УДК 517.5

П. М. Тамразов

Квазисубгармонические функции и стирание особенностей

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$. Если множество E нулевой емкости содержится в открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и замкнуто в нем, а функция u субгармонична и ограничена сверху в $D \setminus E$, то u продолжается (притом единственным образом) до функции, субгармонической в D. Этот классический результат, имеющий многочисленные применения и принадлежащий М. Брело [1, с. 41—44, 62], также несколько обобщен в том смысле, что условие замкнутости E в D заменено близким к нему требованием, чтобы E содержалось в счетном объединении компактов нулевой емкости (см. [2, с. 255, 230]).

В настоящей работе полностью сняты условие замкнутости E в D и условие, что множества нулевой емкости, в счетном объединении которых содержится E, являются компактами. Случай $n = 2$ изучен в [3].

Имеется в виду, что емкости, внутренние и внешние емкости множеств $E \subset \mathbb{R}^n$, а также потенциалы борелевских (положительных) мер в $\mathbb{R}^n$ соответствуют классическому ядру

$$k_n(t) = \begin{cases} -\log t & \text{при } n = 2, \\ t^{2-n} & \text{при } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Пусть $\overline{\mathbb{R}}^n$ — одноточечное замыкание $\mathbb{R}^n$, а ∞ — присоединенная («бесконечно удаленная») точка. Обозначим через $\mathfrak{N}^n$ класс всех множеств $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, для которых $E \cap \mathbb{R}^n$ имеет нулевую (внешнюю) емкость, а через $\mathfrak{N}^n_*$ — класс всех множеств $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, для которых $E \cap \mathbb{R}^n$ имеет нулевую внутреннюю емкость.

Пусть $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Для точки $b \in \mathbb{R}^n$ и числа $r > 0$ через $S(b, r)$ обозначим сферу $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - b| = r\}$; через $\sigma_{b,r}$ — единичную меру, распределенную равномерно на $S(b, r)$. Для функции u со значениями в $[-\infty, +\infty]$, заданной $\sigma_{b,r}$-почти всюду на $S(b, r)$ и измеримой там относительно $\sigma_{b,r}$, рассмотрим среднее

$$m(u, b, r) = \int\limits_{S(b,r)} u(x)\, \sigma_{b,r}(dx),$$

если последний интеграл определен как конечное число или одно из несобственных чисел $-\infty$, $+\infty$.

Обозначим через $\mathfrak{B}^n$ класс всех множеств $B \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, для каждого из которых при всяком $b \in \mathbb{R}^n$ сфера $S(b, r)$ пересекается с B по множеству $B_{b,r}$ со значением $\sigma_{b,r}(B_{b,r}) = 1$ в следующих случаях: если $b \in B$, то при всех достаточно малых (в зависимости от b) значениях $r > 0$, а если $\infty \in B$, то при всех достаточно больших (в зависимости от b) значениях $r > 0$.

Заметим, что если $D \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ — открытое множество и $E \in \mathfrak{N}^n$, то $D \setminus E \in \mathfrak{B}^n$

Условимся говорить, что заданная на множестве $B \in \mathfrak{B}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$, функция $u : B \to [-\infty, +\infty]$ *квазисубгармонична на* B, если выполнены следующие условия: 1) функция u полунепрерывна сверху на B; 2) $u(a) < +\infty$ $\forall a \in B$; 3) при всяком $a \in B$ и всех достаточно малых (в зависимости от a) значениях $r > 0$ верно $u(a) \leqslant m(u, a, r)$.

Заметим, что существование приведенных выше интегралов при нужных r обеспечено указанными требованиями к B и u. Относительно полунепрерывности сверху см., например, [2, с. 20—21].

В случае $n = 2$ определение квазисубгармонической функции дано в [3], где, однако, использован другой термин.

Если множество $B \subset \mathbb{R}^n$ открыто, то квазисубгармоническая на нем функция называется *субгармонической в* B (это определение совпадает с обычным определением субгармоничности (в широком смысле)).

В некоторых отношениях более предпочтительна иная система аксиом, которая позволяет охватить также случай, когда $\infty \in D$, и получить для него содержательные результаты о продолжении функций (о «стирании особенностей»).

Для множества $B \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, заданной на нем функции $v : B \to [-\infty, +\infty]$ и точки a, предельной для B, введем величину $\overline{v}_B(a) = \varlimsup\limits_{x \to a,\, x \in B \setminus \{a\}} v(x)$.

Функцию v назовем *непрерывной сверху в точке* $a \in B$, если $v(a) = \overline{v}_B(a)$, и *непрерывной сверху на* B, если она непрерывна сверху во всех точках $a \in B$. Заметим, что непрерывность сверху отличается от полунепрерывности сверху.

Рассмотрим неравенства

$$\overline{v}_B(a) < +\infty, \tag{1}$$

$$\overline{v}_B(a) \leqslant m(v, b, r), \tag{2}$$

подразумевая, что входящие в них величины имеют смысл.

Пусть на множестве $B \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ задана функция $u : B \to [-\infty, +\infty)$. Условимся говорить, что в точке $a \in \overline{\mathbb{R}}^n$, предельной для B, функция u

удовлетворяет условию среднего, если $B \cup \{a\} \in \mathfrak{B}^n$ и выполнено следующее требование: при $a \neq \infty$ для функции $v = u$, точки $b = a$ и всех достаточно малых $r > 0$ верно неравенство (2); при $a = \infty$ и $\overline{u}_B(\infty) \neq -\infty$ для каждого $b \in \mathbb{R}^n$, функции $v(x) = [u(x) - \overline{u}_B(\infty)]\,|x - b|^{n-2}$ и всех достаточно больших (в зависимости от b) значений $r > 0$ верно неравенство (2).

Заданную на множестве $B \in \mathfrak{B}^n$ функцию $u : B \to [-\infty, +\infty]$ назовем *квазисубгармонической на* B, если выполнены следующие условия:

SH_1. Функция u непрерывна сверху на B.

SH_2. В каждой точке $a \in B$ соотношение (1) выполнено для функции $v = u$, а если $a = \infty$ и $\overline{u}_B(\infty) \neq -\infty$, то и для функции $v(x) = [u(x) - \overline{u}_B(\infty)]\,|x|^{n-2}$.

SH_3. Функция u удовлетворяет условию среднего в каждой точке $a \in B$.

Если множество $B \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ открыто, то квазисубгармоническая на нем функция называется *субгармонической в* B.

При $B \subset \mathbb{R}^n$ эти определения квазисубгармоничности и субгармоничности равносильны определениям через условия 1—3.

Если функция u квазисубгармонична в открытом множестве $D \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, то в D локально ограничена сверху функция u, а при $\infty \in D$ и $\overline{u}_D(\infty) \neq -\infty$ — также и функция $[u(x) - \overline{u}_D(\infty)]\,(1 + |x|^{n-2})$.

В данной работе устанавливаются три теоремы о стирании особенностей, излагаемые в порядке нарастающей общности, а также одна обратная теорема и критерий стираемости (следствие).

Пусть задано множество $G \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, а $\overline{G}$ — его замыкание в $\overline{\mathbb{R}}^n$. Условимся говорить, что заданная в G функция $v : G \to [-\infty, +\infty)$ *вблизи точки* $b \in \overline{G}$ *ограничена сверху величиной* z, если существуют некоторая окрестность M точки b и функция $z : M \cap G \to [-\infty, +\infty)$ такие, что $v(x) \leqslant z(x)$ на $M \cap G$. Если здесь $z \equiv \mathrm{const}$, то будем говорить, что v *ограничена сверху вблизи точки* $b \in \overline{G}$.

Теорема 1. *Пусть $E \in \mathfrak{N}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $u : D \setminus E \to [-\infty, +\infty)$ — квазисубгармоническая функция, ограниченная сверху вблизи каждой точки D. Тогда u продолжается до субгармонической в D функции w, причем это продолжение единственно и удовлетворяет соотношениям*

$$w(a) = \overline{u}_{D \setminus E}(a) \qquad \forall a \in D, \tag{3}$$

$$w(a) = \lim_{r \to 0} m(u, a, r) \qquad \forall a \in D.$$

М. Брело [1, с. 44] установил, что если множество E содержится и замкнуто в открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и полярно в смысле [1, с. 41], то для него справедливо утверждение теоремы 1. С учетом теоремы А. Картана о соотношении между классом полярных множеств и классом множеств нулевой емкости (см. [1, с. 62]) это равносильно более раннему результату М. Брело о том, что для множеств нулевой емкости, содержащихся и замкнутых в открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, справедливо утверждение теоремы 1. Последний результат был также установлен для случая, когда условие замкнутости E в D заменено требованием, чтобы E содержалось в счетном объединении компактов нулевой емкости (см. [2, с. 255, 230]).

Функция, квазисубгармоническая в открытом множестве, содержащем точку $x = \infty$, может нарушать принцип максимума. Однако введение квазисубгармоничности в точке $x = \infty$, благодаря излагаемым ниже результатам о квазисубгармоническом продолжении функции в эту точку, доставляет в окрестности $x = \infty$ содержательные оценки и предельные соотношения для соответствующих специальных средних.

Следующее утверждение непосредственно обобщает теорему 1 на случай множеств, содержащих точку $x = \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $E \in \mathfrak{N}^n$, $D \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ — *открытое множество*, $\infty \in D$, $u: D \setminus E \to [-\infty, +\infty)$ — *квазисубгармоническая функция, ограниченная сверху вблизи каждой точки* $a \in D$, *а если* $\overline{u}_{D \setminus E}(\infty) \neq -\infty$, *то функция* $[u(x) - \overline{u}_{D \setminus E}(\infty)] |x|^{n-2}$ *ограничена сверху вблизи точки* $a = \infty$. *Тогда* u *продолжается до квазисубгармонической в* D *функции* w, *причем это продолжение единственно и удовлетворяет соотношениям* (3) *и*

$$w(a) = \lim_{r \to 0} m(u, a, r) \quad \forall a \in D \cap \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

а если $\overline{u}_{D \setminus E}(\infty) \neq -\infty$, *то*

$$\varlimsup_{x \to \infty, x \in D} [w(x) - \overline{w}_D(\infty)] |x|^{n-2} = \lim_{r \to +\infty} m(u - \overline{u}_{D \setminus E}(\infty), b, r) r^{n-2} \tag{5}$$

$$\forall b \in \mathbb{R}^n.$$

Требование об ограниченности сверху функции u вблизи каждой точки D в условиях теорем 1, 2 можно ослабить в конечном или счетном множестве отмеченных точек $b \in D \cap \mathbb{R}^n$, заменив его предположением, что вблизи каждой отмеченной точки b функция u ограничена сверху величиной $o(k_n(|x - b|))$, $x \to b$. Аналогичным образом можно ослабить также соответствующее условие теоремы 2, относящееся к точке $a = \infty$, — полностью снять наложенное при $\overline{u}_{D \setminus E}(\infty) \neq -\infty$ условие об ограниченности сверху вблизи этой точки функции $[u(x) - \overline{u}_{D \setminus E}(\infty)] |x|^{n-2}$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $D \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ — *открытое множество*, $E \in \mathfrak{N}^n$, F — *не более чем счетное множество*, $F \subset E \cap D \cap \mathbb{R}^n$, $u: D \setminus E \to [-\infty, +\infty)$ — *квазисубгармоническая функция, которая вблизи каждой точки* $b \in F$ *ограничена сверху величиной* $o(k_n(|x - b|))$, $x \to b$, *а вблизи каждой точки* $b \in D \setminus F$ — *конечной постоянной (зависящей от* b). *Тогда* u *продолжается до квазисубгармонической в* D *функции* w, *причем это продолжение единственно и удовлетворяет соотношениям* (3), (4), *а если* $\infty \in D$ *и* $\overline{u}_{D \setminus E}(\infty) \neq -\infty$, *то и соотношению* (5).

Теоремы 1 и 2 содержатся в теореме 3.

С помощью некоторой модификации конструкций и рассуждений из [4, с. 223—225] устанавливается следующее утверждение, используемое в доказательстве теоремы 3.

Лемма. *Пусть* M — *открытое множество в* $\mathbb{R}^n$, Q — *непустое множество типа* G_δ *и нулевой емкости, содержащееся в* M, T — *не более чем счетное подмножество* Q. *Тогда существует борелевская мера* ν, *сосредоточенная в* M, *имеющая массу* $\nu(b) > 0$ *в каждой точке* $b \in T$ *и такая, что ее потенциал* $U^\nu(x) = \int k_n(|y - x|) \nu(dy)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *обращается в* $+\infty$ *во всех точках множества* Q *и только в них.*

Доказательство теоремы 3. Так как множество $E \cap D$ не имеет внутренних точек, то формула (3) определяет функцию w на всем множестве D. Эта функция совпадает с u на $D \setminus E$ и удовлетворяет условию SH_1 в D, условию SH_2 в $D \setminus F$, а также условию среднего в каждой точке $a \in D \setminus E$.

Фиксируем произвольный открытый шар M диаметра $d \leq 1/2$, для которого $\overline{M} \subset D$ и $E \cap M \neq \varnothing$. Можно указать последовательность $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограниченных открытых множеств Q_k, для которых $E \subset Q_{k+1} \subset Q_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ и емкость Q_k стремится к нулю при $k \to \infty$. Так как множества $Q_k \cap M$ обладают аналогичными свойствами, то без ограничения общности будем считать, что $Q_k \subset M$ при всех k. Обозначим $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k = Q$. Очевидно, Q — множество типа G_δ и нулевой емкости, причем $E \subset Q \subset M$.

Поэтому $M \setminus Q \in \mathfrak{B}^n$, $M \setminus E \in \mathfrak{B}^n$. Сужение функции w на M обозначим через z. Функция z удовлетворяет условию SH_1 в M, условию SH_2 на $M \setminus F$ и условию среднего в каждой точке $a \in M \setminus E$.

В силу леммы существует мера ν, сосредоточенная в M, имеющая положительную массу в каждой точке $F \cap M$ и такая, что потенциал U^ν равен $+\infty$ на Q, конечен на $\mathbb{R}^n \setminus Q$ и положителен в M.

Для любой сферы $S(a, r)$, содержащейся в M, существуют средние $m(u, a, r)$ и $m(z, a, r)$, равные между собой.

Пусть $\varepsilon > 0$. Функция $z - \varepsilon U^\nu$ удовлетворяет в M условиям SH_1, SH_2. Из свойств z следует, что функция $z - \varepsilon U^\nu$ в каждой точке $a \in M \setminus E$ удовлетворяет условию среднего. Если же $a \in Q$, то из определения ν следуют соотношения $z(a) - \varepsilon U^\nu(a) = -\infty \leqslant m(z - \varepsilon U^\nu, a, r)$ при всех достаточно малых $r > 0$. Значит, функция $z - \varepsilon U^\nu$ удовлетворяет также условию SH_3 в M и потому субгармонична в этом шаре.

Пусть B — открытый шар радиуса $r > 0$ с центром x_0, компактный в M, в окрестности каждой граничной точки которого функция z ограничена сверху (при каждом $x_0 \in M$ существуют сколь угодно малые $r > 0$, для которых это условие выполнено). Пусть функция v непрерывна на $\overline{B}$, гармонична в B и $z(x) \leqslant v(x)$ на ∂B. Тогда при $\varepsilon > 0$ функция $h_\varepsilon = z - \varepsilon U^\nu - v$ субгармонична в B. Так как $U^\nu(x) > 0$ в M, то на ∂B имеем $h_\varepsilon(x) \leqslant z(x) - v(x) \leqslant 0$. Значит, $h_\varepsilon(x) \leqslant 0$ в B. Используя конечность U^ν вне Q, для $x \in B \setminus Q$ при $\varepsilon \to 0$ получаем $z(x) - v(x) \leqslant 0$. Отсюда и из свойства среднего для z на множестве $B \setminus E$ следует, что при каждом $x \in B \setminus E$ верно $z(x) - v(x) \leqslant \varliminf_{t \to 0} m(u - v, x, t) \leqslant 0$. Значит, $z(x) \leqslant v(x)$ в $B \setminus E$. Согласно (3) это неравенство верно и на $B \cap E$. Итак, $z(x) \leqslant v(x)$ в B, и потому z удовлетворяет условию SH_2 в B. Из справедливости условий SH_1, SH_2 на $M \setminus F$ для функции z следует, что ее сужение на ∂B представимо в виде предела убывающей последовательности $\{z_p\}_{p=1}^\infty$ непрерывных функций z_p. Если v_p — решение задачи Дирихле для z_p в B, то в соответствии с только что доказанным имеем $z(x_0) \leqslant v_p(x_0) = m(v_p, x_0, r)$. Отсюда с помощью леммы Фату получаем $z(x_0) \leqslant \lim_{p \to \infty} m(v_p, x_0, r) = m(z, x_0, r)$.

Свобода в задании B показывает, что z удовлетворяет в M условию SH_2. В силу произвола в выборе B и v и справедливости условий SH_1, SH_2 для z на основании известного характеристического свойства субгармонических функций [2, с. 70] убеждаемся, что функция z субгармонична в M.

С учетом произвола в выборе M функция w субгармонична в $D \cap \mathbb{R}^n$.

Пусть теперь $\infty \in D$ и $\overline{w}_D(\infty) \neq -\infty$. Тогда при каждом фиксированном $b \in \mathbb{R}^n$ можно рассмотреть инверсию $\mu_b : y \mapsto x$ пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$ относительно сферы $S(b, 1)$ [2, с. 205—206]. Согласно известному свойству инверсии, функция $[w(\mu_b(y)) - \overline{w}_D(\infty)] \, |\mu_b(y) - b|^{n-2}$ от y субгармонична в некоторой окрестности b, за исключением самой точки b. А поскольку эта функция вблизи b ограничена сверху величиной $o(k_n(|y - b|))$, $y \to b$, то в соответствии с доказанной справедливостью утверждения теоремы 3 в конечных точках эта функция субгармонически продолжается в точку b и потому в ней удовлетворяет условию среднего. Отсюда следует, что функция w удовлетворяет условию среднего в точке $a = \infty$, а потому квазисубгармонична в D.

Пусть теперь q — любая другая квазисубгармоническая в D функция, совпадающая с u на $D \setminus E$. Тогда в каждой точке $a \in D \cap \mathbb{R}^n$ из условий SH_1, SH_3 вытекает $q(a) = \lim_{r \to 0} m(q, a, r)$. Следовательно,

$$q(a) = \lim_{r \to 0} m(u, a, r), \tag{6}$$

и потому на $E \cap D$ продолженная функция определяется лишь значениями функции u на $D \setminus E$. Значит, это продолжение единственно и потому из (6) следует (4).

Формула (5) следует из условия SH_3 для точки $a = \infty$ (если $\infty \in D$ и $\overline{u}_{D \setminus E}(\infty) \neq -\infty$). Теорема 3 доказана.

Отметим, что в условии теоремы 3 $o(\cdot)$ нельзя заменить на $O(\cdot)$ ни в одной точке $b \in F$ (контрпример: $u(x) = k_n(|x - b|)$).

Напомним, что ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по емкости*, если его внешняя и внутренняя емкости равны. Произвольное множество $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ называется *измеримым по емкости*, если этим свойством обладает всякая его ограниченная порция. Борелевские множества измеримы по емкости.

Установим следующее утверждение, обратное к теоремам 1—3.

Теорема 4. *Пусть $D \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ — открытое множество, $E \subset D$, $D \setminus E \in \mathfrak{B}^n$. Если всякая ограниченная сверху квазисубгармоническая на $D \setminus E$ функция продолжается до квазисубгармонической в $D \cap \mathbb{R}^n$ функции, то $E \in \mathfrak{N}^n_*$ (а если к тому же E измеримо по емкости, то $E \in \mathfrak{N}^n$).*

Доказательство. Предположим, что при условиях теоремы верно $E \notin \mathfrak{N}^n_*$. Тогда существует компакт $K \subset E \cap D$ положительной емкости. Его равновесный потенциал [2, с. 227] не постоянен, ограничен сверху, супергармоничен и конечен в $\mathbb{R}^n$, достигает там максимума и гармоничен в $\mathbb{R}^n \setminus K$. На основании теоремы 3 этот потенциал квазисубгармоничен в $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus K$ и тем более на $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus E$. Но он не может быть квазисубгармоничным в $D \cap \mathbb{R}^n$, ибо в противном случае он был бы гармоничным в $\mathbb{R}^n$ и мы пришли бы к противоречию с принципом максимума.

Итак, предположение $E \notin \mathfrak{N}^n_*$ приводит к существованию ограниченной сверху квазисубгармонической на $D \setminus E$ функции, которая не продолжается до квазисубгармонической в $D \cap \mathbb{R}^n$ функции. Тем самым теорема 4 доказана.

Заметим, что в [2, с. 256—257] приведено доказательство частного случая утверждения теоремы 4 для замкнутого в D множества E при $D \subset \mathbb{R}^n$.

Следствие. *Пусть множество $D \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ открыто, а множество $E \subset D$ измеримо по емкости. Тогда равносильны следующие утверждения:*

а) *E имеет емкость нуль;*

б) *$D \setminus E \in \mathfrak{B}^n$ и всякая ограниченная сверху квазисубгармоническая на $D \setminus E$ функция продолжается до субгармонической в $D \cap \mathbb{R}^n$ функции;*

в) *$D \setminus E \in \mathfrak{B}^n$ и всякая ограниченная сверху квазисубгармоническая на $D \setminus E$ функция продолжается до квазисубгармонической в D функции.*

1. *Брело М.* Основы классической теории потенциала.— М.: Мир, 1964.— 213 с.
2. *Хейман У., Кенневи П.* Субгармонические функции.— М.: Мир, 1980.— 304 с.
3. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные задачи для голоморфных функций и отображений.— Киев, 1983.— 50 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 83.65).
4. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М.: Наука, 1966.— 516 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 21.01.86