УДК 517.956.223

Г. П. Лопушанская

О некоторых свойствах решений нелокальных эллиптических задач в пространстве обобщенных функций

В настоящей работе проводится исследование одного класса [1, 2] нелокальных эллиптических задач в пространстве обобщенных функций D', содержащего, в частности, обобщенные задачи сопряжения [3].

Пусть Ω — область в R^n, ограниченная $n-1$-мерной поверхностью Γ класса C^∞, Ω_1 — область внутри Ω, ограниченная бесконечно дифференцируемой поверхностью γ, $\gamma \cap \Gamma = \varnothing$, $\Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$. В Ω_j заданы эллиптические дифференциальные операторы

$$A_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m_j} a_{j\alpha}(x) D^\alpha \left(D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n},\ D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

$a_{j\alpha}(x) \in C^\infty(\Omega_j)$, на γ задано $2l$, $l = m_1 + 2m_2$, а на Γ — l дифференциальных операторов $B_{kj}(x, D) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m_{kj}} b_{kj\alpha}(x) D^\alpha$, $k = \overline{1, l}$, $j = 1, 2, 3$, с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, $m_{k1} \leqslant 2m_1 - 1$; $m_{k2}, m_{k3} \leqslant 2m_2 - 1$. Предполагаем, что существует диффеоморфизм $\hat{\omega}: \Gamma \to \gamma$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ отображение $\omega: x + \nu_\Gamma \varepsilon \to \hat{\omega} x + \nu_\gamma \varepsilon$ (ν_Γ (ν_γ) — единичный вектор внутренней относительно Ω (Ω_1) нормали к Γ (γ) в точке x ($\hat{\omega} x$)) также является диффеоморфизмом некоторой окрестности $U(\Gamma)$ в некоторую окрестность $\tilde{U}(\gamma)$, ε_0 выбираем таким, чтобы $U(\Gamma) \cap \tilde{U}(\gamma) = \varnothing$. Пусть для каждой $u(y)$, $y \in \tilde{U}(\gamma)$, $(J_\omega u)(x) \overset{\mathrm{df}}{=} u(\omega x)$, $x \in U(\Gamma)$, а для вектор-функции $u = (u_1, u_2)$, $u_j = u_j(x)$, $x \in \Omega_j$, положим $(B(x, D)u)_k = (B_{k1}, B_{k2}, B_{k3})u = J_\omega(B_{k1}u_1(y) + B_{k2}u_2(y))(x) + B_{k3}u_2(x)$, $x \in \Gamma$, $y = \omega x \in \gamma$, $k = \overline{1, l}$,

$$Au = \begin{cases} A_1 u_1(x), & x \in \Omega_1 \\ A_2 u_2(x), & x \in \Omega_2 \end{cases}.$$

Матрицу $B(x, D)$ граничных операторов считаем $2\mu = (2m_1, 2m_2)$-нормальной и удовлетворяющей условию дополнительности [2]. Обозначим через $C(x, D) = (C_{kj}(x, D))_{k=\overline{1,l};\ j=1,2,3}$ матрицу, строки которой дополняют матрицу B до матрицы Дирихле порядка 2μ. Тогда существуют [2] матрицы $\hat{B}$, $\hat{C}$ такие, что имеет место формула Грина

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k} A_k u_k(x)\, v_x(x)\, dx = \sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k} u_k(x)\, A_k^* v_k(x)\, dx + \sum_{k=1}^{l}\int_{\Gamma} [(Cu)_k(\hat{B}v)_k -$$

$$- (Bu)_k(\hat{C}v)_k]\, d\Gamma,$$

$$u, v \in C^\infty(\overline{\Omega}_1) \times C^\infty(\overline{\Omega}_2) \overset{\mathrm{df}}{=} D(\overline{\Omega}).$$

Введем пространство $X(\overline{\Omega}) = X(\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2) = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in D(\overline{\Omega}): (\hat{B}\varphi)_k = 0,\ k = \overline{1, l}\}$. Дальше штрихами будем обозначать пространства линейных непрерывных функционалов (обобщенных функций) на соответствующих пространствах вектор-функций, а скобками (φ, F) — действие обобщенной функции F на основную функцию φ.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Пусть $F_0 = (F_0^1, F_0^2) \in X'(\overline{\Omega})$, $F_1^k \in D'(\Gamma) = (C^\infty(\Gamma))'$, $k = \overline{1, l}$. Найти решение u уравнения

$$Au(x) = F_0, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию

$$(B(x, D)\, u)_k = F_1^k, \quad x \in \Gamma, \quad k = \overline{1, l}. \tag{2}$$

Обобщенную функцию $u = (u_1, u_2) \in D'(\overline{\Omega})$ считаем решением задачи (1), (2), если для каждой $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in X(\overline{\Omega})$ выполнено соотношение

$$(A^*\psi, u) = (\psi, F_0) + \sum_{k=1}^{l} ((\hat{C}\psi)_k, F_1^k). \tag{3}$$

Согласно [2], ядра N и N^* соответственно задачи (1), (2) и сопряженной к ней конечномерны. Пусть $N = \{\tilde{u}^s(x)\}_{s=\overline{1,p}}$, $\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k} \tilde{u}_k^s \tilde{u}_k^r dx = \delta_{sr}$, $N^* = \{\psi^s(x)\}_{s=\overline{1,q}}$, $\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k} \psi_k^s \psi_k^r dx + \sum_{k=1}^{l}\int_{\Gamma} (\hat{C}\psi^s)_k (\hat{C}\psi^r)_k d\Gamma = \delta_{sr}$, δ_{sr} — символ Кронекера.

Из (3) следует, что для разрешимости задачи (1), (2) необходимо выполнение условия

$$(\psi^s, F_0) + \sum_{k=1}^{l} ((\hat{C}\psi^s)_k, F_1^k) = 0, \quad s = \overline{1, q}. \tag{4}$$

Т е о р е м а 1. *Решение задачи единственно в пространстве* $D'(\overline{\Omega})/N$.

Теорема доказывается аналогично теореме 1 [4] (см. также [5]).

Вектор-функцией Грина задачи (1), (2) называем пару функций $G(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y))$, определенных для $(x, y) \in \overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}$ и $(x, y) \in \overline{\Omega}_2 \times \overline{\Omega}$ соответственно и удовлетворяющих задаче

$$A_k^*(x, D)\, G_r(x, y) = \delta_{kr}\delta(x - y) - \sum_{s=1}^{p} \tilde{u}_k^s(x)\, \tilde{u}_r^s(y), \quad k, r = 1, 2, \quad x \in \Omega_r, \quad y \in \Omega,$$

$$(\hat{B}(x, D)\, G(x, y))_k = 0, \quad x \in \Gamma, \quad k = \overline{1, l}$$

Существование вектор-функции Грина следует из [2, 5]. Она определяется однозначно в пространстве функций, ортогональных в L_2 ядру N^*. Из формулы Грина получаем представление решения задачи (1), (2) для достаточно гладких $F_k^j = f_k^j(x)$, удовлетворяющих условию разрешимости задачи

$$u_r(y) = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} G_k(x, y) f_0^k(x)\, dx + \sum_{k=1}^{l} \int_{\Gamma} (\hat{C}(x, D)\, G(x, y))_k f_1^k(x)\, d_x\Gamma +$$

$$+ \sum_{s=1}^{p} C_{rs} \tilde{u}_r^s(y), \quad y \in \Omega_r \quad r = 1, 2, \tag{5}$$

C_{rs} = произвольные постоянные.

Заметим, что из (5) следует также, что $G(x, y)$ как функция y удовлетворяет задаче $A_r(y, D)\, G_k(x, y) = \delta_{kr}\delta(x-y) - \sum_{s=1}^{q} \psi_k^s(x)\, \psi_r^s(y), \quad k, r = 1, 2;$

$(B(y, D)\, G)_k = -\sum_{s=1}^{q} \psi^s(x)\, (\hat{C}\psi^s)_k(y), \ y \in \Gamma, \quad k = \overline{1, l}.$

Умножаем теперь обе части (5) на $A_r^*\psi_r(y)$, где $\psi \in X(\overline{\Omega})$, интегрируем по Ω_r и суммируем интегралы, затем левую часть полученного тождества и последнее слагаемое правой части преобразуем по формуле Грина. Учитывая, что $u(y)$ — решение задачи, и произвольность функций f_k^j, получаем для каждой $\psi \in X(\overline{\Omega})$

$$\sum_{r=1}^{2} \int_{\Omega_r} A_r^*\psi_r(y)\, G_k(x, y)\, dy = \psi_k(x) - \sum_{s=1}^{q} \Psi_s(\psi)\, \psi_k^s(x), \quad k = 1, 2, \quad x \in \Omega_k,$$

$$\sum_{r=1}^{2} \int_{\Omega_r} A_r^*\psi_r(y)\, (\hat{C}(x, D)\, G(x, y))_k dy = (\hat{C}(x, D)\, \psi)_k - \sum_{s=1}^{q} \Psi_s(\psi)\, (\hat{C}\psi^s)_k,$$

$$k = \overline{1, l}, \quad x \in \Gamma, \tag{6}$$

$$\Psi_s(\psi) = \sum_{r=1}^{2} \int_{\Omega_r} \psi_r \psi_r^s dy + \sum_{r=1}^{l} \int_{\Gamma} (\hat{C}\psi)_r\, (\hat{C}\psi^s)_r\, d\Gamma.$$

Теорема 2. *Пусть* $F_0 \in X'(\overline{\Omega})$, $F_1^k \in D'(\Gamma)$, $k = \overline{1, l}$, *и выполнено* (4). *Тогда обобщенная вектор-функция* $u = (u_1, u_2)$, *определенная следующим образом:*

$$(\varphi, u) = \Big(\sum_{r=1}^{2} \int_{\Omega_r} G(y, x)\, \varphi_r(x)\, dx, F_0\Big) + \sum_{k=1}^{l} \Big(\sum_{r=1}^{2} \int_{\Omega_r} (\hat{C}(y, D)\, G(y, x))_k\, \varphi_r(x) dx, F_1^k\Big),$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in D(\overline{\Omega}), \tag{7}$$

является решением задачи (3).

Доказательство. Для каждой $\varphi_0 \in D(\overline{\Omega})$ такой, что

$$\sum_{r=1}^{2} \int_{\Omega_r} \varphi_{0r}(x)\, \tilde{u}_r^s(x)\, dx = 0, \quad s = \overline{1, p}, \tag{8}$$

согласно [2] существует решение $\psi \in X(\overline{\Omega})$ векторного уравнения $A\psi = \varphi_0$. Так как для каждой $\varphi \in D(\overline{\Omega})$ $\varphi(x) - \sum_{s=1}^{p} \Big(\sum_{r=1}^{2} \int_{\Omega_r} \varphi_r \tilde{u}_r^s dy\Big) \tilde{u}^s(x)$ удовлетворяет условию (8), то существует решение $\psi \in X(\overline{\Omega})$ векторного уравнения

$$A^*\psi(x) = \varphi(x) - \sum_{s=1}^{p} \Big(\sum_{r=1}^{2} \int_{\Omega_r} \varphi_r \tilde{u}_r^s dy\Big) \tilde{u}^s(x).$$

Отсюда, учитывая (6) и то, что $G(y,\cdot)\in X(\overline{\Omega})$, имеем

$$\sum_{r=1}^{2}\int_{\Omega_r} G(y,x)\varphi_r(x)\,dx=\sum_{r=1}^{2}\int_{\Omega_r} G(y,x)\left[A_r^*\psi_r(x)+\sum_{s=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}\varphi_k\tilde{u}_k^s dt\right)\tilde{u}_r^s(x)\right]dx=$$

$$=\psi(y)-\sum_{s=1}^{q}\Psi_s(\psi)\psi^s(y)+\sum_{s=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}\varphi_k\tilde{u}_k^s dt\right)\left(\sum_{r=1}^{2}\int_{\Omega_r}G(y,x)\tilde{u}_r^s(x)\,dx\right)\in X(\overline{\Omega}),$$

кроме того, $\sum_{r=1}^{2}\int_{\Omega_r}(\hat{C}(y,D)G(y,x))_k\varphi_r(x)\,dx\in D(\Gamma)$, $k=\overline{1,l}$, $\varphi\in D(\overline{\Omega})$.

Таким образом, формулой (7) однозначно определена обобщенная вектор-функция $u\in D'(\overline{\Omega})$. Из равенств (6) следует, что она удовлетворяет соотношению (3).

Используя гипоэллиптичность оператора $A(x,D)$, в случае $F_0=0$ можно дать другое определение решения задачи [6, 7].

Постановка задачи. Пусть $F_0=0$, $F_1^k\in D'(\Gamma)$, $k=\overline{1,l}$. Найти решение $u\in C^\infty(\Omega_1\times\Omega_2)$ уравнения

$$A(x,D)u(x)=0,\quad x\in\Omega_1\cup\Omega_2, \tag{9}$$

удовлетворяющее условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}(B(x_\varepsilon,D)u)_k\varphi(x_\varepsilon)\,d\Gamma_\varepsilon=(\varphi,F_1^k),\quad k=\overline{1,l} \tag{10}$$

для каждой $\varphi\in D(\Gamma)$. Здесь $\Gamma_\varepsilon=\{x_\varepsilon=x+\nu_\Gamma\varepsilon,\ x\in\Gamma\}$, $\varphi(x_\varepsilon)=\varphi(x+\nu_\Gamma\varepsilon)=\varphi(x)$, $x\in\Gamma$, $x_\varepsilon\in\Gamma_\varepsilon$, $(B(x_\varepsilon,D)u)_k=(B_{k1}(\hat{\omega}x,D)u_1(\hat{\omega}x+\nu_\gamma\varepsilon)+B_{k2}(\hat{\omega}x,D)\times u_2(\hat{\omega}x-\nu_\gamma\varepsilon),\ B_{k3}(x,D)u_2(x+\nu_\Gamma\varepsilon))$, $k=\overline{1,l}$.

Лемма 1. *Если равномерно относительно $y_0\in\Gamma$ для каждой $h\in D(\Gamma)$ существует*

$$\lim_{x\to y_0\in\Gamma} b(x,D)\int_{\Gamma}K(x,y)h(y)\,d\Gamma=H(y_0)h(y_0), \tag{11}$$

то равномерно относительно $y\in\Gamma$ для каждой $\varphi\in D(\Gamma)$ существует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)b(x_\varepsilon,D)K(x_\varepsilon,y)\,d\Gamma_\varepsilon=\varphi(y)H(y). \tag{12}$$

Пусть $W_\varepsilon(x)$ — якобиан преобразования $x_\varepsilon=x+\nu_\Gamma\varepsilon$. Согласно (11) существует $\lim_{\varepsilon\to 0} b(x,D)\int_{\Gamma}K(x+\nu_\Gamma\varepsilon,y)h(y)W_\varepsilon(x)\,d_y\Gamma=H(x)h(x)$ равномерно относительно $x\in\Gamma$. Но тогда для каждой $\varphi\in D(\Gamma)$ $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma}\varphi(x)\times\left(b(x,D)\int_{\Gamma}K(x+\nu_\Gamma\varepsilon,y)h(y)W_\varepsilon(x)\,d_y\Gamma\right)d_x\Gamma=\int_{\Gamma}\varphi(x)H(x)h(x)\,d\Gamma$. Преобразуя левую часть и учитывая произвольность h, получаем (12).

Теорема 3. *Вектор-функция $u=(u_1,u_2)$,*

$$u(x)=\sum_{k=1}^{l}((\hat{C}(y,D)G(y,x))_k,F_1^k)+\sum_{s=1}^{p}C_s\tilde{u}^s(x),\quad C_s=\text{const} \tag{13}$$

является решением задачи (9), (10), *два решения задачи отличаются слагаемым из ядра N.* (*Здесь и дальше считаем, что имеет место* (4).)

Используя известные основные свойства вектор-функции Грина, непосредственно проверяем, что (13) удовлетворяет уравнению (9), а с помощью аналога теоремы Фубини [6, 8] и леммы 1 получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(B(x,D)\,u(x_\varepsilon))_i\varphi(x_\varepsilon)\,d\Gamma_\varepsilon=\sum_{k=1}^{l}\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(B(x,D)(\hat C(y,D)\,G(y,x_\varepsilon))_k)_i\times$$

$$\times\varphi(x_\varepsilon)\,d\Gamma_\varepsilon,F_1^k\Big)=(\varphi,F_1^i),\quad i=\overline{1,l},\quad\forall\varphi\in D(\Gamma),$$

т. е. (13) удовлетворяет также условию (10).

Докажем единственность решения задачи (9), (10). Если $u(x)$, $v(x)$ — два ее решения, то $U(x)=u(x)-v(x)$ удовлетворяет (9) и условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(B(x,D)\,U(x_\varepsilon))_k\varphi(x_\varepsilon)\,d\Gamma_\varepsilon=0,\quad\forall\varphi\in D(\Gamma),\quad k=\overline{1,l}.\tag{14}$$

Из формулы Грина

$$U(y)=\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(\hat C(x,D)\,G(x_\varepsilon,y))_k\,(B(x,D)\,U(x_\varepsilon))_k d\Gamma_\varepsilon-$$

$$-\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(\hat B(x,D)\,G(x_\varepsilon,y))_k\,(C(x,D)\,U(x_\varepsilon))_k\,d\Gamma_\varepsilon+\sum_{s=1}^{p}C_s\tilde u^s(y),\tag{15}$$

$y\in\Omega_{1\varepsilon}\cup\Omega_{2\varepsilon}$, $\partial\Omega_{1\varepsilon}=\gamma_\varepsilon$, $\partial\Omega_{2\varepsilon}=\Gamma_\varepsilon\cup\gamma_{-\varepsilon}$, $\gamma_{\pm\varepsilon}=\{x_{\pm\varepsilon}=\hat\omega x\pm\varepsilon\nu_\gamma,\ x\in\Gamma\}$,

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(\hat C(x,D)\,G(x_\varepsilon,y))_k\,(B(x,D)\,U(x_\varepsilon))_k\,d\Gamma_\varepsilon=\int\limits_{\Gamma}(\hat C(x,D)\,G(x+\nu_\Gamma\varepsilon,y))_k\times$$

$$\times(B(x,D)\,U(x+\nu_\Gamma\varepsilon)_k W_\varepsilon(x)\,d_x\Gamma,$$

кроме того, $(\hat C(x,D)\,G(x+\nu_\Gamma\varepsilon,y))_k\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}(\hat C(x,D)\,G(x,y))_k\in D(\Gamma)$, $y\in\Omega_1\cup\Omega_2$, $W_\varepsilon(x)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}1$, поэтому из леммы [9, с. 95] следует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(\hat C(x,D)\,G(x_\varepsilon,y))_k\,(B(x,D)\,U(x_\varepsilon))_k\,d\Gamma_\varepsilon=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma}(\hat C(x,D)\,G(x,y))_k\,(B(x,D)\,U(x+\nu_\Gamma\varepsilon))_k\,W_\varepsilon(x)\,d\Gamma.$$

Последний предел существует и равен нулю в силу условия (14), $k=\overline{1,l}$. Но тогда из (15) следует, что также существует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(\hat B(x,D)\,G(x_\varepsilon,y))_k\,(C(x,D)\,U(x_\varepsilon))_k\,d\Gamma_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{\Gamma}(\hat B(x,D)\times$$

$$\times G(x,y))_k\,(C(x,D)\,U(x+\nu_\Gamma\varepsilon))_k\,W_\varepsilon(x)\,d_x\Gamma.$$

Он равен нулю, так как $\hat B(x,D)\,G(x,y)|_{x\in\Gamma}=0$. Переходя в (15) к пределу, когда $\varepsilon\to 0$, получаем $U(y)=\sum_{s=1}^{p}C_s\tilde u^s(y)$, $y\in\Omega_1\cup\Omega_2$, что и требовалось.

Итак, любое решение задачи (9), (10) представимо в виде (13).

Теорема 4. *Пусть* $F_0=0$, $F_1^k\in D'(\Gamma)$, $k=\overline{1,l}$. *Задача* (1), (2) *в смысле* (3) *эквивалентна задаче* (9), (10).

Доказательство. Пусть $u\in D'(\overline\Omega)$ и удовлетворяет соотношению (3) для каждой $\psi\in X(\overline\Omega)$. Если, в частности, взять $\psi\in C^\infty(\Omega_1\times\Omega_2)$, то (3) принимает вид $(A^*\psi,u)=0$ или $(\psi,Au)=0$, а тогда по гипоэллиптичности операторов $A_i(x,D)\,u_i(x)\equiv 0$, $x\in\Omega_i$, $u_i(x)\in D(\Omega_i)$, $i=1,2$. Теперь для каждой $\psi\in X(\overline\Omega)$ $(A^*\psi,u)=\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}A_k^*\psi_k u_k dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_{k\varepsilon}}A_k^*\psi_k u_k dx$. По формуле Грина $(A^*\psi, u) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sum\limits_{k=1}^{l}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(Bu(x_\varepsilon))_k(\hat{C}\psi(x_\varepsilon))_k d\Gamma_\varepsilon$. Тогда из (3) следует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(Bu(x_\varepsilon))_k(\hat{C}\psi(x_\varepsilon))_k\, d\Gamma_\varepsilon = \sum_{k=1}^{l}((\hat{C}\psi)_k, F_1^k). \tag{16}$$

По лемме 1 [2] для каждой $\varphi_k \in D(\Gamma)$ существует $\psi \in X(\overline{\Omega})$ такая, что $(\hat{C}(x, D)\psi)_k = \varphi_k(x)$, $x \in \Gamma$, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\hat{C}(x_\varepsilon, D)\psi)_k = \varphi_k(x)$. По лемме [9, с.95] тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sum\limits_{k=1}^{l}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(Bu(x_\varepsilon))_k(\hat{C}\psi(x_\varepsilon))_k\, d\Gamma_\varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sum\limits_{k=1}^{l}\int\limits_{\Gamma}(B(x, D)u(x + \nu_\Gamma\varepsilon))_k \times$ $\times W_\varepsilon(x)\varphi_k(x)\, d\Gamma = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sum\limits_{k=1}^{l}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(Bu(x_\varepsilon))_k\varphi_k(x_\varepsilon)\, d\Gamma_\varepsilon$ и из (16) следует (10). Обратное утверждение получаем из теоремы 3 и того, что (13) удовлетворяет (3).

Пусть $\rho(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция в $\overline{\Omega}$, сравнимая по порядку с расстоянием от точки $x \in \Omega\setminus\gamma$ до поверхностей Γ и γ вблизи их, а в остальной части области Ω равная нулю.

Теорема 5. *Для существования решения и задачи* (9), (10) *необходимо и достаточно, чтобы существовало натуральное число m такое, что*

$$\int\limits_{\Omega_i}\rho^m(x)\,|u_i(x)|\,dx < \infty, \quad i = 1, 2. \tag{17}$$

Докажем вначале вспомогательное утверждение, аналогичное лемме 1 [6].

Пусть U — окрестность из покрытия поверхности Γ, $\xi = (\xi', \xi_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ — такая система координат в U, что ось ξ_n направлена по внутренней нормали к $U \cap \Gamma$ в некоторой точке.

Лемма 2. *Для каждого натурального числа m и произвольных функций $\varphi_0(\xi'), \ldots, \varphi_{2m_j-1}(\xi') \in C^\infty(U\cap\Gamma)$ существуют $\varphi_{2m_j}(\xi'), \ldots$ $\ldots, \varphi_{2m_j+m-1}(\xi') \in C^\infty(U\cap\Gamma)$ и ограниченные в U функции $\varphi_j(\xi', \xi_n)$ такие, что*

$$A_j^*(x, D)\Big[\sum_{i=0}^{m+2m_j-1}\xi_n^i\varphi_i(\xi')\Big] = \xi_n^m\varphi_j(\xi', \xi_n), \quad j = 1, 2.$$

Доказательство. Записывая $A_j^*(x, D)$ в локальной системе координат и применяя его к функции $\Phi_j = \sum\limits_{i=0}^{m+2m_j-1}\xi_n^i\varphi_i(\xi')$, получаем

$$A_j^*\Phi_j = a_j(\xi)\sum_{i=0}^{m-1}(i + 2m_j)!\,\varphi_{i+2m_j}(\xi')\,\xi_n^i + \sum_{|\alpha|\leq 2m_j}\sum_{s<|\alpha|}\sum_{i=0}^{m-s+2m_j-1}(i+s)! \times$$
$$\times R_{j\alpha s}(\xi, D')\,\varphi_{i+s}(\xi')\,\xi_n^i,$$

где $a_j(\xi) \neq 0$ (в силу эллиптичности операторов A_j^*), $R_{j\alpha s}(\xi, D')$ — «касательные» дифференциальные операторы (D' — операторы дифференцирования по $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$) порядков $|\alpha| - s$. Разлагая функции в ряды по степеням ξ_n и приравнивая нулю в последнем выражении коэффициенты при ξ_n^i для $i = \overline{0, m-1}$, находим $\varphi_{i+2m_j}(\xi')$, $i = \overline{0, m-1}$, $\varphi_j(\xi', \xi_n)$ — остальные слагаемые в этом выражении.

Доказательство теоремы 5. По теореме 3 любое решение задачи (9), (10) представимо в виде (13). Отсюда, используя оценки вектор-функции Грина и ее производных вблизи Γ и γ, получаем (17).

Пусть теперь выполнено (17) для решения u уравнения (9) в $\Omega\diagdown\gamma$. Рассмотрим покрытие $\bigcup\limits_{k=1}^{m'} U_k = U^*$ окрестности $U(\Gamma)$ такое, что граница $U^*\cap \cap\Omega_2$ состоит из Γ и поверхности Γ^* (класса C^∞), расположенной внутри Ω_2. Границей $\tilde{U}^* = \tilde{U}^*(\gamma)$ являются поверхности γ_1^* внутри Ω_1 и γ_2^* внутри Ω_2. Через $\Omega_{1\varepsilon}^*$ обозначим часть Ω_1 между γ_ε и γ_1^*, через $\Omega_{2\varepsilon}^*$ — часть Ω_2 между $\gamma_{-\varepsilon}$ и γ_2^*, через $\Omega_{3\varepsilon}^*$ — часть Ω_2 между Γ_ε и Γ^*. Пусть $\Phi_{1\varepsilon}, \Phi_{2\varepsilon}, \Phi_{3\varepsilon}$ — бесконечно дифференцируемые функции с носителями соответственно в $U_1^* = \tilde{U}^*\cap\overline{\Omega}_1$, $U_2^* = \tilde{U}^*\cap\overline{\Omega}_2$, $U_3^* = U^*\cap\overline{\Omega}_2$, имеющие в каждой граничной окрестности U_j вид $\Phi_{1\varepsilon}^{(j)} = \sum\limits_{i=0}^{m+2m_1-1} (\hat{\omega}\xi_n^{(j)} - \varepsilon)^i \varphi_{1i}^{(j)}(\hat{\omega}\xi'^{(j)})$, $\Phi_{2\varepsilon}^{(j)} = \sum\limits_{i=0}^{m+2m_2-1} (\hat{\omega}\xi_n^{(j)} + \varepsilon)^i \varphi_{2i}^{(j)}(\hat{\omega}\xi'^{(j)})$, $\Phi_{3\varepsilon}^{(j)} = \sum\limits_{i=0}^{m+2m_2-1} (\xi_n^{(j)} - \varepsilon)^i \varphi_{3i}^{(j)}(\xi'^{(j)})$, где $\varphi_{ri}(\hat{\omega}\xi')$, $i=\overline{0, 2m_r-1}$, $r=1, 2$, $\varphi_{3i}(\xi')$, $i=\overline{0, 2m_2-1}$ — произвольные (бесконечно дифференцируемые) функции, а остальные выбираются в соответствии с леммой 2.

Из формул Грина, применяя лемму 2 и учитывая нормальность матрицы B, получаем

$$\int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}^*} (\hat{\omega}\xi_n - \varepsilon)^m \varphi_1(\xi)\, u_1 d\xi + \int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}^*} (\hat{\omega}\xi_n + \varepsilon)^m \varphi_2(\xi)\, u_2 d\xi + \int\limits_{\Omega_{3\varepsilon}^*} (\xi_n - \varepsilon)^m \varphi_3(\xi)\, u_2 d\xi =$$

$$= \sum_{s=1}^{2m_1} \int\limits_{\gamma_\varepsilon\cup\gamma_1^*} D_n^{2m_1-s} u_1 P_{s1}\Phi_{1\varepsilon} d\Gamma + \sum_{s=1}^{2m_2} \int\limits_{\gamma_{-\varepsilon}\cup\gamma_2^*} D_n^{2m_2-s} u_2 P_{s2}\Phi_{2\varepsilon} d\Gamma +$$

$$+ \sum_{s=1}^{2m_2} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon\cup\Gamma^*} D_n^{2m_2-s} u_2 P_{s3}\Phi_{3\varepsilon} d\Gamma, \tag{18}$$

$\operatorname{ord} P_{sr} = 2m_r - s$, $s=\overline{1, 2m_r}$, $r=1, 2, 3$, $m_3 = m_2$, D_n — операторы дифференцирования по ξ_n. Отсюда с учетом (17) и регулярности решения u уравнения (9) внутри $\Omega_1\cup\Omega_2$ получаем существование предела суммы интегралов по $\Gamma_\varepsilon, \gamma_\varepsilon, \gamma_{-\varepsilon}$ в правой части (18). Так как $\xi_n = \varepsilon$ на Γ_ε, $\hat{\omega}\xi_n = \varepsilon$ на γ_ε и $\hat{\omega}\xi_n = -\varepsilon$ на $\gamma_{-\varepsilon}$, то $P_{sr}\Phi_{r\varepsilon} = \sum\limits_{j=0}^{2m_r-s} P_{jsr}(\xi', \varepsilon, D')\,\varphi_{rj}(\xi')$ на этих поверхностях, $\operatorname{ord} P_{jsr} = 2m_r - s - j$. Используя произвольность $2l$ функций $\varphi_{rj}(\xi')$, получаем, что $u_k(x)$ и их производные по нормали $D_n^s u_k(x)$ до порядков $s \leqslant 2m_k - 1$ принимают обобщенные граничные значения [6, 7] на γ $(k=1)$, на Γ и γ $(k=2)$. А так как каждый элемент Bu выражается через эти производные и «касательные» дифференциальные операторы, для которых существуют сопряженные, то u удовлетворяет условию (10).

Замечания 1. Если $(Bu)_k$ имеет порядок q_k, то $s(F_1^k) \leqslant m + 1 + q_k$. 2. С помощью замены $u = \tilde{u} + v$, где $(\varphi, \tilde{u}) = \left(\sum\limits_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} G(y, x)\,\varphi_k(x)\, dx, F_0\right)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in D(\overline{\Omega})$ задача (1), (2) сводится к задаче (9), (10).

3. В некоторых случаях (как, например, в [4, 5]) решение задачи (9), (10) можно свести к решению интегральных уравнений в пространстве гладких функций. 4. Полученные результаты переносятся на случай многосвязной области. 5. Аналогичные результаты имеют место для некоторых классов нелокальных параболических задач в пространствах обобщенных функций.

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР.— 1969.— **185**, № 4.— С. 739—740.
2. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Формула Гріна та умови розв'язності нелокальних еліптичних граничних задач // Укр. мат. журн. —1973.— **25**, № 4.— С. 475—487.
3. *Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* О задаче сопряжения в пространстве обобщенных функций // Всесоюз. конф. «Новые подходы к решению дифференциальных уравнений», г. Дрогобыч: Тез. докл.— М., 1987.— С. 37—38.
4. *Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* Об одном представлении решения эллиптической граничной задачи в пространстве обобщенных функций // Дифференц. уравнения.— 1987.— **23**, № 3.— С. 518—521.
5. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Теоремы об изоморфизмах для нелокальных эллиптических граничных задач и их приложения//Укр. мат. журн.— 1973.— **25**, № 6.— С. 761—771.
6. *Гупало Г. С.* Про узагальнену задачу Діріхле // Допов. АН УРСР.— 1966.—№ 7.— С. 843—846.
7. *Бойко Г. П., Волошина М. С., Гупало А. С.* Обобщенная задача Дирихле для одного класса сильно эллиптических систем второго порядка // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1975.— Вып. 2.— С. 37—42.
8. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.— М. : Наука, 1979.— 318 с.
9. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных обобщенных функций.— М. : Физматгиз, 1958.— 307 с.

Львов. ун-т Получено 07.12.87