УДК 517.946

В. В. Фиголь

Задача с приближенными граничными данными для системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

В данной работе, которая является развитием [1, 2], изучается краевая задача для общей системы уравнений с постоянными коэффициентами порядка $2n$, $n \geqslant 1$, в $(m+1)$-мерном слое $D_\alpha = \{t, x : t \in (0, \alpha\pi), x \in \Omega\}$, где Ω — m-мерный тор, когда по переменной t заданы приближенные локальные граничные условия. Установлены условия существования решения и устойчивости задачи, которые формулируются в терминах диофантовых свойств чисел. Доказаны метрические теоремы, утверждающие выполнение достаточных условий существования решения и устойчивости задачи для почти всех (в смысле меры Лебега) векторов, составленных из параметров области, коэффициентов уравнений и коэффициентов краевых условий.

1. Постановка задачи. Для системы уравнений

$$\sum_{|s|\leqslant 2n} A_s \frac{\partial^{|s|} u(t, x)}{\partial t^{2s_0} \partial x^{s'}} = 0, \quad (t, x) \in D_\alpha, \tag{1}$$

рассмотрим задачу отыскания решения, удовлетворяющего условиям:

$$\left\| \sum_{|s|\leqslant 2n-2} B_s^{(j)} \frac{\partial^{|s|} u(0, x)}{\partial t^{2s_0} \partial x^{s'}} - \varphi_j(x) \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

$$\left\| \sum_{|s|\leqslant 2n-2} B_s^{(j)} \frac{\partial^{|s|} u(\tau\pi, x)}{\partial t^{2s_0} \partial x^{s'}} - \psi_j(x) \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta, \ |\tau - \alpha| \leqslant \delta, \ j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $s = (s_0, s_1, \ldots, s_m) = (s_0, s')$, $|s| = 2s_0 + s_1 + \ldots + s_m$; α, δ, τ — положительные константы, $A_s = \| a_s^{rq} \|_{r,q=\overline{1,p}}$, $B_s^{(j)}$ — $(p \times p)$-матрицы с постоянными действительными элементами ($\det A_{n,0} \neq 0$); $u(t, x)$, $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(x)$ — p-мерные вектор-функции. Вид области Ω налагает условие 2π-периодичности по x на функции $u(t, x)$, $\varphi_j(x)$, $\psi_j(x)$. В дальнейшем используются функциональные пространства $H_q(\Omega)$, $\overline{H}_q(\Omega)$, $\overline{H}_q^p(D_\alpha)$ скалярных и векторных функций, 2π-периодических по x, определения которых даны в [3]. Решение рассматриваемой задачи ищем в пространстве $\overline{H}_{2n}^{2n}(D_\tau)$, где τ — некоторое фиксированное число из сегмента $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$.

2. Существование решения задачи. Предположим, что все корни $\lambda_j(k)$, $j = \overline{1, 2np}$, $k \in \mathbf{Z}^m$, уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \det \left[\sum_{|s|\leqslant 2n} A_s \lambda^{2s_0} (ik)^{s'} \right] = 0 \tag{4}$$

имеют кратность равную единице. Тогда фундаментальная система решений системы однородных дифференциальных уравнений

$$\sum_{|s|\leqslant 2n} A_s (ik)^s u_{k_l}^{(2s_0)}(t) = 0 \tag{1'}$$

примет вид

$$u_{k,j}(t) = g_{l(j)}(\lambda_j) \exp\{\lambda_j t\}, \ u_{k,np+j} = g_{l(j)}(\lambda_j) \exp\{-\lambda_j t\}, \ g_{l(j)}(\lambda_j) =$$
$$= \operatorname{colon}(p_{1,l(j)}(\lambda_j), \ldots, g_{p,l(j)}(\lambda_j)).$$

В качестве компонент вектора $g_{l(j)}(\lambda_j)$ берем миноры l-й строки определителя $\Delta(\lambda_j)$, для которой они не все равны нулю:

$$g_{c,l(j)}(\lambda_j) = \sum_{|s|\leqslant 2n(p-1)} d_s^{c,l(j)} \lambda_j^{2s_0} (ik)^{s'}, \quad c = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,np}, \quad d_s^{c,l(j)} =$$

$$= \sum_{p} \det \| a_{\nu(h)}^{r,h} \|_{\substack{r,h=\overline{1,p} \\ (r\neq l(j), h\neq c)}}, \quad \sum_{h=1} \nu_q^{(h)} = s_q, \quad q = 0, m,$$

где $a_{\nu(h)}^{r,h}$, $r = \overline{1,p}$, $r \neq l(j)$, — элементы h-го столбца какой-либо из матриц A_s, $|s| \leqslant 2n$, $\nu_q^{(h)}$ — q-я компонента вектора s, соответствующего этой матрице.

Обозначим через $A(k)$ и $B(k)$ определители порядка np, которые задаются формулами

$$A(k) = \begin{vmatrix} g_{1,l(1)}[\lambda_1(k)] & \dots g_{1,l(np)}[\lambda_{np}(k)] \\ \dots & \dots \\ g_{p,l(1)}[\lambda_1(k)] & \dots g_{p,l(np)}[\lambda_{np}(k)] \\ g_{1,l(1)}[\lambda_1(k)]\,\lambda_1^2(k) & \dots g_{1,l(np)}[\lambda_{np}(k)]\,\lambda_{np}^2(k) \\ \dots & \dots \\ g_{p,l(1)}[\lambda_1(k)]\,\lambda_1^2(k) & \dots g_{p,l(np)}[\lambda_{np}(k)]\,\lambda_{np}^2(k) \\ \dots & \dots \\ g_{1,l(1)}[\lambda_1(k)]\,\lambda_1^{2n-2}(k) & \dots g_{1,l(np)}[\lambda_{np}(k)]\,\lambda_{np}^{2n-2}(k) \\ \dots & \dots \\ g_{p,l(1)}[\lambda_1(k)]\,\lambda_1^{2n-2}(k) & \dots g_{p,l(np)}[\lambda_{np}(k)]\,\lambda_{np}^{2n-2}(k) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$B(k) = \det \left\| \sum_{|s'|\leqslant 2(n-s_0-1)} B_{s}^{(j)} (ik)^{s'} \right\|_{\substack{j=\overline{1,n} \\ s_0=\overline{0,n-1}}}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть для некоторого фиксированного $\tau \in]\alpha-\delta, \alpha+\delta[$ существуют константа $M > 0$ и целые числа s_i, $i = \overline{1,3}$, такие, что для всех (за исключением конечного числа) векторов $k \in Z^m$ выполняются неравенства*

$$|\mathrm{sh}\{\lambda_j(k)\tau\pi\}| \geqslant M|k|^{-s_1-\varepsilon}, \quad j = \overline{1,np}, \tag{7}$$

$$|A(k)| \geqslant M|k|^{-s_2-\varepsilon}, \tag{8}$$

$$|B(k)| \geqslant M|k|^{-s_3-\varepsilon}, \tag{9}$$

где $0 < \varepsilon < 1$, и пусть $\varphi_q(x)$, $\psi_q(x) \in \overline{H}_\sigma(\Omega)$, $q = \overline{1,n}$; $\sigma = 2n^2p^2 + np - 1 + s_1 + s_2 + s_3$. Тогда существует решение задачи (1) — (3) из пространства $\overline{H}_{2n}^{2n}(D_\tau)$, непрерывно зависящее от δ, φ_q и ψ_q.

Доказательство. Решение задачи (1) — (3) ищем в виде векторного ряда

$$u(t,x) = \sum_k u_k(t) \exp\{(ik, x)\}, \tag{10}$$

где

$$u_k(t) = \sum_{i,r,i=1}^{np} (-1)^{r+j} \frac{g_{l(j)}(\lambda_j)\,[\beta_{r,i}\alpha_{ij}(C_{r,k}\,\mathrm{sh}\,\lambda_j(\tau\pi - t) + D_{r,k}\,\mathrm{sh}\,\lambda_j t)]}{A(k)\,B(k)\,\mathrm{sh}\{\tau_j(k)\tau\pi\}}. \tag{11}$$

Здесь $\alpha_{i,j}$ и $\beta_{r,i}$ — алгебраические дополнения к элементам с соответствующими индексами определителей $A(k)$ и $B(k)$; $C_{r,k}$ и $D_{r,k}$ — произвольные константы.

Аналогично [4] доказывается, что формулы (10), (11) дают 2π-периодическое по x решение системы уравнений (1). Удовлетворяя граничным условиям (2), (3), получаем для определения $C_{r,k}$ и $D_{r,k}$ систему неравенств

$$(2\pi)^m \sum_k \sum_{l=1}^p |C_{l+p(j-1),k} - \varphi_{l+p(j-1),k}|^2 \leqslant \delta^2, \quad j = \overline{1, n}, \tag{12}$$

$$(2\pi)^m \sum_k \sum_{l=1}^p |D_{l+p(j-1),k} - \psi_{l+p(j-1),k}|^2 \leqslant \delta^2, \quad j = \overline{1, n}, \tag{13}$$

где $\varphi_{l+p(j-1),k}$ и $\psi_{l+p(j-1),k}$, $l = \overline{1, p}$, — коэффициенты Фурье вектор-функций $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(x)$. Выберем $C_{l+p(j-1),k}$, $D_{l+p(j-1),k}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$||C_{l+p(j-1),k}| - |\varphi_{l+p(j-1),k}|| \leqslant |C_{l+p(j-1),k} - \varphi_{l+p(j-1),k}| \leqslant$$
$$\leqslant \delta \left(\sqrt{(2\pi)^m \frac{p(p+1)}{2} R} \, |k|^r \right)^{-1}, \tag{12'}$$

$$||D_{l+p(j-1),k}| - |\psi_{l+p(j-1),k}|| \leqslant |D_{l+p(j-1),k} - \psi_{l+p(j-1),k}| \leqslant$$
$$\leqslant \delta \left(\sqrt{(2\pi)^m \frac{p(p+1)}{2} R} \, |k|^r \right)^{-1}, \tag{13'}$$

$$R = \sum_k |k|^{-2r}, \quad r = m/2 + \varepsilon/2, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Легко видеть, что выбранные таким образом $C_{l+p(j-1),k}$ и $D_{l+p(j-1),k}$ удовлетворяют неравенствам (12), (13) и формулы (10), (11) дают решение рассматриваемой задачи. При этом выполняется оценка

$$\| u(t, x) \|^2_{H^{2n}_{2n}(D_\tau)} \leqslant C \left[\sum_{j=1}^n (\| \varphi_j(x) \|^2_{H_\sigma(\Omega)} + \| \psi_j(x) \|^2_{H_\sigma(\Omega)}) + \delta^2 \right],$$

где $C = C(n, m, p) > 0$. Теорема доказана.

Замечание 1. Очевидно, что неравенствами (12′), (13′) не исчерпываются все значения коэффициентов $C_{l+p(j-1),k}$ и $D_{l+p(j-1),k}$, для которых формулы (10), (11) дают решение задачи (1)—(3).

Рассмотрим теперь вопрос о выполнимости оценок (7)—(9). Обозначим через $a = (a_1, \ldots, a_{\gamma_1})$, $b = (b_1, \ldots, b_{\gamma_2})$, $c = (c_1, \ldots, c_{\gamma_3})$ векторы, составленные соответственно из всех элементов матриц $A_{0,s'}$ системы (1), $B_s^{(j)}$ условий (2) и коэффициентов $d_s^{i,l(j)}$ фундаментальной системы решений системы уравнений (1′). Здесь $\gamma_1 = p^2\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_1$ — количество решений $s' \in \mathbf{Z}_+^m$ неравенства $|s'| \leqslant 2n$; $\gamma_2 = np^2\hat{\gamma}_2$, $\hat{\gamma}_2$ — количество решений $s \in \mathbf{Z}_+^{m+1}$ неравенства $|s| \leqslant 2n - 2$; $\gamma_3 = np^2\hat{\gamma}_3$, $\hat{\gamma}_3$ — количество решений $s \in \mathbf{Z}_+^{m+1}$ неравенства $|s| \leqslant 2n(p-1)$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Для почти всех (в смысле меры Лебега в $\mathbf{R}^{\gamma_1+1}$) векторов $\hat{a} = (a, \tau)$ неравенства (7) выполняются при $s_1 = m - 2np$ для всех $k \in \mathbf{Z}^m$ таких, что $|k| > K_1(\hat{a})$.*

Теорема 3. *Для почти всех (в смысле меры Лебега в $\mathbf{R}^{\gamma_2}$) векторов b неравенство (9) выполняется при $s_3 = (m - 2n + 1)np$ для всех $k \in \mathbf{Z}^m$ таких, что $|k| > K_2(b)$.*

Теорема 4. *Для почти всех (в смысле меры Лебега в пространстве $\mathbf{R}^{\gamma_3}$) векторов c оценка (8) справедлива при $s_2 = (m - 2np + n + 1)np$ для всех $k \in \mathbf{Z}^m$ таких, что $|k| > K_3(c)$.*

Доказательства теорем 2—4 проводятся по схеме доказательств соответственно теорем 2.6 гл. 3, 7.7 гл. 5, 3. 5 гл. 5 в [3].

3. Устойчивость задачи. Предположим, что выполняется

условие

$$\sum_{|s|\leqslant 2n-1}\left\|\frac{\partial^{|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x^{s'}}\right\|^2_{\overline{H}_0(\Omega)}\leqslant E,\ t>0,\ s_0\neq 2p,\ p=\overline{1,n-1},\tag{14}$$

которое является обобщением условия ограниченности полной энергии для уравнения колебания струны.

Обозначим через Γ_δ множество всех решений задачи (1)—(3), (14),

$$\operatorname{Diam}\Gamma_\delta\overset{\text{def}}{=}\sup_{v,w\in\Gamma_\delta}\|v-w\|_{\overline{H}^{2n-2}_{2n-2}(D_\alpha)}.$$

Определение. *Для фиксированных* α, A_s *и* $B_s^{(j)}$ *задача* (1)—(3), (14) *устойчива, если* $\lim\limits_{\delta\to 0}\operatorname{Diam}\Gamma_\delta=0$ *для любых* E, φ_j *и* ψ_j, $j=\overline{1,n}$.

В случае уравнения колебания струны вопрос об устойчивости задачи Дирихле в прямоугольнике $\{0<x<\pi,\ 0<t<\alpha\pi\}$ исследовался в [5], где показано, что иррациональность числа α является необходимым и достаточным условием устойчивости.

Теорема 5. *Для устойчивости задачи* (1)—(3), (14) *необходимо, чтобы уравнения*

$$\lambda_j^2(k)\alpha^2+r^2=0,\ \ B(k)=0,\ \ j=\overline{1,np},\tag{15}$$

не имели решений в целых числах $k_1,\ldots,k_m$, r.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 4 в [5].

Замечание 2. В случае, когда $m=1$ и система уравнений (1) строго гиперболическая по Петровскому, а все матрицы $B_s^{(j)}$ нулевые, кроме $B_{s_0,0}=I$, где I — единичная матрица, условия теоремы 5 являются также достаточными для устойчивости задачи (1)—(3), (14).

Теорема 6. *Пусть выполнены оценки* (7)—(9) *при* $\tau=\alpha$. *Тогда задача* (1)—(3), (14) *устойчива.*

Доказательство. Если $v_1, v_2\in\Gamma_\delta$, то существуют τ_1, τ_2 такие, что

$$\left\|\sum_{|s|\leqslant 2n-2}B_s^{(j)}\frac{\partial^{|s|}v_i(\tau_i\pi,x)}{\partial t^{2s_0}\partial x^{s'}}-\psi_j(x)\right\|_{\overline{H}_0(\Omega)}\leqslant\delta,\ \ |\tau_i-\alpha|\leqslant\delta,$$
$$i=\overline{1,2};\ \ j=\overline{1,n}.\tag{16}$$

Обозначим $u(t,x)=v_1(t,x)-v_2(t,x)$. На основании (16) и аналога теоремы о конечном приращении [6] получаем неравенства

$$\left\|\sum_{|s|\leqslant 2n-2}B_s^{(j)}\frac{\partial^{|s|}u(0,x)}{\partial t^{2s_0}\partial x^{s'}}\right\|_{\overline{H}_0(\Omega)}\leqslant 2\delta,\ \ j=\overline{1,n},\tag{17}$$

$$\left\|\sum_{|s|\leqslant 2n-2}B_s^{(j)}\frac{\partial^{|s|}u(\alpha\pi,x)}{\partial t^{2s_0}\partial x^{s'}}\right\|_{\overline{H}_0(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant 2\delta\left(\pi\sqrt{E}\sum_{l=1}^{p}\left|\sum_{r=1}^{p}\sum_{|s|\leqslant 2n-2}b_s^{l+p(j-1),r}\right|+1\right),\ \ j=\overline{1,n},\tag{18}$$

где $b_s^{l+p(j-1),r}$, $l,r=\overline{1,p}$, — элементы матриц $B_s^{(j)}$.

Заметим, что в случае, когда все λ — корни уравнения (4) различные, любое 2π-периодическое решение системы (1) можно представить в виде ряда (10) с коэффициентами

$$u_k(t)=\sum_{j,r,i=1}^{np}(-1)^{r+l}g_{l(j)}(\lambda_j)\frac{\beta_{r,i}\alpha_{i,j}C_{r,k}\operatorname{sh}\lambda_j(\alpha\pi-t)}{A(k)B(k)\operatorname{sh}\lambda_j\alpha\pi}-$$
$$-2\sum_{j=1}^{np}D_{j,k}g_{l(j)}(\lambda_j)\operatorname{sh}\lambda_j t,\tag{19}$$

так как формула (19) дает общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1′).

Учитывая (19), из неравенств (17), (18) получаем

$$\sum_k \sum_{l=1}^{p} |C_{l+p(j-1),k}|^2 \leqslant 2^{2-m}\pi^{-m}\delta^2, \quad j=\overline{1,n}, \tag{20}$$

$$\sum_k \sum_{q=1}^{p} \left| \sum_{r=1}^{p} \sum_{|s|\leqslant 2n-2} \sum_{j=1}^{np} b_s^{q+p(\nu-1),r} (ik)^{s'} \lambda_j^{2s_0} g_{r,l(j)}(\lambda_j) \operatorname{sh} \lambda_j \alpha\pi D_{j,k} \right| \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-m}\delta^2 \left(\pi \sqrt{E} \sum_{q=1}^{p} \left| \sum_{r=1}^{p} \sum_{|s|\leqslant 2n-2} b_s^{q+p(\nu-1),r} \right| + 1 \right), \quad \nu=\overline{1,n}. \tag{21}$$

На основании (14) имеем

$$\| u_j(t,x) \|^2_{H_{2n-2}(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{|k|\leqslant K} |k|^{4n-4} |u_{j,k}(t)|^2 + \frac{E}{C_2 K^2}, \tag{22}$$

где $j=\overline{1,p}$; $K\in \mathbf{N}$, C_1, $C_2>0$.

Неравенства (20) — (22) дают возможность оценить $\operatorname{Diam}\Gamma_\delta$:

$$\operatorname{Diam}\Gamma_\delta \leqslant C_4 E\,(\delta^{4/(s(s+2))} + \delta^{2/s})^s + \frac{E}{C_2}\,(C_3\delta^{-2/(s+2)}+1)^{-2},$$

$s=np\,(2m+n-2)+m$; C_3 и C_4 — положительные константы. Переходя к пределу в последнем неравенстве при $\delta\to 0$, получаем утверждение теоремы.

Наконец, заметим, что с помощью метода регуляризации по Тихонову можно построить приближенное решение рассматриваемой задачи, устойчивое к малым изменениям функций $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(x)$.

1. *Фиголь В. В.* Об устойчивости задачи Дирихле для гиперболических уравнений // Общая теория граничных задач. Киев : Наук. думка, 1983.— С. 298—299.
2. *Пташник Б. И.*, *Фиголь В. В.* Краевая задача с приближенными граничными данными для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Численные методы решения задач математической физики : Тез. докл. Всесоюз. школы молодых ученых.— М. : Знание, 1983.— ч. 1.— С. 25—26.
3. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.— Киев : Наук. думка, 1984.— 264 с.
4. *Пташник Б. И.* Об одной краевой задаче для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1976.— С. 66—71.
5. *Papi F. G.* On the stability of the Dirichlet problem for the vibrating string equation Ann. Scuola norm. super. Pisa // Sci. fis e mat., 1979.— **6**, N 4.— P. 719—728.
6. *Гаевский Х.*, *Грегер К.*, *Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1978.— 336 с.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов Получено 12.11.84