УДК 512.643.2

В. В. Любашенко

Березиниан в некоторых моноидальных категориях

В [1—3] описаны суперслед и березиниан в категории $\mathbb{Z}/2$-градуированных пространств, построен интеграл на супермногообразиях. В настоящей работе эти конструкции обобщаются на некоторые моноидальные категории, рассмотренные в [4].

1. Пусть H — алгебра Хопфа над $\mathbb{C}$ с биективным антиподом γ, $\rho: H\otimes H\to\mathbb{C}$ — билинейная невырожденная форма на H. В категории правых H-комодулей comod — H определим оператор $S: M\otimes N\to N\otimes M$ для всех $M, N\in$ comod — H, действующий по формуле

$$S(m\otimes n)=n_{(0)}\otimes m_{(0)}\rho(m_{(1)}\otimes n_{(1)}). \tag{1}$$

Здесь $m_{(0)}\otimes m_{(1)}\in M\otimes H(h_{(1)}\otimes h_{(2)}\in H\otimes H)$ обозначает коумножение на элементе $m\in M\in$ comod — H (соответственно $h\in H$) [5].

Определение 1. *Категория* $\mathscr{C}=$ comod — H *называется вектор-симметрией, если оператор* S, *заданный формулой* (1), *является морфизмом комодулей, причем* $S^2=1$ *и выполнено условие*

$$\rho(hf\otimes g)=\rho(h\otimes g_{(1)})\,\rho(f\otimes g_{(2)}) \tag{2}$$

для $f, g, h\in H$. *Оператор* S *называется симметрией.*

Из определения вытекает, что вектор-симметрия является симметричной моноидальной замкнутой категорией [6]. Согласно [4], по постоянному унитарному решению уравнения треугольников $R\in\operatorname{End}V\otimes V$ строится категория $\mathscr{C}$, порожденная тензорными степенями V, их суммами и их подфакторами. Если полученная симметричная категория $\mathscr{C}$ замкнута, то она эквивалентна вектор-симметрии comod — H для некоторой алгебры Хопфа H и формы ρ.

В [4] показано, что форма ρ удовлетворяет следующим тождествам:

$$\rho(g_{(1)}\otimes h_{(1)})\rho(h_{(2)}\otimes g_{(2)})=\varepsilon(g)\,\varepsilon(h), \tag{3}$$

$$g_{(1)}h_{(1)}\rho(h_{(2)}\otimes g_{(2)})=\rho(h_{(1)}\otimes g_{(1)})\,h_{(2)}g_{(2)}, \tag{4}$$

$$\rho(g\otimes h)=\rho(\gamma h\otimes g). \tag{5}$$

Рассмотрим ρ как элемент алгебры $(H\otimes H)^*$. Согласно свойствам (2), (4), ρ является решением уравнения треугольников $\rho^{12}\rho^{13}\rho^{23}=\rho^{23}\rho^{13}\rho^{12}\in(H\otimes H\otimes\otimes H)^*$, а (3) означает унитарность этого решения. Оператор S совпадает с композицией операторов $M\otimes N\xrightarrow{\rho}M\otimes N\xrightarrow{\mathring{S}}N\otimes M$, $\mathring{S}(m\otimes n)=n\otimes m$.

Если $H=\mathbb{C}G$ — групповая алгебра абелевой группы G, то $\mathscr{C}$ — категория G-градуированных векторных пространств. Форма ρ определяется невырожденным бихарактером [7] $f:\Lambda^2_{\mathbb{Z}}G\mapsto\mathbb{C}_m$ со значениями в группе чисел по умножению $\rho(g\otimes h)=f(g\wedge h)$, $g, h\in G$.

Четностью на $\mathscr{C}$ назовем отображение $r=r_M\in\operatorname{End}_{\mathbb{C}}M$, заданное для каждого $M\in\mathscr{C}$ формулой $r(m)=m_{(0)}\rho(\gamma^2(m_{(1)})\otimes m_{(2)})$. Для любых $m\in M$, $n\in N$ справедливо равенство $r(m\otimes n)=r(m)\otimes r(n)$ и отображение $r_H: H\to\to H$ является автоморфизмом алгебры H.

Пример 1. На алгебре $H=\mathbb{C}[x, y]$ определим форму ρ соотношениями (2), (5) и равенствами $\rho(x\otimes x)=\rho(y\otimes y)=0$, $\rho(x\otimes y)=-\rho(y\otimes\otimes x)=1$. Оператор четности $r=\mathrm{id}$.

Пример 2. Категория $\mathbb{Z}/2$-градуированных комплексов $M_0\overset{d}{\underset{d}{\rightleftarrows}}M_1$, $d^2=0$ с симметрией $S(a\otimes b)=(-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}b\otimes a+(-1)^{(\tilde{a}+1)\tilde{b}}db\otimes da$ является вектор-симметрией. Соответствующая алгебра Хопфа $H=\mathbb{C}\langle\tau,\pi\rangle$ порождена элементами τ,π с соотношениями $\tau^2=1$, $\tau\pi+\pi\tau=0$, $\pi^2=0$ и коумножением $\Delta\tau=\tau\otimes\tau$, $\Delta\pi=1\otimes\pi+\pi\otimes\tau$, $\varepsilon(\tau)=1$, $\varepsilon(\pi)=0$. Форма ρ на

H определяется условием ортогональности подпространств $\langle 1;\ \tau\rangle$ и $\langle \pi;\ \tau\pi\rangle$ относительно ρ и равенствами

$$\rho(1\otimes 1)=\rho(1\otimes\tau)=\rho(\tau\otimes 1)=-\rho(\tau\otimes\tau)=1,\quad \rho(\pi\otimes\pi)=\rho(\tau\pi\otimes\pi)= \\ =\rho(\tau\pi\otimes\tau\pi)=-\rho(\pi\otimes\tau\pi)=1.$$

Оператор четности связан с градуировкой $r|_{M_0}=1_{M_0},\ r|_{M_1}=-1_{M_1}$.

Будем предполагать в данной работе, что $\gamma^2=1_H$. При этом r является морфизмом $\mathscr{C}$ и $r_L=+1_L$ или -1_L для всякого простого комодуля $L\in\mathrm{comod}-H$. Отсюда следует, что всякий комодуль M разлагается в прямую сумму подкомодулей $M=M_0\oplus M_1$ — корневых подпространств, отвечающих собственным значениям $+1$ и -1 оператора четности r_M. Элементы подпространства M_0 назовем четными, элементы подпространства M_1 — нечетными.

Обозначим через $M^{\mathbb{C}}=\mathscr{C}(\mathbb{C},M)\subset M$ подпространство инвариантов.

2. Фиксируем вектор-симметрию $\mathscr{C}$. Алгебра категории $\mathscr{C}$ — это ассоциативная алгебра $A\in\mathscr{C}$ такая, что умножение $\mu: A\otimes A\to A$ является морфизмом $\mathscr{C}$. Действие $M\otimes A\to M$ алгебры A в модуле $M\in\mathscr{C}$ также должно быть морфизмом $\mathscr{C}$. Свойства алгебр и модулей в моноидальной категории приведены в [6].

Предположим, что алгебра $A\in\mathscr{C}$ коммутативна, т. е. $\mu(a\otimes b)=\mu\circ S(a\otimes\otimes b)$, $a,b\in A$. Рассмотрим полную подкатегорию $\mathring{\mathscr{C}}\subset\mathscr{C}$, состоящую из конечномерных пространств. Определим полную подкатегорию $A\otimes\mathring{\mathscr{C}}$ категории A-модулей ${}_A\mathscr{C}$

$$\mathrm{Ob}A\otimes\mathring{\mathscr{C}}=\{M\in{}_A\mathscr{C}\mid M\simeq A\otimes V,\ V\in\mathring{\mathscr{C}}\}.$$

Структура A-бимодуля на $A\otimes V\xrightarrow[\sim]{S}V\otimes A$ вводится посредством

$$a.(b\otimes v)=ab\otimes v,\quad (b\otimes v).a=b\tilde{a}\otimes\tilde{v},\quad c.(v\otimes b)=\tilde{v}\otimes\tilde{c}b,\quad (v\otimes b).c=v\otimes bc,$$

где $a,\ b,\ c\in A,\ v\in V$, тильда означает применение оператора S, т. е. $\tilde{a}\otimes\tilde{v}=S(v\otimes a)$, $\tilde{v}\otimes\tilde{c}=S(c\otimes v)$. Объекты $A\otimes\mathring{\mathscr{C}}$ назовем свободными A-модулями. Категория свободных A-модулей замкнута. В частности, имеется объект гомоморфизмов $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N)\in A\otimes\mathring{\mathscr{C}}$, сопряженный с $\otimes_A$ посредством ${}_A\mathscr{C}(L\otimes_A M,N)\simeq{}_A\mathscr{C}(L,\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N))$. Будем различать A-гомоморфизмы, действующие слева, $f\in\underline{\mathrm{Hom}}^l_A(M,N)=N\otimes_A M^*$, и справа, $f\in\underline{\mathrm{Hom}}^r_A(M,N)={}^*M\otimes_A N$. Левый и правый двойственные модули M^* и ${}^*M$ со спариваниями $p: M^*\otimes_A M\to A$ и $p: M\otimes_A^* M\to A$ канонически изоморфны.

Каждому модулю $M\in{}_A\mathscr{C}$ соответствует его тензорная алгебра $T^{\cdot}_A(M)$, симметрическая алгебра $S^{\cdot}_A(M)=T^{\cdot}_A(M)/(m\otimes n-S(m\otimes n))$, внешняя алгебра $\Lambda^{\cdot}_A(M)=T^{\cdot}_A(M)/(m\otimes n+S(m\otimes n))$.

Будем рассматривать такие базисы (m_i) свободного A-модуля M, что $\mathbb{C}$-линейная оболочка базисных векторов $\langle m_i\rangle\subset M$ является $\mathscr{C}$-подобъектом в M.

Правый (левый) гомоморфизм
$f\in\underline{\mathrm{Hom}}^r_A(A\otimes V,A\otimes W)\simeq{}^*V\otimes A\otimes W$ ($f\in\underline{\mathrm{Hom}}^l_A(V\otimes A,W\otimes A)\simeq W\otimes\otimes A\otimes V^*$) можно записать матрицей (a_i^j) (или (a_j^i))

$$f={}^*v^i\otimes a_i^j\otimes w_j\quad (f=w_i\otimes a^i_j\otimes v^{j*})$$

в базисе $(w_j)\subset W$ и в базисах $({}^*v^i)\subset{}^*V$, $(v^{j*})\subset V^*$, двойственных базису $(v_i)\subset V$.

Определение 2. *Пусть M является свободным A-модулем, $M\simeq\simeq V\otimes A$. След на M — это морфизм* $\mathrm{str}=\mathrm{str}_M:\underline{\mathrm{End}}^l_A M\simeq\underline{\mathrm{End}}^l_A(V\otimes A)\to\to A$, *совпадающий с* $V\otimes(A\otimes V^*)\xrightarrow{S}A\otimes V^*\otimes V\xrightarrow{1\otimes p}A$.

Свойства следа аналогичны свойствам, приведенным в [8]. В частности, для $f \in \underline{\mathrm{Hom}}_A^r(M, N)$, $g \in \underline{\mathrm{Hom}}_A^r(N, M)$ справедливо равенство $\mathrm{str}_M fg = \mathrm{str}_N \tilde{g}\tilde{f}$, где $\tilde{g} \otimes \tilde{f} = S(f \otimes g)$.

В дальнейшем изложении предполагаем, что квадрат оператора четности — тождественное отображение. Пусть $M \simeq A \otimes V$, $V = V_0 \oplus V_1$, $\dim_{\mathbb{C}} V_0 = m$, $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = n$. Пару $m|n$ назовем суперразмерностью модуля M, $\mathrm{sdim}_A M = m|n$. Если $A \otimes V \xrightarrow{\sim} A \otimes W \in {}_A\mathcal{a}$, то $\dim V_0 = \dim W_0$, $\dim V_1 = \dim W_1$, поэтому суперразмерность определена корректно.

Теорема 1. *Пусть M — свободный A-модуль, $\mathrm{sdim}_A M = m|n$. Тогда размерности $\mathrm{sdim}_A S_A^k(M)$, $\mathrm{sdim}_A \Lambda_A^k(M)$ зависят только от $m|n$ и вычисляются по тем же формулам, что и в случае категории $\mathbb{Z}/2$-градуированных векторных пространств.*

3. Определение 3. *Пусть $A \in \mathcal{a}$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, M — свободный A-модуль. Специальным комплексом Кошуля назовем $\mathcal{a}$-комплекс $K_A^{\cdot}(M) = \Lambda_A^{\cdot}(M) \otimes_A S_A(M^*)$. Дифференциал в нем задается левым умножением на элемент $d = 1_M \in \mathrm{End}_A^l M = (M \otimes_A M^*)^{\mathbb{C}}$.*

В базисе (m_i) модуля M $d = m_i \otimes m^{i*}$. Несложно проверить, что $d^2 = 0$. Основываясь на результатах [3], относящихся к $\mathbb{Z}/2$-градуированному случаю, введем следующее определение.

Определение 4. *Когомологии специального комплекса Кошуля назовем березинианом модуля M*

$$\mathrm{Ber}\, M = \mathrm{Ber}_A M = H(K_A^{\cdot}(M)) \in \mathcal{a}.$$

Березинианы в моноидальных категориях рассмотрены А. Л. Розенбергом.

Лемма 1. *Существуют изоморфизмы*

$$\mathrm{Ber}_A(A \otimes V) \simeq A \otimes \mathrm{Ber}_{\mathbb{C}} V, \quad \mathrm{Ber}_A(M \oplus N) \simeq \mathrm{Ber}_A M \otimes_A \mathrm{Ber}_A N.$$

Рассмотрим категорию $\mathrm{Iso}\, A \otimes \mathring{\mathcal{a}}$, состоящую из свободных A-модулей, причем в качестве морфизмов взяты все изоморфизмы $A \otimes \mathring{\mathcal{a}}$. Пусть $f: M \to N \in \mathrm{Iso}\, A \otimes \mathring{\mathcal{a}}$. По морфизму f строим морфизмы $f^{tr}: N^* \to M^*$ и $\varphi = (f^{tr})^{-1}: M^* \to N^*$. Из определений следует, что $f \otimes_A \varphi: M \otimes_A M^* \to N \otimes_A N^*$ отображает $1_M = m_i \otimes m^{i*}$ в $1_N = n_i \otimes n^{i*}$. Следовательно, изоморфизм $\Lambda_A(M) \otimes_A S_A(M^*) \xrightarrow{\Lambda(f) \otimes S(\varphi)} \Lambda_A(N) \otimes_A S_A(N^*)$ переводит d_M в d_N. Полученный изоморфизм комплексов $K_A^{\cdot}(M) \to K_A^{\cdot}(N)$ определяет изоморфизм когомологий $\mathrm{Ber}\, f: \mathrm{Ber}_A M \to \mathrm{Ber}_A N$. Таким образом, Ber является функтором $\mathrm{Ber}: \mathrm{Iso}\, A \otimes \mathring{\mathcal{a}} \to \mathrm{Iso}\, A \otimes \mathring{\mathcal{a}}$, переводящим прямые суммы в тензорные произведения.

Рассмотрим второй дифференциал в комплексе Кошуля $K_A^{\cdot}(M)$

$$\delta: \Lambda^k(M) \otimes S^l(M^*) \to \Lambda^{k-1}(M) \otimes S^{l-1}(M^*),$$

заданный формулой $\delta(a_1 \dots a_k \otimes b^1 \dots b^l) = \sum_{i,j} (-1)^{i-1} a_1 \dots \hat{a}_i \dots \tilde{a}_k \langle \tilde{b}^j, \tilde{a}_i \rangle \otimes \tilde{b}^1 \dots \hat{b}^j \dots b^l$, где $a_i \in M$, $b^j \in M^*$, тильда означает S-перестановки, а члены $\hat{a}_i$, $\hat{b}^j$ исключены из произведения. Квадрат морфизма δ равен нулю.

Лемма 2. *Пусть $\mathrm{sdim}_A M = m|n$. Оператор $L = \delta d + d\delta$ диагонализуем; $\Lambda^k(M) \otimes S^l(M^*)$ является собственным подпространством оператора L с собственным числом $l - k + m - n$.*

Теорема 2. *Пусть $V \in \mathring{\mathcal{a}}$. Разложим $V = V_0 \oplus V_1$ на четную и нечетную компоненты, $\mathrm{sdim}\, V = m|n$. Тогда $\mathrm{Ber}_A V \otimes A \simeq \Lambda_A^m(V_0 \otimes A) \otimes_A S_A^n(A \otimes V_1^*)$ является одномерным свободным модулем.*

Доказательство. Оператор $L = \delta d + d\delta$ коммутирует с d и отображает $\operatorname{Ker} d$ в $\operatorname{Im} d$. Следовательно, L индуцирует нулевое отображение на когомологиях $\operatorname{Ber} M$, где $M = V \otimes A$. По лемме 1 достаточно рассмотреть два случая: M — четен и M — нечетен.

Пусть $\operatorname{sdim}_A M = m \mid 0$. Нулевое собственное число оператора $L\ l - k + m = 0$ может быть получено лишь при $l = 0$, $k = m$. С другой стороны, $\Lambda^m(M)$ определяет нетривиальный класс когомологий. Таким образом, $\operatorname{Ber} M \simeq \Lambda^m(M)$.

Аналогично, для нечетных M получаем изоморфизм $\operatorname{Ber} M \simeq S^n(M^*)$, $\operatorname{sdim} M = 0 \mid n$. Теорема доказана.

Согласно теореме 2, $\operatorname{Ber}_A M$ является обратимым модулем. У него есть базис, состоящий из элемента b, $\operatorname{Ber} M \simeq \mathbb{C}b \otimes A$. Алгебры $\operatorname{End}_A \operatorname{Ber} M$ и $A^{\mathbb{C}}$ изоморфны посредством $\operatorname{End}_A^l \operatorname{Ber} M = (\operatorname{Ber} M \otimes_A (\operatorname{Ber} M)^*)^{\mathbb{C}} \simeq A^{\mathbb{C}}$. Это определяет гомоморфизм групп $\operatorname{Ber}: \operatorname{Aut}_A M \to \operatorname{Aut}_A \operatorname{Ber} M \simeq (A^{\mathbb{C}})_m$, где $(A^{\mathbb{C}})_m$ — группа обратимых элементов коммутативной в обычном смысле алгебры $A^{\mathbb{C}}$. Тем самым автоморфизму f модуля M сопоставляется число $\operatorname{Ber} f \in A^{\mathbb{C}}$.

Допустим, что модуль M — чисто четный или чисто нечетный, $f \in \operatorname{End}_A M$. Определитель f задается формулами

$$\det f = \Lambda^m(f), \quad \operatorname{sdim} M = m \mid 0, \quad \det f = S^n(f^{tr}), \quad \operatorname{sdim} M = 0 \mid n.$$

Березиниан $\operatorname{Ber} f$ совпадает с $\det f$ ($(\det f)^{-1}$) для четных (нечетных) модулей. В общем случае березиниан находится по формуле Березина: если $f = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} \\ f_{10} & f_{11} \end{pmatrix} \in \operatorname{Aut}_A M$, то $\operatorname{Ber} f = \det(f_{00} - f_{01} f_{11}^{-1} f_{10})(\det f_{11})^{-1}$.

Можно так подобрать элементы $(a_i)_{i=1}^m \subset A \otimes V_0 = M_0$, $(b_j^*)_{j=1}^n \subset V_1^* \otimes A = M_1^*$, что класс $a_1 \ldots a_m b_1^* \ldots b_n^* = [a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \otimes b_1^* \ldots b_n^*] \in \operatorname{Ber}_A M$ составит базис $\operatorname{Ber}_A M$. При автоморфизме f модуля M выбранный класс преобразуется посредством $c_1 \ldots c_m d_1^* \ldots d_n^* = a_1 \ldots a_m b_1^* \ldots b_n^* \operatorname{Ber} f$, где $c_i = f(a_i)$, $d_j^* = (f^{tr})^{-1}(b_j^*)$.

Рассмотрим связь следа и березиниана. Пусть $B = A[[t]]$ (t — инвариантная переменная), $M \in A \otimes \mathring{\mathscr{A}}$, $N = B \otimes_A M$. Имеем изоморфизмы $R \equiv \operatorname{End}_B N \simeq \mathbb{C}[[t]] \otimes \operatorname{End}_A M \approx (\operatorname{End}_A M)[[t]]$. Возьмем $G = G(t) \in R$. Задача Коши для $X = X(t) \in R$,

$$\frac{d}{dt} X = GX, \quad X(0) = 1 \tag{6}$$

однозначно разрешима. Аналогично [1], доказывается теорема Лиувилля.

Теорема 3. *Решение задачи Коши (6) удовлетворяет равенству*

$$\operatorname{Ber}(X)(t) = \exp \int_0^t \operatorname{str} G(s)\, ds.$$

Теорема 4. *Пусть M — четный модуль, $f \in \operatorname{End}_A M$. Найдется такой морфизм $\psi \in \operatorname{End}_A M$, что $\psi f = f \psi = \det f$.*

Следствие 1. *Пусть M — свободный A-модуль, $f \in \operatorname{End}_A M$, причем существует $g \in \operatorname{End}_A M$ такой, что $fg = 1_M$. Тогда $gf = 1_M$ и f обратим.*

4. Определение 5. *Суперобластью назовем окольцованное пространство $(U, \mathscr{O}_U)$, где $U \subset \mathbb{R}^m$ является областью, C_U^∞ — пучок гладких функций, $\mathscr{O}_U = S(V) \otimes C_U^\infty$, $S(V)$ — симметрическая алгебра нечетного объекта $V \in \mathscr{A}$. Супермногообразием назовем окольцованное пространство $(X, \mathscr{O}_X)$, где X — обычное гладкое многообразие, $\mathscr{O}_X$ — пучок коммутативных алгебр в $\mathscr{A}$, и $(X, \mathscr{O}_X)$ локально изоморфно суперобласти.*

Векторные поля Vect_X и дифференциальные формы $\Omega^{\cdot}_X$ строятся аналогично [9].

Определение 6. *Плотностью на супермногообразии* $(X, \mathcal{O}_X)$ *назовем сечение пучка* $\mathrm{Ber}_X = \mathrm{Ber}_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$.

Пучок Ber_X является когомологиями комплекса $\Lambda^{\cdot}(\Omega^1_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} S(\mathrm{Vect}_X) \simeq \simeq \Omega^{\cdot}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} S(\mathrm{Vect}_X)$ с дифференциалом d, локально представленным умножением на $d = du_k \otimes \partial/\partial u_k$, где $(u_k) = (x_j; \theta_i)$ — координаты на супермногообразии. Дифференциал не зависит от выбора координатных функций.

Выберем базисные элементы $\theta^*_{a_1}, \ldots, \theta^*_{a_n} \in V^*$, $\theta^*_{a_1} \ldots \theta^*_{a_n} \neq 0$, и зафиксируем индексы a_i. Плотность $dxd\theta^* \equiv dx_1 \ldots dx_m d\theta^*_{a_1} \ldots d\theta^*_{a_n}$ образует базис $\mathrm{Ber}(U)$. При изоморфизмах $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} (Y, \mathcal{O}_Y)$ плотности преобразуются по закону $dyd\xi^* \mapsto dxd\theta^* \,\mathrm{Ber}\, J(x, \theta)$, где $J(x, \theta) = \left(\frac{\partial}{\partial u_k} w_l \right)$ — матрица Якоби, $(w_l) = (y_j; \xi_i)$ — координаты на $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Определение интеграла основывается на спаривании $S^n(V^*) \otimes S^n(V) \to \to \mathbb{C}$, $\langle c^*_n \ldots c^*_1 \mid d_1 \ldots d_n \rangle = \sum\limits_{\sigma} \langle \tilde{c}^*_1, \tilde{d}_{\sigma(1)} \rangle \ldots \langle \tilde{c}^*_n, \tilde{d}_{\sigma(n)} \rangle$. Значение спаривания между $\theta^*_a = \theta^*_{a_1} \ldots \theta^*_{a_n}$ и $\theta_b = \theta_{b_1} \ldots \theta_{b_n}$ равно $\langle \theta^*_a \mid \theta_b \rangle = \frac{\partial}{\partial \theta_{a_1}} \ldots \frac{\partial}{\partial \theta_{a_n}} (\theta_{b_1} \ldots \theta_{b_n})$.

Предположим, что плотность ω, заданная на ориентированной области U,

$$\omega = dxd\theta^* \sum_b \theta_b f^b(x_1, \ldots, x_m), \quad \theta_b = \theta_{b_1} \ldots \theta_{b_k}, \quad k = |b| \leqslant n,$$

имеет компактный носитель. Интеграл ω по суперобласти $(U, \mathcal{O}_U)$ по определению равен $\int \omega = \sum\limits_{|b|=n} \langle \theta^*_a \mid \theta_b \rangle \int\limits_U dx_1 \ldots dx_m f^b(x)$. Здесь можно свести сумму к одному слагаемому, поскольку $\dim_{\mathbb{C}} S^n(V) = 1$.

Теорема 5. *Интеграл не меняется при изоморфизмах суперобластей.*

Доказательство повторяет рассуждения [3], использующие комплекс интегральных форм. Теорема 5 позволяет определить интеграл по супермногообразию с помощью разбиения единицы.

1. *Березин Ф. А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.— 208 с.
2. *Лейтес Д. А.* Теория супермногообразий.— Петрозаводск: Карел. фил. АН СССР, 1983.— 199 с.
3. *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия.— М.: Наука, 1984.— 336 с.
4. *Любашенко В. В.* Алгебры Хопфа и симметрии.— Киев, 1985.— 33 с.— Деп. в Укр. НИИНТИ 18.02.85, № 364Ук-85Деп.
5. *Sweedler M. E.* Hopf algebras.— New York : Benjamin, 1969.— 336 p.
6. *Mac Lane S.* Categories for the Working Mathematician.— New York etc.: Springer, 1971.— 262 p.
7. *Мосолова М. В.* О функциях от некоммутирующих операторов, порождающих градуированную алгебру Ли // Мат. заметки.— 1981.— **29**, № 1.— С. 35—44.
8. *Дольд А.*, *Пуппе Д.* Двойственность, след и трансфер // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1983.— **154**.— С. 81—97.
9. *Kostant B.* Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization // Lect. Notes Math. — 1977.— 570.— P. 177—306.

Киев. политехн. ин-т

Получено 24.07.85,
после доработки — 06.02.86