УДК 517.944

М. И. Громяк

Обоснование одной схемы усреднения гиперболических систем с быстрыми и медленными переменными. Смешанная задача

1. Постановка задачи. Рассмотрим на множестве $\Pi^+=\{(x, t)\in \mathbb{R}^2 : 0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t<\infty\}\times I=[0, \varepsilon],\ 0<l<\infty$, гиперболическую систему

$$Du=\varepsilon F(x, t, u), \tag{1}$$

где D — диагональная матрица с компонентами $D_i=\partial/\partial t+\lambda_i(x, t, \varepsilon)\,\partial/\partial x$, $i=1, 2, \ldots;$ m, u, F — m-мерные векторы; ε — малый параметр. Заданные функции $\lambda_i(x, t, \varepsilon)$ считаем непрерывными на множестве $\Pi^+\times I$ и обеспечивающими единственность решения $x=x_i(t; x_0, t_0, \varepsilon)$, $0\leqslant t<\infty$, начальной задачи $(x(t_0)=x_0)$ для уравнения характеристик $dx/dt=\lambda_i(x, t, \varepsilon)$.

Потребуем также, чтобы функции $\lambda_i(x, t, \varepsilon)$ можно было пронумеровать в порядке их возрастания, т. е. в каждой точке $(x, t, \varepsilon) \in \Pi^+ \times I$ положим $\lambda_1(x, t, \varepsilon) \leqslant \lambda_2(x, t, \varepsilon) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m(x, t, \varepsilon)$, причем предположим, что первые k, $0 \leqslant k \leqslant m$, функции λ_i отрицательны, а остальные $(m-k)$ — положительны в $\Pi^+ \times I$.

Обозначим через $\chi_i(x_0, t_0, \varepsilon)$ наименьшее значение t для такого решения $(0 \leqslant \chi_i(x_0, t_0, \varepsilon) \leqslant t_0)$; тогда если $\chi_i(x_0, t_0, \varepsilon) > 0$, то $x_i(x_i(x_0, t_0, \varepsilon); x_0, t_0, \varepsilon) = 0$ или $x_i(\chi_i(x_0, t_0, \varepsilon); x_0, t_0, \varepsilon) = l$. В соответствии с этим обозначим через Π_{gi}, Π_{0i} и Π_{li} множества точек $(x, t) \in \Pi^+$, для которых соответственно $\chi_i(x, t, \varepsilon) = 0$; $\chi_i(x, t, \varepsilon) > 0$ и $x_i(\chi_i(x, t, \varepsilon); x, t, \varepsilon) = 0$; $\chi_i(x, t, \varepsilon) > 0$ и $x_i(\chi_i(x, t, \varepsilon); x, t, \varepsilon) = l$.

Для системы (1) зададим начальные

$$u(x, 0) = g(x, \varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad \varepsilon \in I, \tag{2}$$

и граничные условия

$$\begin{gathered} u_i(0, t) = \varepsilon\Phi_{0i}(t; u_1(0, t), u_2(0, t), \ldots, u_k(0, t)), \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad \varepsilon \in I, \\ i = k+1, \ldots, m, \\ u_i(l, t) = \varepsilon\Phi_{li}(t; u_{k+1}(l, t), u_{k+2}(l, t), \ldots, u_m(l, t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty, \quad \varepsilon \in I, \\ i = 1, 2, \ldots, k. \end{gathered} \tag{3}$$

2. Усреднение по явно входящему времени. Пусть существует такая функция $F(x, t, u)$, для которой

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [F(x, t, u) - \tilde{F}(x, t, u)]\, dt = 0. \tag{4}$$

Тогда системе (1) поставим в соответствие систему вида

$$Dv = \varepsilon\tilde{F}(x, t, v) \tag{5}$$

(назовем ее усредненной), для которой зададим начальные

$$v(x, 0) = g(x, \varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad \varepsilon \in I, \tag{6}$$

и граничные условия

$$\begin{gathered} v_i(0, t) = \varepsilon\Phi_{0i}(t; v_1(0, t), v_2(0, t), \ldots, v_k(0, t)), \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad \varepsilon \in I, \\ i = k+1, \ldots, m, \\ v_i(l, t) = \varepsilon\Phi_{li}(t; v_{k+1}(l, t), v_{k+2}(l, t), \ldots, v_m(l, t)), \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad \varepsilon \in I, \\ i = 1, 2, \ldots, k. \end{gathered} \tag{7}$$

Заметим, что усреднение систем (1) для смешанной задачи впервые рассмотрено в работе [1]. В работе [2] обосновано одну из схем усреднения для обыкновенных систем дифференциальных уравнений стандартного вида на конечном промежутке времени. Такой же результат установлен и для систем (1) в работе [3], но для задачи Коши. В данной статье рассматривается схема усреднения, предложенная в работах [2—3], для гиперболических систем (1) в случае смешанной задачи.

Рассмотрим вопрос о близости решений смешанных задач (1) — (3) и (5)—(7) на конечном промежутке времени.

Теорема. *Пусть вектор-функция $\lambda(x, t, \varepsilon)$ определена на множестве $\Pi^+ \times I$; вектор-функции $F(x, t, u)$ и $\tilde{F}(x, t, u)$ определены на множестве $\Omega = \{(x, t, u) \in \mathbb{R}^{m+2} : (x, t) \in \Pi^+, u \in G \subset \mathbb{R}^m\}$, а функции Φ_{0i}, Φ_{li} — на множестве $\Omega_1 = \{(t, u) \in \mathbb{R}^{m+1} : 0 \leqslant t < \infty, u \in G \subset \mathbb{R}^m\}$ и пусть на этих множествах выполнены условия:*

1) $\lambda(x, t, \varepsilon) \in C^1_{x,t}(\Pi^+ \times I)$, *причем* $\lambda_1(x, t, \varepsilon) \leqslant \lambda_2(x, t, \varepsilon) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m(x, t, \varepsilon)$ $\forall (x, t, \varepsilon) \in \Pi^+ \times I$, $0 < m_0 \leqslant |\lambda_i(x, t, \varepsilon)| \leqslant \nu_0$, $|\partial\lambda_i/\partial x| \leqslant \varepsilon\nu_1$, $|\partial\lambda_i/\partial t| \leqslant \varepsilon\nu_2$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $(\lambda, \partial\lambda/\partial x, \partial\lambda/\partial t) \in C_\varepsilon(\Pi^+ \times I)$;

2) $g(x, \varepsilon) \in C_\varepsilon \times \mathrm{Lip}_x(\varepsilon\alpha; [0, l] \times I)$, $g(x, \varepsilon) = u(x, 0) \in G$;

3) *функции* $F_i(x, t, u)$ *и* $\tilde{F}_i(x, t, u)$ *удовлетворяют условию Липшица по* x, u *с постоянной* M, *т. е.* $F_i(x, t, u)$, $\tilde{F}_i(x, t, u) \in C_t \times \mathrm{Lip}_{x,u}(M; \Omega)$;

4) *равномерно по отношению к* $x \in [0, l]$ *и* $u \in G$ *существует предел* (4), *причем* $|\tilde{F}_i(x, t, u)| \leqslant K$;

5) *функции* $\Phi_{0i}(t, u)$, $\Phi_{li}(t, u)$ *удовлетворяют условию Липшица по* t, u *с постоянной* M_1, *т.* е. $\Phi_{0i}(t, u)$, $\Phi_{li}(t, u) \in \mathrm{Lip}_{t,u}(M_1, \Omega_1)$, *причем* $2\varepsilon M_1 k < 1$, $2\varepsilon M_1(m - k) < 1$;

6) *выполнено «первое условие согласования»* [4]: $g_i(0) = \Phi_{0i}(0, g(0))$, $i = k + 1, \ldots, m$, $g_i(l) = \Phi_{li}(0, g(l))$, $i = 1, 2, \ldots, k$;

7) *выполнены условия существования непрерывного обобщенного решения смешанной задачи* (1)—(3) *на множестве* Π^+ [4];

8) *непрерывное решение* $v(x, t)$ *смешанной задачи* (5)—(7), *определенное на множестве* Π^+, *лежит в области* G *с некоторой* ρ-*окрестностью.*

Тогда для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ *и сколь угодно большого* $L > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, *для которого при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1/2}$ *будет выполняться неравенство*

$$|u_i(x, t) - v_i(x, t)| < \eta \quad \forall (x, t) \in \Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}; \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где $u(x, t)$ *и* $v(x, t)$ — *непрерывные решения смешанных задач* (1) — (3) *и* (5) — (7), $\Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}} = \{(x, t) \in \Pi^+ : 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1/2}\}$.

Доказательство. Так как вектор-функции $F(x, t, u)$ и $F(x, t, u)$ удовлетворяют условию Липшица по x, u с постоянной M, то существуют непрерывные решения $u(x, t)$ и $v(x, t)$ смешанных задач (1)—(3) и (5)—(7) на каждом ограниченном замкнутом множестве $\Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}$, удовлетворяющие интегральным тождествам [4]

$$u_i(x, t) = z_{1i}(x, t) + \varepsilon \int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t} F_i(x_i, \tau, u(x_i, \tau))\, d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{8}$$

$$v_i(x, t) = z_{2i}(x, t) + \varepsilon \int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t} \tilde{F}_i(x_i, \tau, v(x_i, \tau))\, d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{9}$$

где

$$z_{1i}(x, t) = \begin{cases} g_i(x_i(0; x, t, \varepsilon)), & (x, t) \in \Pi_{gi}, \\ \varepsilon\Phi_{0i}(\chi_i(x, t, \varepsilon),\ u(0, \chi_i(x, t, \varepsilon))), & (x, t) \in \Pi_{0i}, \\ \varepsilon\Phi_{li}(\chi_i(x, t, \varepsilon),\ u(l, \chi_i(x, t, \varepsilon))), & (x, t) \in \Pi_{li}, \end{cases} \tag{10}$$

$$z_{2i}(x, t) = \begin{cases} g_i(x_i(0; x, t, \varepsilon)), & (x, t) \in \Pi_{gi}, \\ \varepsilon\Phi_{0i}(\chi_i(x, t, \varepsilon),\ v(0, \chi_i(x, t, \varepsilon))), & (x, t) \in \Pi_{0i}, \\ \varepsilon\Phi_{li}(\chi_i(x, t, \varepsilon),\ v(l, \chi_i(x, t, \varepsilon))), & (x, t) \in \Pi_{li}, \end{cases} \tag{11}$$

$$x_i = x_i(\tau; x, t, \varepsilon), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t.$$

Переходя от систем (1) и (5) к системам интегральных уравнений (8) и (9), имеем

$$|u_i(x, t) - v_i(x, t)| = \left| z_{1i}(x, t) + \varepsilon \int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t} F_i(x_i, \tau, u(x_i, \tau))\, d\tau - z_{2i}(x, t) - \right.$$

$$\left. - \varepsilon \int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t} \tilde{F}_i(x_i, \tau, v(x_i, \tau))\, d\tau \right| \leqslant |z_{1i}(x, t) - z_{2i}(x, t)| +$$

$$+\varepsilon\left|\int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t}[F_i(x_i,\tau,u(x_i,\tau))-\tilde F_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))]\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant|z_{1i}(x,t)-z_{2i}(x,t)+\varepsilon\int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t}|F_i(x_i,\tau,u(x_i,\tau))-F_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))|\,d\tau+$$

$$+\varepsilon\left|\int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t}[F_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))-\tilde F_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))]\,d\tau\right|=I_{1i}+I_{2i}+I_{3i}. \quad (12)$$

Оценим интегралы I_{2i} и I_{3i}. На основании условия 3 теоремы получаем

$$I_{2i}=\varepsilon\int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t}|F_i(x_i,\tau,u(x_i,\tau))-F_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon M\int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t}\sum_{j=1}^{m}|u_j(x_i,\tau)-v_j(x_i,\tau)|\,d\tau. \quad (13)$$

Для оценки I_{3i} разделим отрезок $[0, L\varepsilon^{-1/2}]$ на p равных частей точками $t_0=0$, $t_1=\dfrac{L}{\sqrt{\varepsilon}\,p}$, $t_2=\dfrac{2L}{\sqrt{\varepsilon}\,p}$, ..., $t_p=\dfrac{L}{\sqrt{\varepsilon}}$ и положим $x_i(t_k; x, t, \varepsilon)=x_i^k$, $v(x_i^k, t_k)=v^k$, $t_k=\dfrac{kL}{\sqrt{\varepsilon}\,p}$, $k=\overline{0,p}$. Предположим, что $t\in(t_\nu, t_{\nu+1})$, $\chi_i(x,t,\varepsilon)\in[t_{\mu_i-1}, t_{\mu_i})$ для некоторых μ_i и ν, $\mu_i=1,2,\ldots,\nu+1$; $\nu=0,1,2,\ldots,p-1$.

Введем обозначение

$$\psi_i(x,\tau,v)=F_i(x,\tau,v)-\tilde F_i(x,\tau,v). \quad (14)$$

Тогда $I_{3i}=\varepsilon\left|\int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t}\psi_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))\,d\tau\right|$. Оценивая последнее выражение, получаем

$$I_{3i}=\varepsilon\left|\int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t}\psi_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))\,d\tau\right|=\varepsilon\left|\sum_{k=\mu_i+1}^{\nu}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[\psi_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))-\right.$$

$$-\psi_i(x_i^k,\tau,v(x_i^k,t_k))]\,d\tau+\sum_{k=\mu_i+1}^{\nu}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\psi_i(x_i^k,\tau,v(x_i^k,t_k))\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_\nu}^{t}[\psi_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))-\psi_i(x_i^{\nu+1},\tau,v(x_i^{\nu+1},t_{\nu+1}))]\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_\nu}^{t}\psi_i(x_i^{\nu+1},\tau,v(x_i^{\nu+1},t_{\nu+1}))\,d\tau+\int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t_{\mu_i}}[\psi_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))-$$

$$\left.-\psi_i(x_i^k,\tau,v(x_i^k,t_k))_{k=\mu_i}]\,d\tau+\int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t_{\mu_i}}\psi_i(x_i^k,\tau,v(x_i^k,t_k))_{k=\mu_i}\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{k=\mu_i+1}^{\nu}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|\psi_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))-\psi_i(x_i^k,\tau,v^k)\,d\tau+$$

$$+\varepsilon\int\limits_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t_{\mu_i}}|\psi_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))-\psi_i(x_i^k,\tau,v^k)_{k=\mu_i}|\,d\tau+$$

$$+\varepsilon\int_{t_\nu}^{t}|\psi_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))-\psi_i(x_i^{\nu+1}\tau,v^{\nu+1})|\,d\tau+\varepsilon\sum_{k=\mu_i}^{\nu}\left|\int_0^{t_k}\psi_i(x_i^k,\tau,v^k)\,d\tau\right|+$$

$$+\varepsilon\sum_{k=\mu_i+1}^{\nu+1}\left|\int_0^{t_{k-1}}\psi_i(x_i^k,\tau,v^k)\,d\tau\right|+\varepsilon\left|\int_0^{\chi_i(x,t,\varepsilon)}\psi_i(x_i^k,\tau,v^k)_{k=\mu_i}\,d\tau\right|+$$

$$+\varepsilon\left|\int_0^{t}\psi_i(x_i^{\nu+1},\tau,v^{\nu+1})\,d\tau\right|=\sum_{s=1}^{7}N_{si}$$

для всех $(x,t)\in\Pi_{0i}$ и Π_{li}. (Аналогичные представления I_{3i} получаем для всех $(x,t)\in\Pi_{gi}$, выбирая фиксированными левые точки деления отрезка $[0,L\varepsilon^{-1/2}]$.)

Прежде, чем оценить N_{si}, $s=\overline{1,7}$, покажем, что функции $v_i(x,t)$, $i=\overline{1,m}$, удовлетворяют условию Липшица с постоянной, пропорциональной $\sqrt{\varepsilon}$ на множествах $\Pi_{gi}\cap\Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}$, $\Pi_{0i}\cap\Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}$ и $\Pi_{li}\cap\Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}$. Имеем

$$v_i(x,t)-v_i(x_0,t_0)|\leqslant|z_{2i}(x,t)-z_{2i}(x_0,t_0)|+\varepsilon\left|\int_{\chi_i}^{t}\tilde F_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))\,d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_{\chi_i^0}^{t_0}\tilde F_i(x_i^0,\tau,v(x_i^0,\tau))\,d\tau\right|=P_{1i}+P_{2i}. \tag{15}$$

где $x_i^0=x_i(\tau;x_0,t_0,\varepsilon)$, $\chi_i=\chi_i(x,t,\varepsilon)$, $\chi_i^0=\chi_i(x_0,t_0,\varepsilon)$.

Предположим, что $t>t_0$ (аналогично рассматриваются и другие случаи). Тогда, учитывая условия 3, 4 теоремы, получаем

$$P_{2i}\leqslant\varepsilon\int_{\chi_i}^{t}|\tilde F_i(x_i,\tau,v(x_i,\tau))-\tilde F_i(x_i^0,\tau,v(x_i^0,\tau))|\,d\tau+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t}|\tilde F_i(x_i^0,\tau,v(x_i^0,\tau))|\,d\tau+\varepsilon\int_{\chi_i^0}^{\chi_i}|\tilde F_i(x_i^0,\tau,v(x_i^0,\tau))|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon M\int_{\chi_i}^{t}\left\{|x_i-x_i^0|+\sum_{j=1}^{m}|v_j(x_i,\tau)-v_j(x_i^0,\tau|\right\}d\tau+$$

$$+\varepsilon K|t-t_0|+\varepsilon K|\chi_i(x,t,\varepsilon)-\chi_i(x_0,t_0,\varepsilon)|. \tag{16}$$

Используя равенства

$$\frac{\partial x_i}{\partial x}=\exp\left\{\int_t^{\tau}\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\,d\tau\right\},\quad \frac{\partial x_i}{\partial t}=-\lambda_i(x,t,\varepsilon)\exp\left\{\int_t^{\tau}\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\,d\tau\right\}$$

(см. [5]) и учитывая условие 1 теоремы, находим $|\partial x_i/\partial x|\leqslant\exp\{\sqrt{\varepsilon}\,\nu_1L\}\equiv\equiv\nu_3$, $|\partial x_i/\partial t|\leqslant\nu_0\exp\{\sqrt{\varepsilon}\,\nu_1L\}\equiv\nu_4$.

Вычисляя производные неявной функции $x_i(\chi_i(x,t,\varepsilon);x,t,\varepsilon)=0$ и учитывая условие 1 теоремы, находим $|\partial\chi_i/\partial x|\leqslant\nu_3/m_0\equiv\nu_5$, $|\partial\chi_i/\partial t|\leqslant\leqslant\nu_4/m_0\equiv\nu_6$.

Пусть (x,t), $(x_0,t_0)\in\Pi_{gi}\cap\Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда $\chi_i(x,t,\varepsilon)=\chi_i(x_0,t_0,\varepsilon)=0$. Учитывая (11), (16) и условие 2 теоремы, из (15) получаем

$$|v_i(x,t)-v_i(x_0,t_0)|\leqslant|g_i(x_i(0;x,t,\varepsilon))-g_i(x_i^0(0;x_0,t_0,\varepsilon))|+$$

$$+\varepsilon M\int_0^{t}\left\{|x_i-x_i^0|+\sum_{j=1}^{m}|v_j(x_i,\tau)-v_j(x_i^0,\tau)|\right\}d\tau+\varepsilon K|t-t_0|+$$

$$+ \varepsilon K \,|\, \chi_i(x, t, \varepsilon) - \chi_i(x_0, t_0, \varepsilon) \,| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,(\sqrt{\varepsilon}\,\alpha\nu_7 + ML\nu_7 + \sqrt{\varepsilon}\,K)\,(|\, x - x_0 \,| + $$

$$+ |\, t - t_0 \,|) + 2\varepsilon Mm \int_0^t \max_{j;x;\tau\leqslant t} |\, v_j(x, \tau) - v_j(x_0, t_0) \,|\, d\tau,$$

где $\nu_7 = \max\{\nu_3, \nu_4\}$.

Рассмотрим функцию $W(t) = \max\limits_{j;x;\tau\leqslant t} |\, v_j(x, \tau) - v_j(x_0, t_0) \,|$. Тогда на основании леммы Гроноулла—Беллмана [6] последнее неравенство можно представить в виде

$$W(t) \leqslant \sqrt{\varepsilon}\, M_2 (|\, x - x_0 \,| + |\, t - t_0 \,|) \quad \forall\, (x, t),\ (x_0, t_0) \in \Pi_{gi} \cap \Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}},$$

где $M_2 = (ML\nu_7 + \sqrt{\varepsilon}\,(\alpha\nu_7 + K)) \exp\{2\sqrt{\varepsilon}\, mML\}$.

Пусть $(x, t),\ (x_0, t_0) \in \Pi_{0i} \cap \Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда, учитывая (11), (16) и условие 5 теоремы, из (15) находим

$$|\, v_i(x, t) - v_i(x_0, t_0) \,| \leqslant \varepsilon M_1 \,|\, \chi_i(x, t, \varepsilon) - \chi_i(x_0, t_0, \varepsilon) \,| +$$

$$+ \varepsilon M_1 \sum_{j=1}^{k} |\, v_j(0, \chi_i(x, t, \varepsilon)) - v_j(0, \chi_i(x_0, t_0, \varepsilon)) \,| + \varepsilon M \int_0^t |\, x_i - x_i^0 \,|\, d\tau +$$

$$+ \varepsilon M \int_0^t \sum_{j=1}^{m} |\, v_j(x_i, \tau) - v_j(x_i^0, \tau) \,|\, d\tau + \varepsilon K \,|\, t - t_0 \,| + \varepsilon K \,|\, \chi_i(x, t, \varepsilon) -$$

$$- \chi_i(x_0, t_0, \varepsilon) \,| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,(ML\nu_7 + \sqrt{\varepsilon}\,(M_1\nu_8 + K\nu_8 + K))\,(|\, x - x_0 \,| + |\, t - t_0 \,| +$$

$$+ 2\varepsilon Mm \int_0^t \max_{j;x;\tau\leqslant t} |\, v_j(x, \tau) - v_j(k_0, t_0) \,|\, d\tau + 2\varepsilon M_1 k \max_{j;x;\tau\leqslant t} |\, v_j(x, \tau) - v_j(x_0, t_0) \,|,$$

где $\nu_8 = \max\{\nu_5, \nu_6\}$.

Используя функцию $W(t)$ и лемму Гроноулла—Беллмана для последнего неравенства, имеем

$$W(t) \leqslant \sqrt{\varepsilon}\, M_3 (|\, x - x_0 \,| + |\, t - t_0 \,|) \quad \forall\, (x, t),\ (x_0, t_0) \in \Pi_{0i} \cap \Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}},$$

где $M_3 = (ML\nu_7 + \sqrt{\varepsilon}\,(M_1\nu_8 + K\nu_8 + K))\,(1 - 2\varepsilon k M_1)^{-1} \exp\{2\sqrt{\varepsilon}\, mML\}$.

Аналогично, если $(x, t),\ (x_0, t_0) \in \Pi_{li} \cap \Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}$, то, учитывая (11), (16) и условие 5 теоремы, из (15) получаем

$$W(t) \leqslant \sqrt{\varepsilon}\, M_4 (|\, x - x_0 \,| + |\, t - t_0 \,|) \quad \forall\, (x, t),\ (x_0, t_0) \in \Pi_{li} \cap \Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}},$$

где $M_4 = (ML\nu_7 + \sqrt{\varepsilon}\,(M_1\nu_8 + K\nu_8 + K))\,(1 - 2\varepsilon\,(m - k)\,M_1)^{-1} \exp\{2\sqrt{\varepsilon}\, mML\}$.

Итак, решение $v_i(x, t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, удовлетворяет условию Липшица по x и t с постоянной, пропорциональной $\sqrt{\varepsilon}$ на множествах $\Pi_{gi} \cap \Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}$, $\Pi_{0i} \cap \Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}$ и $\Pi_{li} \cap \Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}$.

Перейдем к оценкам N_{si}, $s = \overline{1, 7}$. Заметим, что функции $\psi_i(x, \tau, v)$ удовлетворяют условию Липшица, причем $|\, \psi_i(\bar{\bar{x}}, \tau, \bar{\bar{v}}) - \psi_i(\bar{x}, \tau, \bar{v}) \,| \leqslant$ $\leqslant 2M \left\{ |\, \bar{\bar{x}} - \bar{x} \,| + \sum\limits_{j=1}^{m} |\, \bar{\bar{v}}_j - \bar{v}_j \,| \right\}$. Тогда

$$N_{1i} \leqslant 2\varepsilon M \sum_{k=\mu_i+1}^{\nu} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ |\, x_i - x_i^k \,| + \sum_{j=1}^{m} |\, v_j(x_i, \tau) - v_j(x_i^k, t_k) \,| \right\} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon M (\nu - \mu_i) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{\nu_0 (\tau - t_k) + m\sqrt{\varepsilon}\, M_5 (\nu_0 + 1)(\tau - t_k)\}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\nu-\mu_i) M (\nu_0+\sqrt{\varepsilon}\, mM_5 (\nu_0+1)) L^2}{p^2},$$

где $M_5 = \max\{M_2, M_3, M_4\}$.

Аналогично для $N_{2i}+N_{3i}$ получаем $N_{2i}+N_{3i} \leqslant (2M(\nu_0+\sqrt{\varepsilon} mM_5 \times \times(\nu_0+1))L^2)/p$. Отсюда $N_{1i}+N_{2i}+N_{3i} \leqslant (M(\nu_0+\sqrt{\varepsilon}\, mM_5(\nu_0+1))L^2)/ /p \equiv a^*(\varepsilon, p)$.

В силу условия 4 теоремы существуют функции

$$\Psi_i(t) = \sup_{x\in[0,l],v\in G} \left| \frac{1}{t} \int_0^t [F_i(x,\tau,v) - \tilde{F}_i(x,\tau,v)]\, d\tau \right|,$$

для которых $\Psi_i(t)\to 0$, $i=1,2,\ldots,m$, при $t\to\infty$. Тогда $\left|\varepsilon\int_0^t [F_i(x,\tau,v) - \tilde{F}_i(x,\tau,v)]\, d\tau\right| \leqslant \varepsilon t\Psi_i(t) \leqslant \sqrt{\varepsilon} \sup_{0\leqslant\tau\leqslant L} \tau\Psi_i(\tau/\sqrt{\varepsilon}) = \varphi_i(\sqrt{\varepsilon})$, причем $\varphi_i(\sqrt{\varepsilon})\to 0$, $i=1,2,\ldots,m$, при $\varepsilon\to 0$.

На основании последних рассуждений имеем

$$\sum_{s=4}^{7} N_{si} \leqslant (2\nu-2\mu_i+4)\left|\varepsilon\int_0^t [F_i(x,\tau,v) - \tilde{F}_i(x,\tau,v)]\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant (2\nu-2\mu_i+4)\varphi_i(\sqrt{\varepsilon}) \leqslant 2p\varphi_i(\sqrt{\varepsilon}).$$

Итак,

$$I_{3i} \leqslant a^*(\varepsilon,p) + 2p\varphi_i(\sqrt{\varepsilon}) \equiv a(\varepsilon,p). \tag{17}$$

Учитывая (10), (11), (13) и (17), из (12) находим

$$|u_i(x,t)-v_i(x,t)| \leqslant |z_{1i}(x,t)-z_{2i}(x,t)| +$$

$$+\varepsilon M \int_{\chi_i(x,t,\varepsilon)}^{t} \sum_{j=1}^{m} |u_j(x_i,\tau)-v_j(x_i,\tau)|\, d\tau + a(\varepsilon,p). \tag{18}$$

Рассмотрим функцию $U(t) = \max_{j;x;\tau\leqslant t} |u_j(x,\tau)-v_j(x,\tau)|$. Пусть $(x,t)\in \in \Pi_{gi}\cap\Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда $\chi_i(x,t,\varepsilon)=0$ и (18) можно представить в виде

$$|u_i(x,t)-v_i(x,t)| \leqslant a(\varepsilon,p) + \varepsilon Mm\int_0^t \max_{j;x;\tau\leqslant t} |u_j(x,\tau)-v_j(x,\tau)\, d\tau.$$

Используя в последнем неравенстве функцию $U(t)$ и лемму Гронуолла—Беллмана, получаем $U(t)\leqslant \max_j a_j(\varepsilon,p)\exp\{\sqrt{\varepsilon}\, mML\}$.

Пусть $(x,t)\in\Pi_{0i}\cap\Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда, учитывая условие 5 теоремы, из (18) имеем

$$|u_i(x,t)-v_i(x,t)| \leqslant a(\varepsilon,p) + \varepsilon Mm\int_0^t \max_{j;u;\tau\leqslant t} |u_j(x,\tau)-v_j(x,\tau)|\, d\tau +$$

$$+\varepsilon M_1 k \max_{j;x;\tau\leqslant t} |u_j(x,\tau)-v_j(x,\tau)|.$$

Отсюда на основании леммы Гронуолла—Беллмана и функции $U(t)$ находим

$$U(t)\leqslant \max_j a_j(\varepsilon,p)(1-\varepsilon M_1 k)^{-1}\exp\{\sqrt{\varepsilon}\, mML\}.$$

Аналогично для $(x,t)\in\Pi_{li}\cap\Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}$ получаем

$$U(t)\leqslant \max_j a_j(\varepsilon,p)(1-\varepsilon M_1(m-k))^{-1}\exp\{\sqrt{\varepsilon}\, mML\}.$$

Таким образом,

$$U(t) \leqslant \begin{cases} \max\limits_j a_j(\varepsilon, p) \exp\{\sqrt{\varepsilon}\, mML\}, & (x, t) \in \Pi_{gi} \cap \Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}, \\ \max\limits_j a_j(\varepsilon, p)(1-\varepsilon k M_1)^{-1} \exp\{\sqrt{\varepsilon}\, mML\}, & (x, t) \in \Pi_{0i} \cap \Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}, \\ \max\limits_j a_j(\varepsilon, p)(1-\varepsilon (m-k) M_1)^{-1} \exp\{\sqrt{\varepsilon}\, mML\}, & (x, t) \in \Pi_{li} \cap \Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}}. \end{cases}$$

Отсюда, полагая $\max\limits_j a_j(\varepsilon, p) < \tilde{M} \min(\rho, \eta)$, где $\tilde{M} = \max\{(1-\varepsilon k M_1) \times \times \exp\{-\sqrt{\varepsilon}\, mML\}, (1-\varepsilon(m-k)M_1)\exp\{-\sqrt{\varepsilon}\, mML\}\}$, при $\varepsilon < \varepsilon_0$ получаем $|u_i(x, t) - v_i(x, t)| < \eta \quad \forall (x, t) \in \Pi^+_{\sqrt{\varepsilon}};\ i = 1, 2, \ldots, m$, т. е. справедливо утверждение теоремы.

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О методах усреднения гиперболических систем с быстрыми и медленными переменными. Смешанная задача // Укр. мат. журн.— 1979.— 31, № 4.— С. 398—406.
2. *Плотников В. А., Яровой А. Т.* Обоснование одной схемы усреднения для систем стандартного вида на конечном промежутке // Там же.— 1979.— 31, № 2.— С. 166—170.
3. *Гром'як М. І.* Обгрунтування однієї схеми усереднення для гіперболічних систем першого порядку // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1984.— № 6.— С. 5—7.
4. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Мат. сб.— 1960.— 50, № 4.— С. 423—442.
5. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1964.— 272 с.
6. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.— М.: Изд-во иностр. лит., 1954.— 216 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 03.12.85