УДК 517.929

Т. А. Чантурия

О специфических признаках колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Установим специфические признаки колеблемости решений дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$u^{(n)}(t) = (-1)^n \sum_{j=1}^{m} p_j(t)\, u(\tau_j(t)), \tag{1}$$

где $p_j : R_+ \to R_+$, $\tau_j : R_+ \to R$ — непрерывные функции, $\tau_j(t) \leqslant t$ при $t \in R_+$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \tau_j(t) = +\infty$, $j = 1, \ldots, m$.

Пусть $\tau_0 = \min\{\tau_j(t) : t \in R_+,\ j = 1, \ldots, m\}$, $\gamma(t) = \inf\{s \in R_+ : \tau_j(\xi) \geqslant t$ при $\xi \geqslant s$, $j = 1, \ldots, m\}$ и $t_0 \geqslant \tau_0$. Непрерывная функция $u : [t_0, +\infty[\to R$ называется правильным решением уравнения (1), если она n раз непрерывно дифференцируема на $]\gamma(t_0), +\infty[$, удовлетворяет на этом промежутке (1) и $\sup\{|u(s)| : s \in [t, +\infty[\} > 0$ при $t \geqslant t_0$.

Правильное решение уравнения (1) называется колеблющимся, если оно имеет последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$. В противном случае решение называется неколеблющимся.

Известно [1], что если функция $p = \sum\limits_{j=1}^{m} p_j$ тождественно не равна нулю ни в какой окрестности $+\infty$, а $u : [t_0, +\infty[\to R$ — неколеблющееся решение уравнения (1), то существуют $t^* \geqslant \gamma(t_0)$ и четное число $l \in \{0, \ldots, n\}$ такие, что

$$u^{(k)}(t)\, u(t) > 0 \text{ при } t \geqslant t^*,\quad k = 0, \ldots, l-1,\quad (-1)^{k+l} u^{(k)}(t)\, u(t) > 0 \text{ при}$$
$$t \geqslant t^*,\quad k = l, \ldots, n-1. \tag{2}$$

(При $l = 0$ ($l = n$) исключаем из рассмотрения неравенство, выписанное в первой (второй) строке.) Если, кроме того, $\tau(t) \equiv t$, то уравнение (1) обязательно имеет решение вида (2) при $l = 0$ [2]. (О существовании решений вида (2), $l \in \{1, \ldots, n-1\}$, см. [3].) Если же $\tau(t) \not\equiv t$, то решения вида (2) с $l = 0$ могут не существовать (см. [4—6] и указанную там библиографию, а также [7—10]).

Определение [5]. *Уравнение* (1) *обладает свойством* $\tilde{A}$, *если каждое правильное решение этого уравнения при нечетном* n *является колеблющимся, а при четном* n — *либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию*

$$|u^{(k)}(t)| \uparrow +\infty \ \text{при}\ t \uparrow +\infty,\quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть существуют неотрицательные числа* t_*, c_j, δ_j, $j = 1, \ldots, m$, *такие, что*

$$p_j(t) \geqslant c_j,\quad t - \tau_j(t) \geqslant \delta_j \ \text{при}\ t \geqslant t_*, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j e^{\delta_j \alpha} - \alpha^n > 0 \ \text{при}\ \alpha > 0. \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) *обладает свойством* $\tilde{A}$.

Доказательство. Пусть u — неколеблющееся решение уравнения (1). Тогда, как отмечено выше, для некоторых $t^* \geqslant 0$ и четного $l \in \{0, \ldots, n\}$ выполняются неравенства (2). В силу (5) $\sum\limits_{j=1}^{m} c_j > 0$. Поэтому из следствий теорем 3.1′ и 3.2′ [5] вытекает, что $l \notin \{2, \ldots, n-1\}$, а если

$l = n$ (это возможно лишь в случае, когда n — четное число), то u удовлетворяет условию (3). Таким образом, для доказательства теоремы остается показать, что $l \neq 0$. Допустим противное, т. е. пусть уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее неравенствам $(-1)^k u^{(k)}(t) > 0$ при $t \geqslant t^*$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Без ограничения общности будем считать, что уравнение $\sum_{j=1}^{m} c_j e^{\delta_j \alpha} - \alpha^n = 0$ имеет комплексный корень α_0, для которого $\operatorname{Re}\alpha_0 > 0$, $0 < \operatorname{Im}\alpha_0 \sum_{j=1}^{m} \delta_j < \pi$, $(n-1)\arg\alpha_0 < \pi$. Положим $v(t) = \operatorname{Re} e^{-\alpha_0 t} = e^{-\operatorname{Re}\alpha_0 t}\cos(\operatorname{Im}\alpha_0 t)$ при $t \geqslant 0$. Легко проверить, что v является решением дифференциального уравнения

$$v^{(n)}(t) = (-1)^n \sum_{j=1}^{m} c_j v(t-\delta_j),$$

при этом

$$v^{(k)}(t) = (-1)^k \operatorname{Re}\alpha_0^k e^{-\alpha_0 t} = (-1)^k |\alpha_0|^k e^{-\operatorname{Re}\alpha_0 t}\cos(\operatorname{Im}\alpha_0 t - k\arg\alpha_0),$$
$$k = 1, \ldots n.$$

Кроме того, если $t_j = \frac{\pi}{\operatorname{Im}\alpha_0}\left(2\nu - \frac{1}{2} + j\right)$, $j = 1, 2, 3, 4$, и $s_k = t_3 + \frac{\arg\alpha_0}{\operatorname{Im}\alpha_0}k$, $k = 1, \ldots, n-1$, где ν — достаточно большое натуральное число, то

$$v(t) < 0 \text{ при } t \in]t_1, t_2[\, \cup\,]t_3, t_4[, \quad v(t) > 0 \text{ при } t \in]t_2, t_3[, \quad t_3 < s_k < t_4,$$
$$v^{(k)}(s_k) = 0, \quad (-1)^k v^{(k)}(t) < 0 \text{ при } t \in]s_k, t_4[, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Пусть теперь $\xi \in]t_2, t_3[$ и $c > 0$ подобраны таким образом, что $w(\xi) = 0$, $w(t) > 0$ при $t \in [t_1, \xi[\, \cup\,]\xi, t_4]$, где $w = u - cv$. Тогда, поскольку

$$u(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} u^{(k)}(s_{n-1})(s_{n-1}-\xi)^k + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_{\xi}^{s_{n-1}} (s-\xi)^{n-1} u^{(n)}(s)\, ds >$$
$$> \frac{1}{(n-1)!}\int_{\xi}^{s_{n-1}} (s-\xi)^{n-1} \sum_{j=1}^{m} c_j u(s-\delta_j)\, ds,$$

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} v^{(k)}(s_{n-1})(s_{n-1}-\xi)^k + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_{\xi}^{s_{n-1}} (s-\xi)^{n-1} v^{(n)}(s)\, ds <$$
$$< \frac{1}{(n-1)!}\int_{\xi}^{s_{n-1}} (s-\xi)^{n-1} \sum_{j=1}^{m} c_j v(s-\delta_j)\, ds,$$

и $s - \delta_j > t_1$ при $s \geqslant t_2$, имеем

$$0 = w(\xi) > \frac{1}{(n-1)!}\int_{\xi}^{s_{n-1}} (s-\xi)^{n-1} \sum_{j=1}^{m} c_j w(s-\delta_j)\, ds > 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Так как $e^t \geqslant et$ при $t > 0$, для выполнения условия (5) достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \delta_j^n > (n/e)^n. \tag{6}$$

Поэтому из теоремы 1 вытекает такое утверждение.

С л е д с т в и е. *Если для некоторых неотрицательных чисел* t_*, c_j, δ_j, $j = 1, \ldots, m$, *выполняются неравенства* (4) *и* (6), *то уравнение* (1) *обладает свойством* $\tilde{A}$.

Отметим, что в случае $m = 1$ условия (5) и (6) эквивалентны.

Т е о р е м а 2. *Пусть существуют неотрицательные числа* t_*, c_j, δ_j, $j = 1, \ldots, m$, *такие, что*

$$t^n p_j(t) \geqslant c_j, \quad \tau_j(t)/t \leqslant \delta_j \leqslant 1 \text{ при } t \geqslant t_*, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \delta_j^{-\alpha} - \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) > 0 \text{ при } \alpha > 0. \tag{8}$$

Тогда уравнение (1) *не имеет решения, удовлетворяющего условию* (2) *с* $l = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее условию (2) с $l = 0$. Без ограничения общности будем считать, что уравнение $\sum\limits_{j=1}^{m} c_j\delta_j^{-\alpha} - \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) = 0$ имеет комплексный корень α_0, для которого $\operatorname{Re}\alpha_0 > 0$, $0 < \operatorname{Im}\alpha_0 < -\pi\left(\ln\prod\limits_{j=1}^{m}\delta_j\right)^{-1}$, $(n-1)\arg\alpha_0 < \pi$.

Пусть

$$v(t) = \operatorname{Re} t^{-\alpha_0} = t^{-\operatorname{Re}\alpha_0}\cos(\operatorname{Im}\alpha_0 \ln t) \text{ при } t \geqslant 1.$$

Тогда

$$v^{(k)}(t) = (-1)^k \operatorname{Re}\alpha_0(\alpha_0+1)\ldots(\alpha_0+k-1)\,t^{-\alpha_0-k} = (-1)^k|\alpha_0(\alpha_0+1)\ldots$$
$$\ldots(\alpha_0+k-1)|\,t^{-\operatorname{Re}\alpha_0-k}\cos\left(\operatorname{Im}\alpha_0\ln t - \sum_{j=1}^{k}\arg(\alpha_0+j-1)\right), \quad k = 1, \ldots, n,$$

и v является решением уравнения

$$v^{(n)}(t) = (-1)^n \sum_{i=1}^{m} c_j t^{-n} v(\delta_j t).$$

Если теперь

$$\ln t_j = \frac{\pi}{\operatorname{Im}\alpha_0}(2\nu + j - 1/2), \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\ln s_k = \ln t_3 + \frac{1}{\operatorname{Im}\alpha_0}\sum_{j=1}^{k}\arg(\alpha_0+j-1), \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

то, как и при доказательстве теоремы 1, получим противоречие. Это доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 1. Ясно, что если выполняются условия теоремы 2 и $n \in \{1, 2\}$, то уравнение (1) обладает свойством $\tilde{A}$. Если же $n \in \{3, 4, \ldots\}$, то, как это следует из теорем 3.4′ (в случае нечетного n) и 3.7′ (в случае четного n) из работы [5], для наличия у уравнения (1) свойства $\tilde{A}$ достаточно, чтобы кроме (7) и (8) для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство $t^{\mu}\sum\limits_{j=1}^{m} p_j(t)\tau_j^{n-\mu}(t) \geqslant M_n + \varepsilon$ при $t \geqslant t_*$, где $\mu = 1$ в случае нечетного n и $\mu = 2$ в случае четного n, а M_n — наибольший из локальных максимумов полинома $P_n(x) = x(x+1)\ldots(x+n-1)$.

З а м е ч а н и е 2. Ввиду того, что

$$\left(1 + \frac{(k-1)e}{n}\ln 1/\delta\right)\delta^{-\alpha/n} \geqslant (\alpha+k-1)\frac{e}{n}\ln 1/\delta \text{ при } 0 < \delta \leqslant 1, \quad \alpha > 0$$

для выполнения условия (8) достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1}^{m} c_j (\ln 1/\delta_j)^n \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(k-1)e}{n} \ln 1/\delta_j\right)^{-1} > (n/e)^n.$$

З а м е ч а н и е 3. Условия теоремы 1 (теоремы 2) неулучшаемы в следующем смысле: если для некоторого $\alpha > 0$ нарушается неравенство (5) (неравенство (8)), то существуют функции p_j, τ_j, удовлетворяющие неравенствам (4) (неравенствам (7)), такие, что уравнение (1) имеет неколеблющееся решение $u(t) = \exp(-\alpha t)$ $(u(t) = t^{-\alpha})$, не удовлетворяющее условию (3), т. е. уравнение (1) не обладает свойством $\tilde{A}$.

1. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та, 1975.— 352 с.
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— 720 с.
3. *Чантурия Т. А.* О колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков // Докл. семинара Ин-та прикл. математики Тбил. ун-та.— 1982.— **16**. С. 3—72.
4. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.— М. : Наука, 1972.— 352 с.
5. *Коплатадзе Р. Г.*, *Чантурия Т. А.* Об осцилляционных свойствах дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та, 1977.— 116 с.
6. *Шевело В. Н.* Осцилляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Киев : Наук. думка, 1978.— 152 с.
7. *Трамов М. И.* Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика — 1975.— № 3.— С. 92—96.
8. *Ladas G.* Sharp conditions for oscillations caused by delays // Appl. Anal. — 1979.— **9**, N 2.— P. 93—98.
9. *Домшлак Ю. И.* Теоремы сравнения типа Штурма для дифференциальных уравнений первого и второго порядков со знакопеременными отклонениями аргумента // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 2.— С. 158—163.
10. *Коплатадзе Р. Г.*, *Чантурия Т. А.* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения.— 1982.— **18**, № 8.— С. 1463—1465,

Ин-т прикл. математики Тбил. ун-та

Получено 18.06.84