Определим операторы V_t^ε следующим образом:

$$V_t^\varepsilon := V_n^\varepsilon + \frac{t-\varepsilon^2 n}{\varepsilon^2}\,(V_{n+1}^\varepsilon - V_n^\varepsilon), \quad n\varepsilon^2 \leqslant t < (n+1)\,\varepsilon^2. \tag{2}$$

Случайный процесс $V_t^\varepsilon f$, $f \in B_0$, индуцирует вероятностную меру p^ε на пространстве $\mathbb{C}([0, +\infty); (B, \mathfrak{B}))$-непрерывных функций на $[0, +\infty)$ со значениями в $(B, \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств в B.

Предположим, что выполнены условия:

А) равномерно по x ограничены первые три момента времен пребывания в состояниях: $m_k(x) := \int\limits_0^\infty t^k\, G_x(dt), \quad k = 1, 2, 3;$

Б) выполнено условие баланса:

$$\int\limits_X \rho(dx)\, m_1(x)\, \Gamma(x)\, f = 0 \quad \forall f \in B_0. \tag{3}$$

Введем операторы $L(x)$:

$$L(x) := m_1(x)\,\Gamma(x)\,(R_0 - I)\, m_1(x)\,\Gamma(x) + \frac{1}{2}\, m_2(x)\,\Gamma^2(x), \tag{4}$$

где $R_0 := (I - P + \Pi)^{-1} - \Pi$ — потенциал цепи Маркова $\{x_n;\ n \geqslant 0\}$ с оператором переходных вероятностей P и стационарным проектором Π [10].

Теорема 1. *При выполнении условий* А) *и* Б) *вероятностные меры* p^ε *слабо сходятся при* $\varepsilon \to 0$ *к мере* p, *порожденной решением* $\hat{V}(t)$ *стохастического интегрального уравнения*

$$\hat{V}(t)\, f = f + \int\limits_0^t \hat{V}(s)\, \hat{L} f\, ds + M(t)\, f, \tag{5}$$

$$\hat{V}(0) = I \quad \forall f \in D(\Gamma^4(x)) \subset B_0,$$

с оператором

$$\hat{L} := \int\limits_X \rho(dx)\, L(x), \tag{6}$$

где $M(t)$ — *непрерывный мартингал относительно* σ-*алгебры*

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{\tau_0, x_0;\ \tau_1, x_1; \ldots;\ \tau_{[t]}, x_{[t]}\}, \quad \tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k. \tag{7}$$

Проиллюстрируем применение данной теоремы на примере процесса переноса.

Рассмотрим движение частицы в случайной полумарковской среде со скоростью $v(z, x) \in R^+$, $z \in R$, $x \in X$, зависящей от положения z в пространстве R и от состояния ПМП $\varkappa(t)$, переключающего скорость движения.

Положение частицы $Z^\varepsilon(t)$ в момент времени t описывается решением задачи Коши

$$\varepsilon dZ^\varepsilon(t)/dt = v(Z^\varepsilon(t), \varkappa(t(\varepsilon^2)), \quad Z^\varepsilon(0) = z. \tag{8}$$

Предполагается, что функция $v(z, x) : R \times X \to R^+$ является ограниченной неубывающей по z, ограниченной и непрерывной по x, непрерывно дифференцируемая по z и $v(z, x) \geqslant \delta > 0$ для некоторого δ.

Процесс переноса с дискретным параметром строится следующим образом.

Пусть $q(x, z, t)$ — решение уравнения

$$q(x, z, t) = z + \int\limits_0^t v(q(x, z, s), x)\, ds, \; q(x, z, 0) = z \quad \forall x \in X. \tag{9}$$

Определим рекуррентно величину Z^ε_{n+1} таким образом:

$$Z^\varepsilon_{n+1} := q(x_n, Z^\varepsilon_n, \varepsilon(\tau_{n+1} - \tau_n)), \quad Z^\varepsilon_0 = z. \tag{10}$$

Тогда процессу переноса (10) соответствует ПМСЭ

$$V^\varepsilon_n f(z) := f(Z^\varepsilon_n), \quad n \geqslant 0, \quad \forall f(z) \in \mathbb{C}^4(R).$$

Полугруппы $\Gamma_x(t)$ определяются в данном случае так:

$$\Gamma_x(t) f(z) := f(q(x, z, t)),$$

где $q(x, z, t)$ — решение задачи Коши (9).

Производящие операторы $\Gamma(x)$ имеют вид

$$\Gamma(x) f(z) = v(z, x) \frac{d}{dz} f(z), \quad f(z) \in \mathbb{C}^4(R). \tag{11}$$

Вычисляя оператор $L(x)$ в (4), с учетом (11) получаем

$$L(x) f(z) = \left[m_1(x) v(z, x)(R_0 - I) m_1(x) v'_z(z, x) + \frac{1}{2} m_2(x) v(z, x) v'_z(z, x)\right] \times$$
$$\times \frac{d}{dz} f(z) + \left[m_1(x) v(z, x)(R_0 - I) m_1(x) v(z, x) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} m_2(x) v^2(z, x)\right] \frac{d^2}{dz^2} f(z). \tag{12}$$

Через $a(z, x)$ обозначим коэффициент при d/dz, а через $\sigma^2(z, x)/2$ — коэффициент при d^2/dz^2. Тогда $L(x) f(z) = a(z, x) \frac{d}{dz} f(z) + \frac{1}{2} \sigma^2(z, x) \frac{d^2}{dz^2} f(z)$ — дифференциальный оператор второго порядка.

Заметим, что оператору V^ε_t в (2) соответствует процесс

$$Z^\varepsilon_t := Z^\varepsilon_n + \frac{t - \varepsilon^2 n}{\varepsilon^2} (Z^\varepsilon_{n+1} - Z^\varepsilon_n), \quad n\varepsilon^2 \leqslant t < (n+1)\varepsilon^2. \tag{13}$$

Следствие 1. *При выполнении условия* A) *и условия баланса*

$$\int_X \rho(dx) m_1(x) v(z, x) = 0 \quad \forall z \in R^+,$$

процесс Z^ε_t в (13) слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению $\hat{Z}_t$ стохастического дифференциального уравнения

$$d\hat{Z}_t = \hat{a}(\hat{Z}_t) dt + \hat{\sigma}(\hat{Z}_t) dw(t),$$

где

$$\hat{a}(z) := \int_X \rho(dx) a(z, x), \quad \hat{\sigma}(z) := \int_X \rho(dx) \sigma(z, x).$$

Заметим, что уравнению (5) в данном случае соответствует уравнение

$$df(\hat{Z}_t) = \hat{L} f(\hat{Z}_t) dt + \hat{\sigma}(\hat{Z}_t) \frac{d}{dz} f(\hat{Z}_t) dw(t),$$

где $\hat{L} = \int_X \rho(dx) L(x)$ с оператором $L(x)$ в (12) и $w(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Мартингал $M(t)$ имеет явный вид:

$$M(t) f = \int_0^t \hat{\sigma}(\hat{Z}_s) \frac{d}{dz} f(\hat{z}_s) dw(s).$$

2. Для доказательства теоремы 1 определим функиии $f^{(0)}(z)$, $f^{(1)}(z, x)$ и $f^{(2)}(z, x)$ как решения следующих уравнений:

$$(P-I)f^{(0)}(z)=0,$$
$$(P-I)f^{(1)}(z, x)=-m_1(x)\Gamma(x)f^{(0)}(z), \tag{14}$$
$$(P-I)f^{(2)}(z, x)=(\hat{L}-L(x))f^{(0)}(z),$$
$$\forall f^{(0)}(z)\in D(\Gamma^4(x)).$$

Условие баланса Б) в (3) обеспечивает однозначную разрешимость второго уравнения в (14), а так как $\int\limits_X \rho(dx)[\hat{L}-L(x)]=0$, то это верно и для третьего уравнения в (14).

ПМСЭ V_n^ε будем рассматривать на функциях вида

$$\varphi^\varepsilon(z, x):=f^{(0)}(z)+\varepsilon f^{(0)}(z, x)+\varepsilon^2 f^{(2)}(z, x). \tag{15}$$

Из (14) следует

$$(P-I)\varphi^\varepsilon(z, x)=[-\varepsilon m_1(x)\Gamma(x)+\varepsilon^2(\hat{L}-L(x))]f^{(0)}(z). \tag{16}$$

Пусть $\mathcal{F}_n:=\sigma\{\tau_k, x_k;\ 0\leqslant k\leqslant n\}$. Из марковского свойства ПМВ $\{x_n, \theta_n;\ n\geqslant 0\}$ следует

$$E[f(z, x_{n+1})/\mathcal{F}_n]=Pf(z, x_n). \tag{17}$$

По определению ПМСЭ V_n^ε имеем

$$V_{n+1}^\varepsilon-V_n^\varepsilon=V_n^\varepsilon[\Gamma_{x_n}(\varepsilon\theta_{n+1})-I]. \tag{18}$$

Воспользуемся следующим представлением для полугрупп ([11], P.1.1.6)):

$$\Gamma_x(t)=I+t\Gamma(x)+\int\limits_0^t(t-s)\Gamma_x(s)\Gamma^2(x)\,ds\quad\forall x\in X.$$

Отсюда получаем формулу

$$\Gamma_x(t)-I-t\Gamma(x)-\frac{1}{2}t^2\Gamma^2(x)=\int\limits_0^t(t-s)[\Gamma_x(s)-I]\Gamma^2(x)\,ds,$$

и далее — асимптотическое разложение

$$\Gamma_x(\varepsilon t)=I+\varepsilon t\Gamma(x)+\frac{1}{2}\varepsilon^2t^2\Gamma^2(x)+o(\varepsilon^2),$$

где

$$\|o(\varepsilon^2)f\|\leqslant\varepsilon^3\left[\frac{1}{2}t^3\|\Gamma^3(x)f\|+\frac{1}{6}t^3\|\Gamma^4(x)f\|\right]\quad\forall f\in D(\Gamma^4(x)). \tag{19}$$

Введем оператор

$$M_n^\varepsilon:=V_n^\varepsilon-I-\sum_{k=0}^{n-1}\{E_\rho[V_{k+1}^\varepsilon/\mathcal{F}_k]-V_k^\varepsilon\}. \tag{20}$$

Легко проверить, что M_n^ε является мартингалом относительно $\mathcal{F}_n$, который также можно представить в виде суммы мартингал-разностей

$$M_n^\varepsilon=\sum_{k=0}^{n-1}[V_{k+1}^\varepsilon-E_\rho(V_{k+1}^\varepsilon/\mathcal{F}_k)]. \tag{21}$$

В представлении (20) запишем каждое слагаемое в виде

$$\Delta_k^\varepsilon:=E_\rho[V_{k+1}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(z, x_{k+1})/\mathcal{F}_k]-V_k^\varepsilon\varphi^\varepsilon(z, x_k)=\Delta_{1k}^\varepsilon+\Delta_{2k}^\varepsilon. \tag{22}$$

Здесь

$$\Delta_{1k}^{\varepsilon} := E_{\rho}\,[(V_{k+1}^{\varepsilon} - V_k^{\varepsilon})\,\varphi^{\varepsilon}(z, x_{k+1})/\mathcal{F}_k], \tag{23}$$

$$\Delta_{2k}^{\varepsilon} := V_k^{\varepsilon}\,[E_{\rho}(\varphi^{\varepsilon}(z, x_{k+1})/\mathcal{F}_k) - \varphi^{\varepsilon}(z, x_k)]. \tag{24}$$

Используя (17) — (19), получаем

$$\Delta_{1k}^{\varepsilon} = V_k^{\varepsilon}\{E_{\rho}\,[\Gamma_{x_k}(\varepsilon\theta_{k+1}) - I)\,\varphi^{\varepsilon}(z, x_{k+1})/\mathcal{F}_k]\} =$$

$$= V_k^{\varepsilon}\left\{E_{\rho}\left[\left(\varepsilon\theta_{k+1}\Gamma(x_k) + \frac{\varepsilon^2\theta_{k+1}^2}{2}\Gamma^2(x_k) + o(\varepsilon^2)\right)\varphi^{\varepsilon}(z, x_{k+1})/\mathcal{F}_k\right]\right\} =$$

$$= V_k^{\varepsilon}\left\{E_{\rho}\left(E_{\rho}\left[\left(\varepsilon\theta_{k+1}\Gamma(x_k) + \frac{\varepsilon^2\theta_{k+1}^2}{2}\Gamma^2(x_k) + o(\varepsilon^2)\right)\varphi^{\varepsilon}(z, x_{k+1})/\mathcal{F}_k\right]/\mathcal{F}_{k+1}\right)\right\} =$$

$$= V_k^{\varepsilon}\left[\varepsilon m_1(x_k)\,\Gamma(x_k) + \frac{\varepsilon^2 m_2(x_k)}{2}\Gamma^2(x_k) + o(\varepsilon^2)\right]P\varphi^{\varepsilon}(z, x_k).$$

Учитывая (14) и (15), получаем асимптотическое представление для $\Delta_{1k}^{\varepsilon}$:

$$\Delta_{1k}^{\varepsilon} = V_k^{\varepsilon}\,[\varepsilon m_1(x_k)\,\Gamma(x_k) + \varepsilon^2 L(x_k)]\,f^{(0)}(z) + o(\varepsilon^2)\,f^{(0)}(z). \tag{25}$$

Аналогично из (16) и (17) имеем асимптотическое представление для $\Delta_{2k}^{\varepsilon}$:

$$\Delta_{2k}^{\varepsilon} = V_k^{\varepsilon}\,[-\varepsilon m_1(x_k)\;\Gamma(x_k) + \varepsilon^2\,(\hat{L} - L(x))]\,f^{(0)}(z). \tag{26}$$

Складывая (25) и (26), получаем асимптотическое представление для слагаемых Δ_k^{ε} в сумме (20):

$$\Delta_k^{\varepsilon} = \varepsilon^2 V_k^{\varepsilon}\hat{L}f^{(0)}(z) + o(\varepsilon^2)\,f^{(0)}(z). \tag{27}$$

Или иначе

$$M_n^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(z, x_n) = \left[V_n^{\varepsilon} - I - \varepsilon^2\sum_{k=1}^{n-1} V_k^{\varepsilon}\hat{L}\right] f^{(0)}(z) + o(\varepsilon^2)\,f^{(0)}(z). \tag{28}$$

Полагая теперь $n = [t/\varepsilon^2]$ и предполагая слабую сходимость $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} V_{[t/\varepsilon^2]}^{\varepsilon} = \hat{V}(t)$, получаем из (28) в пределе уравнение (5).

3. Для доказательства плотности семейства мер p^{ε}, порожденных ПМСЭ в (2), применим критерий компактности [8, с. 119—120].

Из асимптотического представления (28) мартингалов M_n^{ε} с учетом (15) имеем $(t > s)$

$$V_{[t/\varepsilon^2]}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(z, x_{[t/\varepsilon^2]}) - V_{[s/\varepsilon^2]}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(z, x_{[s/\varepsilon^2]}) = M_{[t/\varepsilon^2]}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(z, x_{[t/\varepsilon^2]}) - M_{[s/\varepsilon^2]}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(z, x_{[s/\varepsilon^2]}) -$$

$$- \varepsilon^2\sum_{k=[s/\varepsilon^2]+1}^{[t/\varepsilon^2]-1} V_k^{\varepsilon}\hat{L}f^{(0)}(z) - [V_{[t/\varepsilon^2]}^{\varepsilon} - V_{[s/\varepsilon^2]}^{\varepsilon}]\,[\varepsilon\,(f^{(1)}(z, x_{[t/\varepsilon^2]}) - f^{(1)}(z, x_{[s/\varepsilon^2]})) +$$

$$+ \varepsilon^2\,(f^{(2)}(z, x_{[t/\varepsilon^2]}) - f^{(2)}(z, x_{[s/\varepsilon^2]})] + o(\varepsilon^2)\,f^{(0)}(z). \tag{29}$$

Последние два слагаемых в (29) стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

В силу ограниченности по норме слагаемых в сумме (29) имеем оценку

$$E_{\rho}\left[\left\|\varepsilon^2\sum_{k=[s/\varepsilon^2]+1}^{[t/\varepsilon^2]-1} V_k^{\varepsilon}\hat{L}f^{(0)}(z)\right\|^2/\mathcal{F}_{[s/\varepsilon^2]}\right] \leqslant \mathrm{const}\cdot|t - s|^2. \tag{30}$$

Для оценки приращения мартингалов в (29) воспользуемся их представлением в виде суммы мартингал-разности (21) с учетом (15):

$$M_{[t/\varepsilon^2]}^{\varepsilon}\psi^{\varepsilon}(z, x_{[t/\varepsilon^2]}) - M_{[s/\varepsilon^2]}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(z, x_{[s/\varepsilon^2]}) = \sum_{k=[s/\varepsilon^2]+1}^{[t/\varepsilon^2]-1} [V_{k+1}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(z, x_{k+1}) -$$

$$-E_\rho[V^\varepsilon_{k+1}\varphi^\varepsilon(z, x_{k+1})/\mathcal{F}_k]] = \sum_{k=[s/\varepsilon^2]+1}^{[t/\varepsilon^2]-1}[V^\varepsilon_{k+1}f^{(0)}(z) - E_\rho[V^\varepsilon_{k+1}f^{(0)}(z)/\mathcal{F}_k]] + o(\varepsilon)\times$$
$$\times f^{(0)}(z). \tag{31}$$

Для слагаемых в (31), используя (18), имеем представление

$$\delta^\varepsilon_k := V^\varepsilon_{k+1}f^{(0)}(z) - E_\rho[V^\varepsilon_{k+1}f^{(0)}(z)/\mathcal{F}_k] = [V^\varepsilon_{k+1} - V^\varepsilon_k]f^{(0)}(z) -$$
$$- E_\rho[(V^\varepsilon_{k+1} - V^\varepsilon_k)f^{(0)}(z)/\mathcal{F}_k] = V^\varepsilon_k[\Gamma_{x_k}(\varepsilon\theta_{k+1}) - I - E_\rho[(\Gamma_{x_k}\times$$
$$\times(\varepsilon\theta_{k+1}) - I)/\mathcal{F}_k]]f^{(0)}(z).$$

Так что $E_\rho[\delta^\varepsilon_k/\mathcal{F}_k] = 0$. $E_\rho[(\delta^\varepsilon_k)^2/\mathcal{F}_k] = O(\varepsilon^2)$. Кроме того, при $\varepsilon^2 k > s$ и $\varepsilon^2 k > s'$

$$E_\rho[\delta^\varepsilon_k\delta^\varepsilon_{k'}/\mathcal{F}_{[s/\varepsilon^2]}] = 0.$$

Теперь для приращения мартингала (31) имеем оценку

$$E_\rho[\| M^\varepsilon_{[t/\varepsilon^2]}\varphi^\varepsilon(z, x_{[t/\varepsilon^2]} - M^\varepsilon_{[s/\varepsilon^2]}\varphi^\varepsilon(z, x_{[s/\varepsilon^2]})\|^2/\mathcal{F}_{[s/\varepsilon^2]}] \leqslant \mathrm{const}\cdot|t-s|. \tag{32}$$

Поэтому из (29), (30) и (32) следует, что для

$$\tilde{V}^\varepsilon_t := M^\varepsilon_{[t/\varepsilon^2]} - \varepsilon^2\sum_{k=0}^{[t/\varepsilon^2]-1} V^\varepsilon_k\hat{L}$$

справедлива оценка

$$E_\rho[\|\tilde{V}^\varepsilon_{[t/\varepsilon^2]}\varphi^\varepsilon(z, x_{[t/\varepsilon^2]}) - \tilde{V}^\varepsilon_{[s/\varepsilon^2]}\varphi^\varepsilon(z, x_{[s/\varepsilon^2]})\|^2/\mathcal{F}_{[s/\varepsilon^2]}] \leqslant \mathrm{const}\cdot|t-s|.$$

Кроме того, ввиду ограниченности мартингала M^ε_n [12] имеем

$$E_\rho\|\tilde{V}^\varepsilon_{[t/\varepsilon^2]}\| \leqslant \mathrm{const}.$$

Теперь из соотношения

$$V^\varepsilon_{[t/\varepsilon^2]} - V^\varepsilon_{[s/\varepsilon^2]} = \tilde{V}^\varepsilon_t - \tilde{V}^\varepsilon_s + O(\varepsilon)$$

следует сходимость процессов $\tilde{V}^\varepsilon_t$, а значит, и случайных эволюций $V^\varepsilon_{[t/\varepsilon^2]}$.

4. Непрерывный ПМСЭ задается соотношением

$$V^\varepsilon(t) := \Gamma_{x_0}(\varepsilon\theta_1)\Gamma_{x_1}(\varepsilon\theta_2)\ldots\Gamma_{\varkappa(t/\varepsilon^2)}(t/\varepsilon - \varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon^2)}). \tag{33}$$

Здесь $\nu(t)$ — считающий процесс: $\nu(t) = \max\{n : \tau_n \leqslant t\}$.

Заметим, что из (1) и (33) $V^\varepsilon(t)$ имеет представление

$$V^\varepsilon(t) = V^\varepsilon_{\nu(t/\varepsilon^2)}\Gamma_{\varkappa(t/\varepsilon^2)}(t/\varepsilon - \varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon^2)}). \tag{34}$$

Так как

$$V^\varepsilon(t) = V^\varepsilon_{\nu(t/\varepsilon^2)} + V^\varepsilon_{\nu(t/\varepsilon^2)}[\Gamma_{\varkappa(t/\varepsilon^2)}(t/\varepsilon - \varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon^2)}) - I],$$

$$\Gamma_{\varkappa(t/\varepsilon^2)}(t/\varepsilon - \varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon^2)}) - I = \varepsilon[t/\varepsilon^2 - \tau_{\nu(t/\varepsilon^2)}]\Gamma(\varkappa(t/\varepsilon^2)) + o(\varepsilon),$$
$$E_\rho[t/\varepsilon^2 - \tau_{\nu(t/\varepsilon^2)}]\Gamma(\varkappa(t/\varepsilon^2)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_X \rho(dx)m_2(x)\Gamma(x)/2m,$$

где $m = \int_X \rho(dx)m(x)$, то

$$E_\rho[V^\varepsilon_{\nu(t/\varepsilon^2)}[\Gamma_{\varkappa(t/\varepsilon^2)}(t/\varepsilon - \varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon^2)}) - I] = \varepsilon E_\rho[V^\varepsilon_{\nu(t/\varepsilon^2)}(t/\varepsilon^2 - \tau_{\nu(t/\varepsilon^2)})\times$$
$$\times\Gamma(\varkappa(t/\varepsilon^2)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Осталось вычислить $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} E_\rho V^\varepsilon_{\nu(t/\varepsilon^2)}$. Из теоремы 1 следует

$$V^\varepsilon_t \xrightarrow{\text{сл.}} \hat{V}(t),$$

где $\hat{V}(t)$ определено в (5), поэтому получаем [13, с. 165] (теорема 1)

$$V^\varepsilon_{\nu(t/\varepsilon^2)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{сл.}} \check{V}(t) : \check{V}(t) = I + \int_0^t \check{V}_s \check{L} ds + M_t,$$

где $\check{L} := \hat{L}/m$, $\hat{L}$ определено в (6), $m = \int_X \rho(dx) m_1(x)$, M_t определен в теореме 1.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При выполнении условий* А) *и* Б) *непрерывные ПМСЭ $V^\varepsilon(t)$ слабо сходятся при $\varepsilon \to 0$ к решению $\check{V}(t)$ стохастического интегрального уравнения*

$$\check{V}(t) f = f + \int_0^t \check{V}_s \check{L} f\, ds + M_t f,\ \check{V}(0) = I,$$

с оператором $\check{L} := \hat{L}/m, \quad m = \int_X \rho(dx) m_1(x),$

Следствие 2. *При выполнении условия* А) *и условия баланса $\int_X \rho(dx) m_1(x) v(z, x) = 0$ процесс $Z^\varepsilon(t)$ в* (8) *слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению $\check{Z}(t)$ стохастического дифференциального уравнения*

$$m d\check{Z}(t) = \hat{a}(\check{Z}(t))\, dt + \hat{\sigma}(\check{Z}(t))\, dw(t),$$

где $\hat{a}(z)$ и $\hat{\sigma}(z)$ определены в следствии 1.

1. *Королюк В. С., Свищук А. В.* ЦПТ для ПМСЭ // Укр. мат. журн.— 1968.— 38, № 3.— С. 300—304.
2. *Королюк В. С., Чмиль Т. В.* Слабая сходимость полумарковских процессов в схеме фазового укрупнения // Предельные теоремы в схеме асимптотического фазового укрупнения.— Киев, 1984.— С. 21—33.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.16).
3. *Watanabe H.* Diffusion approximation of some stochastic difference equation // Stoch. Anal. Appl.; Adv. Prob. Rel. Topics.— 1984.— 7,— P. 439—456.
4. *Papanicolaou G., Strook D., Varadhan S. R. S.* Martingale approach to some limit theorems // Stat. Mech. and Dynamical Systems, Duke Univ. Conf. Turbulence (M. Reed, ed.). Duke Univ. Math. Ser.— Durham, N. C., 1977.— 3.— 20 p.
5. *Watkins I.* Stochastic integral representation for random evolutions // Ann. Probab.— 1985.— 13, N 2.— P. 531—557.
6. *Королюк В. С.* Эволюция систем в полумарковской случайной среде // Кибернетика.— 1987.— № 5.— С. 107—110.
7. *Iizuka M., Matsuda H.* Weak convergence of discrete time non-Markovian process related to section models in population genetics // J. Math. Biology.— 1982.— **15**.— P. 107—127.
8. *Kesten H., Papanicolaou G.* A limit theorem for turbulent diffusion // Communs Math. Phys.— 1978.— **65**.— P. 97—128.
9. *Kushner H. J.* A martingale method for the convergence of a sequence of process to a jump diffusion processes // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1980.— **53**.— P. 207—219.
10. *Королюк В.С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового усреднения сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1978.— 218 с.
11. *Butzer P. L., Berens H.* Semi-groups of operators and approximation.— Berlin: Springer, 1967.— 318 p.
12. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы.— М.: Мир, 1956.— 590 с.
13. *Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для сложных случайных функций.— Киев : Вища шк., 1974.— 350 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 26.09.88