УДК 519.632

И. П. Гаврилюк

Точные и усеченные любого порядка точности схемы для одного класса одномерных вариационных неравенств

Вариационные неравенства (в. н.) описывают широкий круг практических задач [1, 2]. В работе [1] изложены результаты по численному решению различных классов в. н. Отметим, что в большинстве случаев оценки скорости сходимости разностных схем (р. с.) и схем метода конечных элементов (с. м. к. э.) для в. н. хуже, чем для соответствующих краевых задач при одной и той же гладкости решения. Это проявляется даже в случае одномерных в. н. [3]. Поэтому актуальной является задача более глубокого и всестороннего изучения скорости сходимости р. с. для в. н. Актуальной задачей является также построение р. с. заданного порядка точности, которая в случае в. н. мало изучена.

В настоящей работе рассматривается класс одномерных в. н., для которого можно построить точные р. с., предложенные и изученные в случае краевых задач в работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [4, 5]. На основе точных р. с. строятся усеченные р. с. любого заданного порядка точности, причем скорость их сходимости такая же, как для краевых задач.

1. В гильбертовом пространстве $V = W_2^1(0, 1)$ рассмотрим следующую билинейную непрерывную форму:

$$a(u, v) = \int_0^1 k(x) u'(x) v'(x) dx + \int_0^1 q(x) u(x) v(x) dx,$$

где $0 < c_1 \leqslant k(x) \leqslant c_2$, $q(x) \geqslant 0$ п. в. на $(0, 1)$.

Пусть $K = \{v \mid v \in W_2^1(0, 1),\ v(0),\ v(1) \geqslant 0\}$ — замкнутое выпуклое в V множество.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\inf J(v), \quad v \in K, \tag{1}$$

где

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,\ v)-l(v),\ l(v)=(f,\ v)\equiv\int\limits_0^1 fvdx,\quad f\in L_2(0,\ 1).$$

Как известно [1, с. 16], эта задача эквивалентна следующему вариационному неравенству ($u\in K$):

$$a(u,\ v-u)\geqslant l(v-u)\quad \forall v\in K. \tag{2}$$

При выполнении условия $q(x)\geqslant c_3>0$ или в случае, когда $q(x)\geqslant 0$ и $l(1)<0$, аналогично [1, с. 24] можно показать, что $J(v)\to+\infty$ при $\|v\|\to+\infty$, $v\in K$, т. е. решение задач (1), (2) существует и единственно. Из результатов работ [1, 2] следует, что если $f\in L_2(0,\ 1)$, $k\in W^1_\infty(0,\ 1)$, $q\in L_\infty(0,\ 1)$, то $u\in W^2_2(0,\ 1)$, поэтому решение задач (1), (2) характеризуется также условиями

$$\begin{gathered}\mathcal{L}u\equiv-(ku')'+qu=f(x),\quad x\in(0,\ 1),\quad -u(0)\,u'(0)=u(1)\,u'(1)=0,\\ u(0)\geqslant 0,\quad u(1)\geqslant 0,\quad -u'(0)\geqslant 0,\quad u'(1)\geqslant 0.\end{gathered}\tag{3}$$

Заметим, что решение задачи (3) совпадает с решением одной из четырех краевых задач

$$\begin{gathered}\mathcal{L}u_i=f(x),\quad x\in(0,\ 1),\\ \mathcal{L}_0u_i\equiv 0{,}5\,(1-\operatorname{sign}(i-1{,}5))\,u_i(0)+0{,}5\,(1+\operatorname{sign}(i-1{,}5))u_i'(0)=0,\\ \mathcal{L}_1u_i\equiv 0{,}5\,(1+(-1)^i)u_i(1)+0{,}5\,(1+(-1)^{i+1})\,u_i(1)=0,\quad i=\overline{0,\ 3}.\end{gathered}\tag{3$'$}$$

Теорема 1. *Пусть* $u=u_{i_0}$, $i_0\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}\equiv N_3$ — *решение задачи* (3), *совпадающее с решением одной из задач* (3$'$). *Тогда* $u_i(x)\leqslant u(x)$ $\forall x\in[0,\ 1]$, $i=\overline{0,\ 3}$.

Доказательство. Положим при фиксированном i $w=\sup(u,\ u_i)$, $w^*=\inf(u,\ u_i)$. Функция u_i принадлежит одному из замкнутых выпуклых множеств $K_j^*=\{v\mid v\in W^1_2(0,\ 1),\ \ v(j)=0\}$, $j=0,\ 1$, которое обозначим через K^*. Тогда $(\mathcal{L}u_i,\ v^*)=(f,\ v^*)$ $\forall v^*\in K^*$, или $(\mathcal{L}u_i,\ v^*)=(f,\ v^*-u_i)$ $\forall v^*\in K^*$. Нетрудно проверить, что $w\in K$, $w^*\in K^*$ (это следует, например, из работы [6]). Очевидно также, что $w+w^*=u+u_i$. Если обозначить $\psi=u-u_i$, то $w-u_i=\sup(0,\ \psi)=\psi^+$, $w-u=\sup(0,\ -\psi)\equiv\psi^-$ и, следовательно, $(\mathcal{L}(w-u_i),\ w-u)=(\mathcal{L}\psi^+,\ \psi^-)=0$. Из результатов работы [7, с. 277] следует $w=u$, т. е. $u=\sup(u,\ u_i)$, что и завершает доказательство теоремы 1.

2. В дальнейшем будем предполагать, что

$$k,\ q,\ f\in Q^{(0)}[0,\ 1],\ 0<c_3\leqslant q\leqslant c_4. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение сетки $\omega=\{x_i=ih,\ i=\overline{1,\ N-1},\ h=1/N\}$, $\overline{\omega}=\omega\cup\{0,\ 1\}$ и оператор точной разностной схемы [8]

$$T^x w(\cdot)=h^{-1}v_1^{-1}(x_i)\int\limits_{e^-}v_1(\xi)\,w(\xi)\,d\xi+h^{-1}v_2^{-1}(x_i)\int\limits_{e^+}v_2(\xi)\,w(\xi)\,d\xi,$$

где $e^-\equiv e^-(x_i)=(x_{i-1},\ x_i)$, $e^+\equiv e^+(x_i)=(x_i,\ x_{i+1})$, $e=e^-\cup e^+$, $v_j(x)=v_j^{(i)}(x)$, $x\in e$, $j=1,\ 2,$ — шаблонные функции, являющиеся решениями задач Коши

$$\begin{gathered}\mathcal{L}v_j^{(i)}(x)=0,\quad x\in e;\qquad v_j^{(i)}(x_{ij})=0,\quad k(x_{ij})\,v_j^{(i)'}(x_{ij})=(-1)^{j+1},\\ x_{ij}=[i+(-1)^j]\,h,\quad j=1,\ 2,\quad i=\overline{1,\ N-1}.\end{gathered}$$

Оператор точной разностной схемы обладает свойством [8]

$$T^x(\mathcal{L}u)=\Lambda u\equiv-(a(x)\,u_{\bar{x}})_x+d(x)\,u(x),$$

где

$$a(x) = [h^{-1} v_1(x)]^{-1}, \quad d(x) = T^x(q(\cdot)). \tag{5}$$

Это значит, что точное трехточечное разностное уравнение для решения задачи (3) имеет вид

$$\Lambda u \equiv -(a(x)\, u_{\bar{x}})_x + d(x)\, u = \varphi(x), \quad x \in \omega, \quad \varphi(x) = T^x f(\cdot). \tag{6}$$

Для того, чтобы дополнить разностное уравнение (6) точными краевыми условиями на левом конце отрезка [0, 1], запишем решение уравнения (6) на отрезке $[0, x_1]$ через шаблонные функции $v_j^0(x)$, $j = 1, 2$, являющиеся решениями задач Коши

$$\mathcal{L} v_j^{(0)}(x) = 0, \quad x \in e^+(0); \qquad v_j^{(0)}(x_{j-1}) = 0, \quad k(x_{j-1})\, v_j^{(0)\prime}(x_{j-1}) = (-1)^{j-1},$$
$$j = 1, 2. \tag{7}$$

Имеем

$$u(x) = A v_1^{(0)}(x) + B v_2^{(0)}(x) + \int\limits_{e^+(0)} G^{(0)}(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi, \tag{8}$$

где $G^{(0)}(x, \xi) = v_1^{(0)}(x)\, v_2^{(0)}(\xi)/v_2^{(0)}(0)$ при $x \leqslant \xi$, $G^{(0)}(\xi, x) = G^{(0)}(x, \xi)$, A, B — произвольные постоянные. Полагая в (8) $x = x_0$, $x = x_1$ и учитывая (7), получаем $u(0) = B v_2^{(0)}(0)$, $u(x_1) = A v_1^{(0)}(x_1)$, откуда $A = u(x_1)/ /v_1^{(0)}(x_1)$, $B = u(0)/v_2^{(0)}(0)$. Дифференцируя (8) и полагая затем $x = 0$, с учетом (7) находим

$$u'(0) = k^{-1}(0)\, A + B\, \frac{dv_2^{(0)}(0)}{dx} + \left[\frac{d}{dx} \int\limits_{e^+(0)} G^{(0)}(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi\right]_{x=0},$$

или

$$u'(0) = k^{-1}(0)\, \frac{u(x_1)}{v_1^{(0)}(x_1)} + \frac{u(0)}{v_2^{(0)}(0)}\, \frac{dv_2^{(0)}(0)}{dx} + \left[\frac{d}{dx} \int\limits_{e^+(0)} G^{(0)}(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi\right]_{x=0} \tag{9}$$

С учетом того, что

$$k(0)\, \frac{dv_2^{(0)}(0)}{dx} = -1 - \int\limits_{e^+(0)} q(\xi)\, v_2^{(0)}(\xi)\, d\xi$$

и $v_1^{(0)}(x_1) = v_2^{(0)}(0)$ [8], представим (9) в виде

$$u'(0) = \frac{k^{-1}(0)\, h}{v_2^{(0)}(0)}\, u_x(0) - \frac{k^{-1}(0)}{v_2^{(0)}(0)} \int\limits_{e^+(0)} q(\xi)\, v_2^{(0)}(\xi)\, d\xi\, u(0) +$$
$$+ \left[\frac{d}{dx} \int\limits_{e^+(0)} G^{(0)}(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi\right]_{x=0}. \tag{10}$$

Аналогично получаем

$$u'(1) = \frac{hk^{-1}(1)}{v_1^{(N)}(1)}\, u_{\bar{x}}(1) + \frac{k^{-1}(1)}{v_1^{(N)}(1)} \Big(\int\limits_{e^-(1)} q(\xi)\, v_1^{(N)}(\xi)\, d\xi\Big)\, u(1) +$$
$$+ \left[\frac{d}{dx} \int\limits_{e^-(1)} G^{(N)}(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi\right]_{x=1},$$

где $v_j^{(N)}$, $j = 1, 2$, — решения задач Коши

$$\mathcal{L} v_j^{(N)}(x) = 0, \quad x \in e^-(1); \qquad v_j^{(N)}(x_{N-2+j}) = 0, \quad k(x_{N-2+j})\, v_j^{(N)\prime}(x_{N-2+j}) =$$
$$= (-1)^{j-1}, \quad j = 1, 2, \quad G^{(N)}(x, \xi) = v_1^{(N)}(x)\, v_2^{(N)}(\xi)/v_1^{(N)}(1)$$
$$\text{при } x \leqslant \xi, \quad G^{(N)}(\xi, x) = G^{(N)}(x, \xi).$$

Таким образом, точная разностная схема для задачи (3) имеет вид

$$\Lambda u = \varphi(x), \quad x \in \omega,$$
$$u(0) \geqslant 0, \quad \Lambda_0 u \equiv -\sigma_0 u_x(0) + \mu_0 u(0) - \nu_0 \geqslant 0, \quad u(1) \geqslant 0,$$
$$\Lambda_1 u \equiv \sigma_1 u_{\bar{x}}(1) + \mu_1 u(1) + \nu_1 \geqslant 0, \tag{11}$$
$$u(0)\Lambda_0 u = u(1)\Lambda_1 u = 0,$$

где

$$\sigma_0 = \frac{k^{-1}(0)\,h}{v_2^{(0)}(0)}, \quad \mu_0 = \frac{k^{-1}(0)}{v_2^{(0)}(0)} \int\limits_{e^{+}(0)} q(\xi)\, v_2^{(0)}(\xi)\, d\xi,$$
$$\nu_0 = \left[\frac{d}{dx} \int\limits_{e^{+}(0)} G^{(0)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi\right]_{x=0}, \quad \sigma_1 = \frac{k^{-1}(1)\,h}{v_1^{(N)}(1)},$$
$$\mu_1 = \frac{k^{-1}(1)}{v_2^{(N)}(x_{N-1})} \int\limits_{e^{-}(1)} q(\xi)\, v_1^{(N)}(\xi)\, d\xi, \quad \nu_1 = \left[\frac{d}{dx} \int\limits_{e^{-}(1)} G^{(N)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi\right]_{x=1}. \tag{12}$$

Вопрос о единственности решения схемы (11) рассмотрим позже.

Введем в точке $x = x_i$ местную систему координат, полагая $x = x_i + sh$, $s = (x - x_1)/h$. Тогда отрезок $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ преобразуется в отрезок, называемый обычно шаблоном, $-1 \leqslant s \leqslant 1$, а точке $s = 0$ будет соответствовать $x = x_i$. Положим $v_1^{(i)}(x) = v_1^{(i)}(x_i + sh) = h\alpha^{(i)}(s, h)$, $v_2^{(i)}(x) = v_2^{(i)}(x_i + sh) = h\beta^{(i)}(s, h)$, $-1 \leqslant s \leqslant 1$, $v_1^{(i)}(x_i) = ha_i$ и в силу известных свойств функций $v_j^{(i)}$ [8, с. 189], $v_2^{(i)}(x_i) = ha_{i+1}$. Шаблонные функции $\alpha^{(i)}(s, h)$ и $\beta^{(i)}(s, h)$, как легко видеть, удовлетворяют условиям

$$\overline{\mathcal{L}}\alpha = \frac{d}{ds}\left(\bar{k}(s)\frac{d\alpha}{ds}\right) - h^2\bar{q}(s)\,\alpha = 0, \quad -1 < s < 1, \quad \alpha(-1, h) = 0,$$
$$\bar{k}(-1)\,\alpha'(-1, h) = 1, \quad \overline{\mathcal{L}}\beta = 0, \quad -1 < s < 1, \quad \beta(1, h) = 0,$$
$$\bar{k}(1)\,\beta'(1, h) = -1, \tag{12'}$$

где $\bar{k}(s) = k(x_i + sh)$, $\bar{q}(s) = q(x_i + sh)$, причем $\alpha^{(i)}(s, h)$, $\beta^{(i)}(s, h)$ зависят только от значений $\bar{q}(s)$, $\bar{k}(s)$ $(k(x), q(x))$ на отрезке $-1 \leqslant s \leqslant 1$ $(x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_{i+1})$.

Введем местные системы координат $s = x/h$, $0 < s < 1$, и $s = (x - 1)/h$, $-1 < s < 0$, также в точках $x = 0$ и $x = 1$. Положим $v_1^{(0)}(x) = h\alpha^{(0)}(s, h)$, $v_2^{(0)}(x) = h\beta^{(0)}(s, h)$, $v_1^{(N)}(x) = h\alpha^{(N)}(s, h)$, $v_2^{(N)}(x) = h\beta^{(N)}(s, h)$, где функции $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$, $\alpha^{(N)}$, $\beta^{(N)}$ являются решениями задач

$$\overline{\mathcal{L}}\alpha^{(0)} = 0, \quad 0 < s < 1, \quad \alpha^{(0)}(0, h) = 0, \quad \bar{k}(0)\,\alpha^{(0)\prime}(0, h) = 1,$$
$$\overline{\mathcal{L}}\beta^{(0)} = 0, \quad 0 < s < 1, \quad \beta^{(0)}(1, h) = 0, \quad \bar{k}(1)\,\beta^{(0)\prime}(1, h) = -1, \tag{13}$$

$$\overline{\mathcal{L}}\alpha^{(N)} = 0, \quad -1 < s < 0, \quad \alpha^{(N)}(-1, h) = 0, \quad \bar{k}(-1)\,\alpha^{(N)\prime}(-1, h) = 1,$$
$$\overline{\mathcal{L}}\beta^{(N)} = 0, \quad -1 < s < 0, \quad \beta^{(N)}(0, h) = 0, \quad \bar{k}(0)\,\beta^{(N)\prime}(0, h) = -1. \tag{14}$$

Как следует из (12')—(14), все функции α и β являются аналитическими функциями параметра h^2 [9] и поэтому разлагаются в ряды

$$\alpha^{(i)}(s, h) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l^{(i)}(s)\, h^{2l}, \quad \beta^{(i)}(s, h) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l^{(i)}(s)\, h^{2l}, \tag{15}$$

где

$$\alpha_0^{(i)}(s) = \int\limits_{s_{0i}}^{s} \bar{k}^{-1}(t)\, dt, \quad \alpha_l^{(i)}(s) = \int\limits_{s_{0i}}^{s} \bar{k}^{-1}(t) \int\limits_{s_{0i}}^{t} \alpha_{l-1}^{(i)}(\lambda)\, \bar{q}(\lambda)\, d\lambda dt, \quad l > 0,$$

$$\beta_0^{(i)}(s)=\int_s^{s_{Ni}}\bar{k}^{-1}(t)\,dt,\quad \beta_l^{(i)}(s)=\int_s^{s_{Ni}}\bar{k}^{-1}(t)\int_t^{s_{Ni}}\beta_{l-1}^{(i)}(\lambda)\,\bar{q}(\lambda)\,d\lambda dt,\quad l>0, \tag{16}$$

$s_{0i}=-1+\delta_{0,i}$, $s_{Ni}=1-\delta_{N,i}$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Если взять в (15) m членов, т. е. $\alpha_m^{(i)}(s,\ h)=\sum_{l=0}^{m}\alpha_l^{(i)}(s)\,h^{2l}$, $\beta_m^{(i)}(s,\ h)=\sum_{l=0}^{m}\beta_l^{(i)}(s)\,h^{2l}$, вычислить по формулам (5), (6) и (12) $a=a^{(m)}$, $d=d^{(m)}$, $\varphi=\varphi^{(m)}$, $\sigma_0=\sigma_0^{(m)}$, $\mu_0=\mu_0^{(m)}$, $\nu_0=\nu_0^{(m)}$, $\sigma_1=\sigma_1^{(m)}$, $\mu_1=\mu_1^{(m)}$, $\nu_1=\nu_1^{(m)}$, заменив в этих формулах $\alpha^{(i)}(s,\ h)$, $\beta^{(i)}(s,\ h)$ полиномами от h $\alpha_m^{(i)}(s,\ h)$, $\beta_m^{(i)}(s,\ h)$, то получим усеченную разностную схему ранга m:

$$\begin{gathered}\Lambda^{(m)}y^{(m)}=\varphi^{(m)},\quad x\in\omega,\quad y^{(m)}(0)\,\Lambda_0^{(m)}y^{(m)}=y^{(m)}(1)\,\Lambda_1^{(m)}y^{(m)}=0,\\ y^{(m)}(0)\geqslant 0,\quad y^{(m)}(1)\geqslant 0,\quad \Lambda_0^{(m)}y^{(m)}\geqslant 0,\quad \Lambda_1^{(m)}y^{(m)}\geqslant 0,\end{gathered} \tag{17}$$

где $\Lambda^{(m)}y=-(a^{(m)}y_{\bar{x}})_x+d^{(m)}y$, $\Lambda_0^{(m)}y=-\sigma_0^{(m)}y_x(0)+\mu_0^{(m)}y(0)-\nu_0^{(m)}$, $\Lambda_1^{(m)}y=\sigma_1^{(m)}y_{\bar{x}}(1)+\mu_1^{(m)}y(1)+\nu_1^{(m)}$..

Положим

$$\begin{gathered}\alpha^{(i)}(s,\ h)-\alpha_m^{(i)}(s,\ h)=h^{2m+2}\Omega_1^{(i)}(m,\ s,\ h)\quad \beta^{(i)}(s,\ h)-\beta_m^{(i)}(s,\ h)=\\ =h^{2m+2}\Omega_2^{(i)}(m,\ s,\ h).\end{gathered} \tag{18}$$

Аналогично работе [5], можно доказать, что при достаточно малых h

$$\begin{gathered}|\Omega_j^{(i)}(m,\ s,\ h)|\leqslant M,\quad |r-r^{(m)}|\leqslant Mh^{2m+2},\quad |\nu_j-\nu_j^{(m)}|\leqslant Mh^{2m+3},\\ 0<c_1\leqslant a,\quad a^{(m)}\leqslant c_2,\quad 0<c_3\leqslant d,\quad d^{(m)}\leqslant c_4,\end{gathered} \tag{19}$$

где r — любой из a, d, φ, σ, постоянная M не зависит от i, j, m, h, s.

Легко видеть, что решением задачи (11) будет одно из решений следующих четырех линейных краевых задач:

$$\begin{gathered}\Lambda y_i=\varphi(x),\quad x\in\omega;\qquad l_0(\Lambda_0y_i,\ y_i)\equiv k_0(i)\,y_i(0)+(1-k_0(i))\,\Lambda_0y_i=0,\\ l_1(\Lambda_1y_i,\ y_i)\equiv k_1(i)\,y_i(1)+(1-k_1(i))\,\Lambda_1y_i=0,\end{gathered} \tag{20}$$

где $k_0(i)=0{,}5\,(1-\operatorname{sign}(i-1{,}5))$, $k_1(i)=0{,}5\,(1+(-1)^i)$, $i=\overline{0,\ 3}$.

Если решение задачи (17) существует, то оно совпадает с одним из решений следующих задач:

$$\begin{gathered}\Lambda^{(m)}y_i^{(m)}=\varphi^{(m)}(x),\quad x\in\omega;\qquad l_0(\Lambda_0^{(m)}y_i^{(m)},\ y_i^{(m)})=0,\\ l_1(\Lambda_1^{(m)}y_i^{(m)},\ y_i^{(m)})=0,\quad i=\overline{0,\ 3}.\end{gathered} \tag{21}$$

Теорема 2. *Если* $a^{(m)}>0$, $d^{(m)}>0$, $\sigma_0^{(m)}>0$, $\sigma_1^{(m)}>0$, $\mu_0^{(m)}>0$, $\mu_1^{(m)}>0$, *то решение р. с. вида* (17) *существует.*

Доказательство. Теорема будет доказана, если среди $y_i^{(m)}$, $i=\overline{0,\ 3}$, существует такое $y_{i_0}^{(m)}$, для которого выполняются неравенства $y_{i_0}^{(m)}(0)\geqslant 0$, $y_{i_0}^{(m)}(1)\geqslant 0$, $\Lambda_0^{(m)}y_{i_0}^{(m)}\geqslant 0$, $\Lambda_1^{(m)}y_{i_0}^{(m)}\geqslant 0$. Пусть, например, $y_0^{(m)}$ удовлетворяет соотношениям $\Lambda_0^{(m)}y_0^{(m)}\leqslant 0$, $\Lambda_1^{(m)}y_0^{(m)}\geqslant 0$. Тогда функция $z_{02}=y_0^{(m)}-y_2^{(m)}$ будет удовлетворять условиям $\Lambda^{(m)}z_{02}=0$, $-\sigma_0^{(m)}(z_{02})_{x,0}+\mu_0^{(m)}z_{02}(0)\leqslant 0$, $z_{02}(1)=0$. Второе условие представим в виде $-z_{02}(0)+(1-h\mu_0^{(m)}/\sigma_0^{(m)})^{-1}z_{02}(h)\geqslant 0$. В силу принципа максимума [8, с. 44] $z_{02}\leqslant 0$, $x\in\omega$, и значит, $y_2^{(m)}(0)\geqslant 0$. Если $\Lambda_1^{(m)}y_2^{(m)}\geqslant 0$, то $y_{i_0}^{(m)}=y_2^{(m)}$ и теорема доказана. В противном случае $\Lambda_1^{(m)}y_2^{(m)}<0$. Положим $z_{23}=y_2^{(m)}-y_3^{(m)}$. Тогда $\Lambda^{(m)}z_{23}=0$, $-\sigma_0^{(m)}(z_{23})_{x,0}+\mu_0^{(m)}z_{23}(0)=0$, $\sigma_1^{(m)}(z_{23})_{\bar{x},1}+\mu_1^{(m)}z_{23}(1-h)<0$, или $\Lambda^{(m)}z_{23}=0$, $-z_{23}(0)+(1+h\mu_0^{(m)}/\sigma_0^{(m)})\,z_{23}(h)=$

$= 0$, $-z_{23}(1) + (1 + h\mu_1^{(m)}/\sigma_1^{(m)}) z_{23}(1-h) > 0$. Из принципа максимума следует $z_{23} \leqslant 0$, откуда $y_3^{(m)}(0) \geqslant 0$, $y_3^{(m)}(1) \geqslant 0$, и, значит, $y_{i_0}^{(m)} = y_3^{(m)}$, что доказывает теорему. Чтобы полностью завершить доказательство, остается аналогично рассмотреть другие возможные случаи.

Теорема 3. *Пусть* $y\,(y^{(m)})$ — *решение задачи* (11) ((17)), *совпадающее с одним из решений задач* (20) ((21)). *Тогда* $\forall i = \overline{0, 3}$ $y_i^{(x)} \leqslant y(x)$ $(y_i^{(m)}(x) \leqslant y^{(m)}(x))$ $\forall\ x \in \bar{\omega}$.

Доказательство. Предположим, что $y = y_0$, т. е. $\Lambda y = \varphi(x)$, $x \in \omega$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $\Lambda_0 y \geqslant 0$, $\Lambda_1 y \geqslant 0$. Покажем, что $y \geqslant y_1$, где y_1 — решение задачи $\Delta y_1 = \varphi(x)$, $x \in \omega$; $y_1(0) = 0$, $\Lambda_1 y_1 = 0$. Действительно, нетрудно видеть, что для $z = y - y_1$ справедливы соотношения $\Lambda z = 0$; $x \in \omega$; $z(0) = 0$, $\sigma_1 z_{\bar{x}}(1) + \mu_1 z(1) \geqslant 0$. Из (4), (12), (15), (16) и (19) следует $\mu_1 > 0$, $\sigma_1 > 0$ и $\lim\limits_{h\to 0} \mu_1 = 0$. Поэтому условие $\sigma_1 z_{\bar{x}}(1) + \mu_1 z(1) \geqslant 0$ можно представить в виде $-z(1) + \varkappa_2 z(1-h) \leqslant 0$, где $\varkappa_2 = (1 + \mu_1 h/\sigma_1)^{-1}$, $0 < \varkappa_2 < 1$. Из принципа максимума [8, с. 44] следует, что $z \geqslant 0$, т. е. $y \geqslant y_1$. Аналогично рассматриваются остальные случаи. Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 3 и известных свойств задач (11), (17) следует единственность решения точной р. с. (11) и усеченных р. с. (17).

3. Рассмотрим вопрос о точности усеченной схемы (17). Из теорем 1, 3 следует, что $u = \max\limits_i u_i$, $y^{(m)} = \max\limits_i y_i^{(m)}$, где u_i — решения задач (3′), $y_i^{(m)}$ — решения задач (17). Из результатов работы [5] выводятся оценки

$$\max_{x\in\omega} |y_i^{(m)}(x) - u_i(x)| \equiv \| y_i^{(m)} - u_i \|_C \leqslant Mh^{2m+2}, \quad i = 0, 3. \tag{22}$$

Пусть $u = u_{i_0}$, $y^{(m)} = y_{j_0}^{(m)}$, i_0, j_0, $\in N_3$. Рассмотрим функции u_{i_0} и u_{j_0}. Если $u_{i_0} \not\equiv u_{j_0}$, то существует отрезок $[\varepsilon, \delta]$, на котором $u_{i_0}(x) \neq u_{j_0}(x)$, $x \in [\varepsilon, \delta]$, причем $\sup\limits_{x\in[\varepsilon,\delta]} |u_{i_0} - u_{j_0}| = \eta > 0$. Тогда в силу (22) при достаточно малых h будет $y_i^{(m)}(x) > y_{j_0}^{(m)}(x)$, $x \in [\varepsilon, \delta]$, откуда в силу теоремы 3 $y_{i_0}^{(m)}(x) \geqslant y_{j_0}^{(m)}(x)$, $x \in \omega$. Это значит, что $i_0 = j_0$ и в силу (22) $\| u - y^{(m)} \|_C \leqslant Mh^{2m+2}$. Если же $u_{i_0} \equiv u_{j_0}$, то $\| u - y^{(m)} \|_C = \| u_{i_0} - y_{j_0}^{(m)} \|_C = \| u_{j_0} - y_{j_0}^{(m)} \|_C \leqslant Mh^{2m+2}$. Следовательно, доказана такая теорема.

Теорема 4. *Пусть* k, q, $f \in Q^{(0)}[0, 1]$, $0 < c_1 \leqslant k(x) \leqslant c_2$, $0 < c_3 \leqslant q(x) \leqslant c_4$. *Тогда решение усеченной р. с.* (17) *сходится к решению задач* (1)—(3), *причем имеет место следующая оценка точности* $\| u - y^{(m)} \|_C \leqslant Mh^{2m+2}$, *где* M — *положительная постоянная, не зависящая от* h, m.

Заметим, что при реализации р. с. (17) на ЭВМ естественно с помощью (21) и теоремы 3 свести решение (17) к двум прогонкам [8].

1. *Гловинчки Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств.— М.: Мир, 1979.— 574 с.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике.— М.: Мир, 1980.— 383 с.
3. *Вайнельт В.* Об использовании разностных схем при решении краевых задач для дифференциальных неравенств // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1978.— 18, № 3.— С. 642—652.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах высокого порядка точности // Докл. АН УССР.— 1960.— 131, № 3.— С. 514—517.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1961.— 1, № 3.— С. 425—440.
6. *Буренков В. И.* Об аддитивности классов $W_p^{(k)}$ (Ω) // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1967.— 89.— С. 31—55.
7. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 587 с.
8. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.— М.: Наука, 1983.— 656 с.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1976.— 576 с.

Киев. ун-т Получено 27.02.85