УДК 517.968

Н. В. Матысина, Э. А. Матысина

Построение приближенного решения интегро-дифференциального уравнения

1. Постановка задачи. Требуется найти решение интегро-дифференциального уравнения

$$y' + p(x)\,y = f(x) + \int_a^x K(x, t)\,y(t)\,dt, \tag{1}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$y(a) = y_0. \tag{2}$$

Функции $p(x)$ и $f(x)$ будем считать непрерывными на промежутке $[a, b]$, а ядро $K(x, t)$ — непрерывным в треугольнике $a \leqslant t \leqslant x \leqslant b$.

В отдельных случаях удается найти точное решение поставленной задачи, но, как правило, используются приближенные методы ее решения. Одним из эффективных методов является метод осреднения функциональных поправок [1, 2]. Однако в случае решения задачи типа Коши, в которой график искомой функции жестко закреплен в левом конце заданного промежутка $[a, b]$, многие приближенные методы дают значительное отклонение от точного решения по мере удаления от начальной точки.

В настоящей работе предлагается вариант процесса осреднения, позволяющий существенно улучшить приближение к решению для значений аргументов, достаточно удаленных от начального. Приближенное решение строится по аналогии с известным методом Эйлера [3] в виде криволинейных ломаных.

Для дальнейшего удобно интегро-дифференциальное уравнение (1) представить в виде интегрального уравнения

$$y(x) = F(x, c) + \int_a^x H(x, t)\,y(t)\,dt, \tag{3}$$

где

$$F(x, c) = c + \int_a^x f(t)\,dt, \quad c = y(a) = y_0,$$

$$H(x, t) = \int_t^x K(x, t)\,dx - p(t).$$

Пусть M, H и $\overline{H}$ — такие константы, что $|F(x, c)| \leqslant M$, $|H(x, t)| \leqslant H$, $|H'_x(x, t)| \leqslant \overline{H}$.

2. Построение приближения. Будем приближенно решать интегральное уравнение (3) с заданным начальным условием (2).

Промежуток $[a, b]$, на котором ищется решение, разбиваем на произвольное количество равных частей точками $a = x_{10} < x_{11} < \ldots < x_{1m_1} = b$ с шагом $h_1 = x_{1i} - x_{1i-1}$, $i = \overline{1, m_1}$. Тогда уравнение (3) можно записать в виде

$$y(x) = F(x, c) + \sum_{i=1}^{j-1} \int_{x_{1i-1}}^{x_{1i}} H(x, t)\,y(t)\,dt + \int_{x_{1j-1}}^{x} H(x, t)\,y(t)\,dt, \quad j \leqslant m_1. \tag{4}$$

Приближенное решение задачи (3), (2) обозначим через $Y_1(x)$ и определим его различными аналитическими выражениями на различных участках промежутка $[a, b]$ следующим образом.

Для $x \in [x_{10}, x_{11}]$

$$Y_1(x) = y_{11}(x) = F(x, c_{11}) + \int_{x_{10}}^{x} H(x, t)\,\alpha_{11}dt, \tag{5'}$$

где постоянная величина α_{11} — среднее значение этого приближения на отрезке $[x_{10}, x_{11}]$,

$$\alpha_{11} = \frac{1}{h_1} \int\limits_{x_{10}}^{x_{11}} y_{11}(x)\, dx. \tag{6'}$$

Постоянную c, входящую в функцию F, соответствующую решению $y_{11}(x)$, обозначаем через c_{11} и определяем с помощью начального условия (2)

$$y_{11}(a) = y_0, \tag{7'}$$

откуда находим $c_{11} = y_0$. Тогда

$$y_{11}(x) = y_0 + \int\limits_{x_{10}}^{x} f(t)\, dt + \int\limits_{x_{10}}^{x} H(x, t)\, \alpha_{11} dt. \tag{8'}$$

Для $x \in [x_{11}, x_{12}]$

$$Y_1(x) = y_{12}(x) = F(x, c_{12}) + \int\limits_{x_{10}}^{x_{11}} H(x, t)\, y_{11}(t)\, dt + \int\limits_{x_{11}}^{x} H(x, t)\, \alpha_{12} dt, \tag{5''}$$

где

$$\alpha_{12} = \frac{1}{h_1} \int\limits_{x_{11}}^{x_{12}} y_{12}(x)\, dx, \tag{6''}$$

и потребуем, чтобы $y_{12}(x)$ удовлетворяло условию

$$y_{12}(x_{11}) = y_{11}(x_{11}). \tag{7''}$$

Постоянную, входящую в функцию F, соответствующую приближению $y_{12}(x)$, обозначаем через c_{12} и находим ее с помощью условия склейки приближенных решений $y_{11}(x)$ и $y_{12}(x)$ в узле x_{11} (7″), из которого имеем

$$c_{12} = y_0 + \int\limits_{x_{10}}^{x_{11}} H(x, t)\, [\alpha_{11} - y_{11}(t)]\, dt.$$

Подставляя значение c_{12} в выражение (5″), получаем

$$y_{12}(x) = y_0 + \int\limits_{x_{10}}^{x} f(t)\, dt + \int\limits_{x_{10}}^{x_{11}} H(x, t)\, \alpha_{11} dt + \int\limits_{x_{11}}^{x} H(x, t)\, \alpha_{12} dt. \tag{8''}$$

Пусть приближение $y_{1m_1-1}(x)$ на участке $[x_{1m_1-2}, x_{1m_1-1}]$ определяется формулой

$$Y_1(x) = y_{1m_1-1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_{10}}^{x} f(t)\, dt + \int\limits_{x_{10}}^{x_{11}} H(x, t)\, \alpha_{11} dt + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{x_{1m_1-3}}^{x_{1m_1-2}} H(x, t)\, \alpha_{1m_1-2} dt + \int\limits_{x_{1m_1-2}}^{x} H(x, t)\, \alpha_{1m_1-1} dt,$$

где

$$\alpha_{1i} = \frac{1}{h_1} \int\limits_{x_{1i-1}}^{x_{1i}} y_{1i}(x)\, dx, \quad i = \overline{1, m_1 - 1}.$$

Легко показать, что для приближения $y_{1m_1}(x)$ на участке $[x_{1m_1-1}, x_{1m_1}]$ можно получить выражение

$$Y_1(x) = y_{1m_1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_{10}}^{x} f(t)\, dt + \sum_{i=1}^{m_1-1} \int\limits_{x_{1i-1}}^{x_{1i}} H(x, t)\, \alpha_{1i} dt +$$

$$+ \int\limits_{x_{1m_1-1}}^{x} H(x, t)\, \alpha_{1m_1} dt, \tag{8'''}$$

где

$$\alpha_{1m_1} = \frac{1}{h_1} \int\limits_{x_{1m_1-1}}^{x_{1m_1}} y_{1m_1}(x)\, dx, \tag{6'''}$$

причем условия склейки приближений во всех узлах x_{1i}, $i = \overline{1, m, -1}$, выполняются.

В результате получаем приближенное решение задачи (1), (2) в виде непрерывной функции

$$Y_1(x) = \begin{cases} y_{11}(x) & \text{для } x \in [x_{10}, x_{11}]; \\ y_{12}(x) & \text{для } x \in [x_{11}, x_{12}]; \\ \dots\dots\dots\dots & \\ y_{1m_1}(x) & \text{для } x \in [x_{1m_1-1}, x_{1m_1}]. \end{cases} \tag{9'}$$

Очевидно, график этой функции имеет вид непрерывной кривой, проходящей через начальную точку $A\ (a, y_0)$, которую обозначим через L_1. Точки соединения звеньев кривой L_1, соответствующие стыкам участков разбиения промежутка $[a, b]$ на части, обозначим через $A_{11}\ (x_{11}, y_{11})$, $A_{12}\ (x_{12}, y_{12})$, ..., $A_{1m_1-1}\,(x_{1m_1-1}, y_{1m_1-1})$ и назовем узлами соединения.

Выбирая различные шаги разбиения промежутка $[a, b]$ на части $h_1 > h_2 > \dots > h_k > \dots$, можно найти бесконечную последовательность приближений задачи (1), (2) $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ..., $Y_k(x)$, ..., где

$$Y_k(x) = \begin{cases} y_{k1}(x) = F(x, y_0) + \int\limits_a^x H(x, t)\,\alpha_{k1} dt, \quad x \in [a, x_{k1}], \\ y_{k2}(x) = F(x, y_0) + \int\limits_a^{x_{k1}} H(x, t)\,\alpha_{k1} dt + \\ + \int\limits_{x_{k1}}^{x} H(x, t)\,\alpha_{k2} dt, \quad x \in [x_{k1}, x_{k2}], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{km_k}(x) = F(x, y_0') + \sum\limits_{i=1}^{m_k-1} \int\limits_{x_{ki-1}}^{x_{ki}} H(x, t)\,\alpha_{km_k-1} dt + \\ + \int\limits_{x_{km_k-1}}^{x} H(x, t)\,\alpha_{km_k} dt, \quad x \in [x_{km_k-1}, x_{km_k}], \end{cases} \tag{9}$$

и

$$\alpha_{ki} = \frac{1}{h_k} \int\limits_{x_{ki-1}}^{x_{ki}} y_{ki}(x)\, dx, \quad h_k = x_{ki} - x_{ki-1}, \quad i = \overline{1, m_k}.$$

Соответственно строится бесконечная последовательность непрерывных криволинейных ломаных L_1, L_2, ..., L_k, ..., проходящих через начальную точку $A\ (a, y_0)$.

3. Сходимость процесса. Обозначим через h длину наибольшего шага всевозможных разбиений промежутка $[a, b]$ на части $h = \max\limits_k \{h_k\}$, а через σ — длину наибольшего звена линии L_k: $\sigma = \max\limits_{i,k} \{\overset{\frown}{A_{ik-1}, A_{ik}}\}$. В дальнейшем величину h будем неограниченно уменьшать. Очевидно, что при этом и σ будет стремиться к нулю.

Покажем, что если σ стремится к нулю, то построенная последовательность непрерывных функций $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ..., $Y_k(x)$, ... на промежутке $[a, b]$ равномерно приближается к решению задачи (1), (2).

Нетрудно убедиться, что все функции $Y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, имеют следующие свойства.

1. Они равномерно ограничены одной и той же константой C, значение которой легко найти. В самом деле, если $\max\limits_{[a, x_{k1}]} |Y_k(x)| = \max\limits_{[a, x_{k1}]} |y_{k1}(x)| = C_{k1}$, то $|y_{k1}(x)| < M + Hh_k C_{k1}$. Отсюда находим

$$C_{k1} < \frac{M}{1 - Hh_k}, \tag{10'}$$

если $1 - Hh_k > 0$, чего всегда можно достичь подбором достаточно малой величины шага h_k.

Если $\max\limits_{[x_{k1}, x_{k2}]} |Y_k(x)| = \max\limits_{[x_{k1}, x_{k2}]} |y_{k2}(x)| = C_{k2}$, то $|y_{k2}(x)| < M + Hh_k C_{k1} + Hh_k C_{k2} < M + Hh_k \dfrac{M}{1 - Hh_k} + Hh_k C_{k2}$. Отсюда получаем

$$C_{k2} < \frac{M}{(1 - Hh_k)^2}. \tag{10''}$$

Методом математической индукции убеждаемся, что если

$$\max_{[x_{km_k-1}, x_{km_k}]} |Y_k(x)| = \max_{[x_{km_k-1}, x_{km_k}]} |y_{km_k}(x)| = C_{km_k},$$

то

$$C_{km_k} < \frac{M}{(1 - Hh_k)^{m_k}} = \frac{M}{(1 - Hh_k)^{(b-a)/h_k}}. \tag{10}$$

Возьмем предел левой и правой части последнего неравенства при $h \to 0$ (тогда и $h_k \to 0$, а $m_k \to \infty$):

$$\lim_{m_k \to \infty} C_{km_k} < \lim_{h_k \to 0} \frac{M}{(1 - Hh_k)^{(b-a)/h_k}} = Me^{H(b-a)} \quad \forall k.$$

Таким образом, установлено, что когда длина наибольшего звена линии L_k стремится к нулю, то

$$|Y_k(x)| = \left\{ \begin{array}{l} |y_{k1}(x)| \leqslant C_{k1} \\ |y_{k2}(x)| \leqslant C_{k2} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ |y_{km_k}(x)| \leqslant C_{km_k} \end{array} \right\} < C = Me^{H(b-a)}. \tag{11}$$

2. Все функции множества $\{Y_k(x)\}$ дифференцируемы в каждой точке промежутка (x_{ki-1}, x_{ki}), принадлежащего $[a, b]$, $i = \overline{1, m_k}$. Причем, первые производные $Y'_k(x)$ равномерно ограничены некоторой константой $\overline{C}$. Найдем значение постоянной $\overline{C}$. Продифференцируем $Y_k(x)$:

$$y'_{k1}(x) = f(x) + \int_a^x H'_x(x, t)\,\alpha_{k1} dt + H(x, x)\,\alpha_{k1}, \quad x \in [a, x_{k1}],$$

$$y'_{k2}(x) = f(x) + \int_a^{x_{k1}} H'_x(x, t)\,\alpha_{k1} dt + \int_{x_{k1}}^x H'_x(x, t)\,\alpha_{k2} dt + H(x, x)\,\alpha_{k2}, \quad x \in [x_{k1}, x_{k2}],$$

$$\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot$$

$$y'_{km_k}(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_k-1} \int_{x_{ki-1}}^{x_{ki}} H'_x(x, t)\,\alpha_{ki} dt + \int_{x_{km_k-1}}^x H'_x(x, t)\,\alpha_{km_k} dt + H(x, x)\,\alpha_{km_k}, \quad x \in [x_{km_k-1}, x_{km_k}].$$

Теперь оценим по модулю эту производную:

$$|Y'_k(x)| < \left\{ \begin{matrix} M + \overline{H}Ch_k + HC = \overline{C}_1 \\ M + 2\overline{H}Ch_k + HC = \overline{C}_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ M + m_k\overline{H}Ch_k + HC = \overline{C}_{mk} \end{matrix} \right\} \leqslant M + \overline{H}C(b-a) + HC = \overline{C}. \tag{12}$$

3. Функции семейства $\{Y_k(x)\}$ равностепенно непрерывны. В самом деле, оценивая разность $Y_k(x'') - Y_k(x') = \int\limits_{x'}^{x''} Y'_k(x)\,dx$ по модулю, находим $|Y_k(x'') - Y_k(x')| < \overline{C}\,|x'' - x'|$.

Теперь по теореме Арцела [3] из множества функций $\{Y_k(x)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся последовательность на замкнутом промежутке $[a, b]$. Обозначим ее через $Y^*_1(x)$, $Y^*_2(x)$, ..., $Y^*_k(x)$, ..., а предельную функцию — через $Y(x)$. Очевидно, функция $Y(x)$ удовлетворяет начальному условию (2). Нужно показать, что она удовлетворяет и интегральному уравнению (3).

По построению приближений все функции $Y^*_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют уравнению

$$Y^*_k(x) = F(x, y_0) + \sum_{i=1}^{j-1} \int\limits_{x_{ki-1}}^{x_{ki}} H(x, t)\,\alpha_{ki}dt + \int\limits_{x_{kj-1}}^{x} H(x, t)\,\alpha_{kj}dt, \quad x \in [x_{kj-1}, x_{kj}], \tag{13}$$

j может принимать значения $1, 2, \ldots, m_k$. Требуется установить справедливость равенства

$$Y(x) = F(x, y_0) + \int\limits_a^x H(x, t)\,Y(t)\,dt,$$

или

$$Y(x) = F(x, y_0) + \sum_{i=1}^{j-1} \int\limits_{x_{ki-1}}^{x_{ki}} H(x, t)\,Y(t)\,dt + \int\limits_{x_{kj-1}}^{x} H(x, t)\,Y(t)\,dt, \tag{14}$$

т. е. показать, что в выражении (13) можно переходить к пределу при $k \to \infty$ не только слева, но и справа. С этой целью рассмотрим модуль разности правых частей (13) и (14) и оценим сверху:

$$\left| \sum_{i=1}^{j-1} \int\limits_{x_{ki-1}}^{x_{ki}} H(x, t)\,\alpha_{ki}dt + \int\limits_{x_{kj-1}}^{x} H(x, t)\,\alpha_{kj}dt - \sum_{i=1}^{j-1} \int\limits_{x_{ki-1}}^{x_{ki}} H(x, t)\,Y(t)\,dt - \int\limits_{x_{kj-1}}^{x} H(x, t)\,Y(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{j-1} \int\limits_{x_{ki-1}}^{x_{ki}} |H(x, t)|\,|\alpha_{ki} - Y(t)|\,dt + \int\limits_{x_{kj-1}}^{x} |H(x, t)|\,|\alpha_{kj} - Y(t)|\,dt <$$

$$< H \sum_{i=1}^{j} \int\limits_{x_{ki-1}}^{x_{ki}} |\alpha_{ki} - Y(t)|\,dt = H \sum_{i=1}^{j} |\alpha_{ki} - Y(t_i)|\,h_k,$$

где $t_i \in [x_{ki-1}, x_{ki}]$. Если $k \to \infty$ ($h \to 0$ и $m_k \to \infty$), то, очевидно, предел правой части последнего неравенства равен нулю, так как

$$\alpha_{ki} = \frac{1}{h_k}\int\limits_{x_{ki-1}}^{x_{ki}} Y_k^*(x)\,dx \to \frac{1}{h_k}\int\limits_{x_{ki-1}}^{x_{ki}} Y(x)\,dx = Y(t_i),$$

где $t_i = t$ — точка отрезка $[x_{ki-1}, x_{ki}]$, $i = \overline{1, j}$, в которую он стягивается при $h_k = x_{ki} - x_{ki-1} \to 0$. Сходимость процесса доказана.

4. Пример. Найдем приближенно частное решение уравнения

$$y(x) = c + \int\limits_0^x y(t)\,dt,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$ на промежутке $[0, b]$. Затем приближение сравним с точным решением $y(x) = e^x$.

Рассматриваем разбиение промежутка $[0, b]$ на части с произвольным шагом h: $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$, ..., $x_n = nh = b$.

По методу Эйлера будем иметь

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} \bar{y}_1(x) = 1 + x, & x \in [0, h], \\ \bar{y}_2(x) = (1+h)(x + 1 - h), & x \in [h, 2h], \\ \bar{y}_3(x) = (1+h)^2(x + 1 - 2h), & x \in [2h, 3h], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \bar{y}_n(x) = (1+h)^{n-1}(x + 1 - (n-1)h), & x \in [(n-1)h, nh]. \end{cases}$$

По формулам (8′), (6′), (8″), (6″), ..., (8‴), (6‴) п. 2 найдем

$$Y_1(x) = \begin{cases} y_{11}(x) = 1 + \dfrac{2}{2-h}x, & x \in [0, h], \\ y_{12}(x) = \dfrac{2+h}{2-h} + \dfrac{2(2+h)}{(2-h)^2}(x-h), & x \in [h, 2h], \\ y_{13}(x) = \dfrac{(2+h)^2}{(2-h)^2} + \dfrac{2(2+h)^2}{(2-h)^3}(x-2h), & x \in [2h, 3h], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ y_{1n}(x) = \dfrac{(2+h)^{n-1}}{(2-h)^{n-1}} + \dfrac{2(2+h)^{n-1}}{(2-h)^n}(x-(n-1)h), & \\ & x \in [(n-1)h, nh]. \end{cases}$$

Заметим, что и $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (h\to 0,\, x\to b)}} \bar{y}_n(x) = e^b$, и $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (h\to 0,\, x\to b)}} y_{1n}(x) = e^b$. Но $Y_1(x)$ дает лучшее приближение к точному решению $y(x)$, чем $\bar{y}(x)$, что усматривается из таблицы значений решений в различных точках промежутка $[0, b]$, составленной для шага $h = 0,1$.

x	$y(x)$	$\bar{y}(x)$	$Y_1(x)$	$y - \bar{y}$	$y - Y_1$
0	1	1	1	0	0
0,1	1,105171	1,1	1,105264	0,005	—0,0001
0,2	1,221402	1,21	1,221607	0,01	—0,0002
0,3	1,349858	1,331	1,350197	0,02	—0,0003
0,4	1,491824	1,4641	1,492322	0,03	—0,0005

1. *Соколов Ю. Д.* Метод осреднения функциональных поправок.— Киев: Наук. думка, 1967.— 336 с.
2. *Лучка А. Ю.* Теория и применение метода осреднения функциональных поправок.— Киев : Изд-во АН УССР, 1963.— 126 с.
3. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1964.— 272 с.

Днепропетр. инж.-строит. ин-т

Получено 29.12.84,
после доработки — 16.08.85