УДК 519.21

Д. А. Скороход

Мартингальные методы в теории операторов

Условное математическое ожидание можно рассматривать как оператор проектирования в пространстве случайных величин. С другой стороны, с каждой случайной величиной можно связать оператор умножения на эту величину. Эти обстоятельства дают возможность распространить ряд понятий теории вероятностей на теорию линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Пусть K — коммутативное кольцо самосопряженных операторов сепарабельного гильбертового пространства H, замкнутое относительно слабой сходимости. В дальнейшем будем полагать, что все упомянутые ниже операторы принадлежат кольцу K. Если речь идет о некотором подпространстве L, будем полагать, что оператор проектирования на это подпространство P_L принадлежит K.

Оператор A называется L-измеримым, если $AP_L = A$, где $L \subset H$.

Условным математическим ожиданием оператора A относительно подпространства L называется оператор $P_L A$. Это условное математическое ожидание обладает естественными свойствами обычного математического ожидания:

1) $P_L A = A$, если A L-измерим;
2) $P_L(\alpha A + \beta B) = \alpha P_L A + \beta P_L B, \quad \alpha, \beta \in R^1$;
3) $P_L P_M A = P_L A, \quad M \supset L$;
4) $P_L(AC) = CP_L A$, C L-измерим.

Семейство подпространств H_t, $t \geqslant 0$, называется потоком, если $H_{t_1} \subseteq H_{t_2}$ при $t_1 \leqslant t_2$.

Операторная функция A_t, $t \geqslant 0$, называется H_t-согласованной, если для всех $t \geqslant 0$ A_t H_t-измерим.

Неотрицательный оператор A называется марковским моментом на потоке H, если E_t^A H_t-согласована, где E_t^V — разложение единицы оператора V (см. [1]).

Пусть A_t, $t \geqslant 0$, — слабоизмеримая операторная функция и $\|A_t\| < C$. Тогда значением функции A_t в марковский момент B называется оператор

$$A_B = \int_0^\infty A_t dE_t^B,$$

причем интеграл понимается в слабом смысле.

Укажем два свойства этого интеграла:

А. Пусть A_t, B_t, $t \in [a, b]$, — операторные функции, тогда

$$\int_a^b A_t dE_t^V \int_a^b B_t dE_t^V = \int_a^b A_t B_t dE_t^V.$$

В. Пусть $E_t^A \leqslant E_t^B$, тогда $\int E_t^A dE_t^B = 0$. Это следует из того, что область значений $E_{t_k}^A$ ортогональна области значений $E_{t_{k+1}}^B - E_{t_k}^B$.

H_t-Согласованная операторная функция A_t называется мартингалом, если $A_s P_{H_t} = A_t$ при $s \geqslant t$, суб-(супер-) мартингалом, если $A_s P_{H_t} \geqslant A_t$ ($A_s P_{H_t} \leqslant A_t$) при $s \geqslant t$. Ниже будут доказаны несколько теорем из теории мартингалов (см. [2]).

Теорема 1. *Пусть* A_t — *мартингал на потоке* H_t, $t \geqslant 0$, *и* $0 < B_1 \leqslant B_2$ — *марковские моменты на* H_t. *Тогда*

$$A_{B_2} P_{B_1} = A_{B_1},$$

где

$$P_{B_1} = \int_0^\infty P_{H_t} dE_t^{B_1}.$$

Доказательство. Докажем, что

$$\int_0^\infty A_t dE_t^{B_2} \int_0^\infty P_{H_t} dE_t^{B_1} = \int_0^\infty A_t dE_t^{B_1}.$$

Рассмотрим левую часть равенства и, воспользовавшись теоремой Фубини, запишем произведение интегралов в виде двойного интеграла

$$\int_0^\infty \int_0^\infty A_t P_{H_s} dE_t^{B_2} dE_s^{B_1}.$$

Поскольку $E_t^{B_1} \geqslant E_t^{B_2}$, то продакт-мера $dE_\lambda = dE_t^{B_2} dE_s^{B_1}$ сосредоточена на множестве $t \geqslant s$. Следовательно,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty A_t P_{H_s} dE_t^{B_2} dE_s^{B_1} = \int_0^\infty \int_s^\infty A_t P_{H_s} dE_t^{B_2} dE_s^{B_1} = \int_0^\infty A_s dE_s^{B_1} + \int_0^\infty A_s E_s^{B_2} dE_s^{B_1}.$$

Последнее слагаемое равно нулю. Теорема доказана.

Замечание. В случае, когда A_t является суб-(супер-) мартингалом на потоке H_t, B_1, B_2 — марковские моменты на H_t, то $A_{B_2} P_{B_1} \geqslant A_{B_1}$ ($A_{B_2} P_{B_1} \leqslant A_{B_1}$), т. е. последовательность операторов A_{B_k} — суб-(супер-) мартингал на потоке H_{B_k}, $k = 1, 2$.

Пусть a_i — числовая последовательность $i = \overline{1, n}$. Будем говорить, что a_i пересекает интервал $[a, b)$ сверху вниз ровно k раз, если существует набор $i_1 < j_1 < \ldots < i_k < j_k \leqslant n$ такой, что

$$a_{i_l} > b, \quad a_{j_l} \leqslant a, \tag{1}$$

и для любого набора, для которого выполняется (1), число пар (i_l, j_l) не превышает k.

Пусть $A_1, \ldots, A_n \in k$ и

$$A_i = \int \lambda_i dE_\lambda^{A_1 \ldots A_n}, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

где $E_\lambda^{A_1 \ldots A_n}$ — совместное разложение единицы операторов $A_1, \ldots, A_n$ (см. [1]).

Числом пересечения интервала $[a, b)$ сверху вниз для последовательности операторов $A_1 \ldots A_n$ называется оператор

$$V_{[a,b]} = \sum_{k=1}^n k \int_{V_k} dE_\lambda^{A_1 \ldots A_n},$$

где $V_h = \{\lambda /$последовательность $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ имеет ровно k пересечений$\}$

Теорема 2. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — неотрицательный субмартингал на потоке H_k, $k = \overline{1, n}$. Тогда*

$$P_{H_1}V_{[a,b]} \leqslant \frac{1}{b-a} \int\limits_b^{\infty} \lambda dE_\lambda^{A_n} P_{H_1}.$$

Доказательство. Построим на потоке H_k, $k = \overline{1, n}$, последовательность марковских моментов B_k. Положим

$$B_1 = \sum_{k=1}^{n} k \int\limits_C dE_\lambda^{A_1 \ldots A_n}.$$

Здесь $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i^1$, $C_i^1 = \{\lambda/\lambda_1 \leqslant b, \ldots, \lambda_{i-1} \leqslant b,\ \lambda_i > b\}$.

Далее обозначим

$$C_{l,k}^0 = \{\lambda/\lambda_l \leqslant a, \lambda_{l+1} \leqslant b, \ldots, \lambda_k > b\}, \quad C_{l,k}^1 = \{\lambda/\lambda_l > b, \lambda_{b+1} > a, \ldots, \lambda_k \leqslant a\}.$$

Положим теперь $C_k^2 = \bigcup\limits_i C_i^1 \bigcap C_{i,k}^0$ и далее по индукции

$$C_k^n = \bigcup_i C_i^{n-1} \bigcap C_{i,k}^j,$$

где $j \equiv n \pmod 2$,

$$B_k = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{n} i_k \int\limits_{\bigcup\limits_{i_k} C_{i_k}^k} dE_\lambda^{A_1 \ldots A_n},$$

либо, если множество, по которому берется интеграл, пусто, $B_k = nP_{H_n}$.

Последовательность $B_1 \leqslant B_2 \leqslant \ldots$ является последовательностью марковских моментов на потоке H_k, $k = \overline{1, n}$. Следовательно, последовательность операторов A_{B_k} — субмартингал на потоке H_{B_k}, а поскольку $P_{H_1} P_{H_{B_k}} = P_{H_1}$, то $P_{H_1}((A_{B_2} - A_{B_1}) + (A_{B_4} - A_{B_3}) + \ldots) \geqslant 0$.

Разность $A_{B_2} - A_{B_1}$ для тех λ, для которых последовательность $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ не имеет пересечений, равна нулю; разность $A_{B_{2k}} - A_{B_{2k-1}}$ равна нулю для тех λ, для которых число пересечений меньше k.

Таким образом,

$$A_{B_{2k}} - A_{B_{2k-1}} \leqslant (a-b) \int\limits_{\bigcup\limits_{i=k} V_i} dE_\lambda^{A_1 \ldots A_n}.$$

Последний член суммы имеет вид $A_n - A_{B_k}$, где k нечетное (если k четное, этого члена нет),

$$A_{B_k} = \int\limits_G \lambda dE_\lambda^{A_1 \ldots A_n}.$$

Здесь $G = \{\lambda$/последовательность λ_k имеет $(k-1)/2$ пересечений сверху вниз и после последнего пересечения выходит на верхнюю границу$\}$. Поэтому

$$A_n - A_{B_k} \leqslant \int\limits_b^{+\infty} \lambda dE_\lambda^{A_n}.$$

Таким образом,

$$0 \leqslant P_{H_1}((A_{B_2} - A_{B_1}) + \ldots) \leqslant (a-b) P_{H_1} V_{[a,b)} + \int\limits_b^{+\infty} \lambda dE_\lambda^{A_n},$$

или

$$P_{H_1} V_{[a,b)} \leqslant \frac{1}{b-a} \int\limits_b^{+\infty} \lambda dE_\lambda^{A_n} P_{H_1},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть $A_k \geqslant 0$ — субмартингал на потоке H_k, $k = \overline{1, n}$. Тогда*

$$P_{H_1} \int\limits_{\sup\limits_n \lambda_n > a} dE_\lambda^{A_1 \ldots A_n} \leqslant \frac{1}{a} P_{H_1} A_n.$$

Доказательство. Положим

$$B = \sum_{k=1}^{n} k \int\limits_{\lambda_1 < a \ldots \lambda_{k-1} < a, \lambda_k \geqslant a} dE_\lambda^{A_1 \ldots A_n};$$

B является марковским моментом на потоке H_k, $k = \overline{1, n}$. Поскольку $nP_{H_n} \geqslant B$, то $P_{H_B} A_n \geqslant A_B$, или

$$A_B = \sum_{k=1}^{n} A_k \int\limits_{\lambda_1 < a \ldots \lambda_{k-1} < a, \lambda_k \geqslant a} dE_\lambda^{A_1 \ldots A_n} \geqslant a \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\lambda_1 < a \ldots \lambda_{k-1} < a, \lambda_k \geqslant a} dE_\lambda^{A_1 \ldots A_n} =$$

$$= a \int\limits_{\sup\limits_n \lambda_n \geqslant a} dE_\lambda^{A_1 \ldots A_n},$$

или

$$P_{H_1} A_n \geqslant a P_{H_1} \int\limits_{\sup\limits_n \lambda_n \geqslant a} dE_\lambda^{A_1 \ldots A_n},$$

что и требовалось доказать.

Пусть $A_n \in k$ — последовательность операторов, $E_\lambda^{A_1 \ldots A_n \ldots}$ (где $\lambda = (\lambda_1 \ldots \ldots \lambda_n \ldots)$ — совместное разложение единицы этой последовательности операторов (см. [1]). Тогда последовательность операторов A_n сходится почти всюду, если последовательность λ_n сходится почти всюду по мере $E_\lambda^{A_1 \ldots A_n \ldots}$

Теорема 4. *Пусть $A_n > 0$ — субмартингал на потоке H_n и $P_{H_k} A_n \leqslant \leqslant B_k$ (B_k — некоторый положительный оператор кольца K). Тогда последовательность A_n сходится почти всюду.*

Доказательство. Докажем сначала, что последовательность A_n почти всюду ограничена.

По теореме 3 $P_{H_1} I_{\{\sup\limits_{n \leqslant N} A_n > C\}} \leqslant \frac{1}{C} P_{H_1} A_N \leqslant \frac{1}{C} B_1$. Оператор $P_{H_1} I_{\{\sup\limits_n A_n = +\infty\}}$ на плотном множестве равен нулю, следовательно, $P_{H_1} I_{\{\sup\limits_n A_n = +\infty\}} = 0$. Поскольку предел последовательности не зависит от конечного числа членов, то, выбрасывая первые $k-1$ члены, получаем $P_{H_k} I_{\{\sup\limits_n A_n = +\infty\}} = 0$. Отсюда следует $I_{\{\sup\limits_n A_n = +\infty\}} = 0$, т. е. последовательность ограничена почти всюду: $P_{H_k} V_{[a,b)} < \infty$. Следовательно, множество значений λ, $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_n \ldots)$, для которых число пересечений равно $+\infty$, имеет $E_\lambda^{A_1 \ldots A_n \ldots}$-меру нуль. Это означает, что последовательность λ_n сходится почти всюду по мере $E_\lambda^{A_1 \ldots A_n \ldots}$.

1. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространстве функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
2. *Мейер П.-А.* Вероятность и потенциал.— М.: Мир, 1973.— 322 с.

Киев. ун-т

Получено 25.03.85