УДК 517.928

А. М. Самойленко, Р. И. Петришин

Исследование устойчивости некоторых двухчастотных систем

В настоящей статье с помощью метода усреднения изучается вопрос об оценке времени устойчивости положения равновесия усредненных уравнений в предположении, что исходной колебательной системе свойственно явление резонанса частот.

Проблема обоснования метода усреднения на конечном и на бесконечном интервалах времени для колебательных систем с переменными частотами исследовалась многими авторами [1—7].

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$dx/dt = \varepsilon a(x, \varphi), \ d\varphi/dt = \omega(\varepsilon t) + \varepsilon b(x, \varphi), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in R^2$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \ll 1$ — малый положительный параметр; действительные вектор-функции $a(x, \varphi)$ и $b(x, \varphi)$ определены и 2π-периодичны по φ в области $D \times R^2$.

Наряду с (1) рассмотрим усредненную по угловым переменным φ систему

$$d\bar{x}/dt = \varepsilon \bar{a}(\bar{x}), \ \bar{a}(\bar{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} a(\bar{x}, \varphi)\, d\varphi_1 d\varphi_2. \tag{2}$$

Пусть $x_0 \in D$ — положение равновесия усредненных уравнений, т. е. $\bar{a}(x_0) = 0$.

Предположим, что $\omega_i(\varepsilon t) \in C^2$, $t \geqslant 0$, $i = 1, 2$, и, кроме того,

$$\omega_2(\varepsilon t) \geqslant d_1, \ \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\right| \geqslant \varepsilon d_2 \qquad \forall t \geqslant 0, \tag{3}$$

где $d_i = \mathrm{const} > 0$, $i = 1, 2$. Потребуем также, чтобы функция $\omega_2(\varepsilon t)$ удовлетворяла хотя бы одному из условий

$$\left|\frac{d\omega_2}{dt}\frac{1}{\omega_2^2}\right| \leqslant \varepsilon d_3, \quad \frac{d\omega_2}{dt} \leqslant 0, \quad \frac{d\omega_2}{dt} \geqslant 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{4}$$

Следующая лемма устанавливает оценку времени прохождения системы (1) через окрестность резонанса.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (3) *и* $k = (k_1, k_2)$ — *вектор с целочисленными координатами,* $|k| \equiv |k_1| + |k_2| > 0$. *Тогда для всех* $t \geqslant 0$, *за исключением, быть может, временного отрезка, длина которого не превышает* $2\mu\varepsilon^{-1}$, $\mu < 1/d_2$, *функция* $(k, \omega(\varepsilon t)) \equiv k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ *удовлетворяет неравенству* $|(k, \omega(\varepsilon t))| \geqslant d_1 d_2 \mu$.

Доказательство. Пусть $(k, \omega(\varepsilon t_k)) = 0$. Из (3) следует, что в этом случае $k_1 \neq 0$, и функция $\omega_1(\varepsilon t)/\omega_2(\varepsilon t) + k_2/k_1$ монотонна, поэтому

$$|(k, \omega(\varepsilon t)| = |k_1\omega_2(\varepsilon t)| \left|\frac{\omega_1(\varepsilon t)}{\omega_2(\varepsilon t)} + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega_1(\varepsilon t_k)}{\omega_2(\varepsilon t_k)} + \frac{k_2}{k_1}\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon d_1 d_2 |t - t_k| \geqslant \mu d_1 d_2$$

при $|t-t_k|\geqslant \mu\varepsilon^{-1}$. Пусть теперь $(k, \omega(\varepsilon t))\neq 0$ $\forall t\geqslant 0$. Если $k_1=0$, то $|(k,\omega(\varepsilon t))|=|k_2|\omega_2(\varepsilon t)\geqslant d_1\geqslant d_1 d_2\mu$. Если же $k_1\neq 0$, то $\forall t\in[\mu\varepsilon^{-1},\infty)$ имеем $|(k,\omega)|\geqslant d_1 d_2\mu$. Лемма доказана.

Рассмотрим далее бесконечно дифференцируемую функцию $h_k(\varepsilon t)$, $t\in R$, которая удовлетворяет условиям $h_k(\varepsilon t)\equiv 1$ при $|t-t_k|\leqslant\mu\varepsilon^{-1}$; $h_k(\varepsilon t)\equiv 0$ при $|t-t_k|\geqslant 2\mu\varepsilon^{-1}$; $0\leqslant h_k(\varepsilon t)\leqslant 1$ $\forall t\in R$; $\left|\dfrac{d}{dt}h_k(\varepsilon t)\right|\leqslant \varepsilon\mu^{-1}d_4 f_k(\varepsilon t)$, где $d_4=\mathrm{const}>0$, а $f_k(\varepsilon t)\equiv 1$ при $\mu\varepsilon^{-1}\leqslant|t-t_k|\leqslant 2\mu\varepsilon^{-1}$, $f_k(\varepsilon t)\equiv 0$ при $|t-t_k|<\mu\varepsilon^{-1}$ и $|t-t_k|>2\mu\varepsilon^{-1}$. Здесь $t_k\geqslant 0$ — точка, для которой $(k,\omega(\varepsilon t_k))=0$. Если же $(k,\omega(\varepsilon t))\neq 0$ $\forall t\geqslant 0$, то положим $t_k=0$. Существование такой функции $h_k(\varepsilon t)$ следует из [8].

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (3) *и* (4), *а* $\alpha>0$ — *произвольное. Тогда для всех* $T\geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$A(T)\equiv\int_0^T e^{-\alpha\varepsilon(T-\tau)}\left|\frac{d}{d\tau}\frac{1-h_k(\varepsilon\tau)}{(k,\omega(\varepsilon\tau))}\right|d\tau\leqslant\frac{1}{\mu}\left[\frac{4+2d_4}{d_1d_2}+\right.$$

$$\left.+\,d_1\max\{(d_2)^{-1};\ \alpha(d_3)^{-1}\}\right]\equiv d_5\mu^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $k_1\neq 0$. Тогда

$$A(T)\leqslant\frac{2d_4}{d_1d_2\mu}+\frac{4}{d_1d_2\mu}+\frac{1}{d_1\mu}\int_0^T e^{-\varepsilon\alpha(T-\tau)}\left|\frac{d\omega_2}{d\tau}\right|\omega_2^{-2}(\varepsilon\tau)\,d\tau.$$

Если $\dfrac{d}{dt}(\omega_2)\geqslant 0$, то $J(T)\equiv\displaystyle\int_0^T e^{-\varepsilon\alpha(T-\tau)}\frac{d\omega_2}{d\tau}\,\omega_2^{-2}d\tau\leqslant\frac{1}{d_2}$, если же $\left|\omega_2^{-2}\dfrac{d}{dt}(\omega_2)\right|\leqslant\varepsilon d_3$, то $J(T)\leqslant\dfrac{d_3}{\alpha}$. Объединяя полученные неравенства, находим $A(T)\leqslant d_5\mu^{-1}$. Аналогично получается оценка для $A(T)$ в случае $k_1=0$. Лемма доказана.

Предположим, что

$$\bar a(x)\in C_x^2(D,d_6),\ a(x,\varphi)\in C_\varphi^{l_1}(D\times R^2,d_7),\ \frac{\partial a(x,\varphi)}{\partial x}\in C_\varphi^{l_2}(D\times R^2,d_8),$$

$$l_1\geqslant 4,\ l_2\geqslant 3,\ b(x,\varphi)\in C_x^1(D\times R^2,d_9)\cap C_\varphi^1(D\times R^2,d_9). \tag{5}$$

Здесь через $C_x^l(D\times R^2,d)$ ($C_\varphi^l(D\times R^2,d)$) обозначено множество вектор-функций, каждая компонента которых непрерывна вместе со всеми своими частными производными по $x(\varphi)$ до порядка l включительно и ограничена постоянной d в области $D\times R^2$.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *такова, что:*

1) *выполняются условия* (3)—(5);

2) $\bar a(x_0)=0$, *причем* $x_0\in D$ *вместе со своей* ρ-*окрестностью*;

3) $\mathrm{Re}\,\lambda_j\leqslant-\alpha<0$, *где* λ_j — *собственные числа* $H=\partial\bar a(x_0)/\partial x$. *Тогда существуют постоянные* $d>0$ *и* $\bar\varepsilon_0>0$ *такие, что для всех* $t\geqslant 0$ *и* $0<\varepsilon\leqslant\bar\varepsilon_0$ *имеет место оценка*

$$\|x(t,\varepsilon)-x_0\|\leqslant d\sqrt{\varepsilon}. \tag{6}$$

Здесь $(x(t,\varepsilon),\ \varphi(t,\varepsilon))$ — *произвольное решение системы* (1), *для которого* $\|x(0,\varepsilon)-x_0\|\leqslant d_{10}\sqrt{\varepsilon}$, $\|x\|=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$.

Доказательство. Предположим, что при $d_{10}\sqrt{\varepsilon}<\rho_1/4$ и $t\in[0,T(\varepsilon)]$ кривая $x=x(t,\varepsilon)$ не выходит за пределы $\rho_1/2$-окрестности точки x_0. Число $\rho_1 < \rho$ выберем позже. Сделаем в (1) замену

$$x = x_0 + y + \varepsilon U(x, \varphi, \varepsilon t) \equiv x_0 + y + \varepsilon \sum_{|k|>0} a_k(x) \frac{1 - h_k(\varepsilon t)}{i(k, \omega(\varepsilon t))} e^{i(k,\varphi)}, \tag{7}$$

где $a_k(x)$ — коэффициенты Фурье функции $a(x, \varphi)$. Тогда $y(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon Hy + \varepsilon F(y) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon\delta(x, \varphi, \varepsilon t) + \varepsilon^2 G(x, \varphi, \varepsilon t),$$

$$F(y) = \bar{a}(y + x_0) - Hy, \quad G(x, \varphi, \varepsilon t) = \frac{\partial \bar{a}(\xi)}{\partial x} U - \frac{\partial U}{\partial x} a - \tag{8}$$

$$- \frac{\partial U}{\partial \varphi} b, \quad \delta(x, \varphi, \varepsilon t) = \sum_{|k|>0} a_k(x) h_k(\varepsilon t) e^{i(k,\varphi)},$$

ξ — некоторая точка из $\rho_1/2$-окрестности точки x_0. Очевидно, что $\|F(y)\| \leqslant \leqslant \|y\|^2 n^3 d_4$. Учитывая предположение (5) и лемму 1, при $l_1 \geqslant 4$ и $l_2 \geqslant 3$ получаем неравенства

$$\|U(x, \varphi, \varepsilon t)\| \leqslant \sum_{|k|>0} \sup_D \|a_k\| \frac{1}{d_1 d_2 \mu} \leqslant \frac{1}{d_1 d_2 \mu} \sum_{|k|>0} 2^{l_1} n d_7 |k|^{-l_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{l_1} n d_7}{d_1 d_2 \mu} \sum_{s=1}^{\infty} s^{-l_1} \left(\sum_{|k|=s} s^0 \right) \leqslant \frac{n d_7}{d_1 d_2 \mu} 2^{l_1+2} \left(1 + \int_1^{\infty} z^{1-l_1} dz \right) =$$

$$= \frac{1}{\mu} \frac{n d_7}{d_1 d_2} 2^{l_1+2} \left(1 + \frac{1}{l_1 - 2} \right) \equiv \frac{1}{\mu} d_{11},$$

$$\|G(x, \varphi, \varepsilon t)\| \leqslant n^2 d_6 d_{11} \frac{1}{\mu} + n^2 \frac{n d_7}{d_1 d_2} 2^{l_2+2} d_8 \left(1 + \frac{1}{l_2 - 2} \right) \frac{1}{\mu} +$$

$$+ d_9 \frac{n d_7}{d_1 d_2} \left(1 + \frac{1}{l_1 - 3} \right) 2^{l_1+3} \frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{\mu} d_{12}. \tag{9}$$

Пусть $\frac{\varepsilon}{\mu} d_{11} \leqslant \frac{1}{4} \rho_1$. Тогда непосредственно дифференцированием убеждаемся, что при $t \in [0, T(\varepsilon)]$ система (8) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$y(t, \varepsilon) = e^{\varepsilon Ht} y(0, \varepsilon) + \varepsilon \int_0^T e^{\varepsilon H(t-\tau)} \left[F(y) + \delta - \frac{\partial U}{\partial \tau} + \varepsilon G \right] d\tau, \tag{10}$$

причем $\|y(0, \varepsilon)\| \leqslant d_{10} \sqrt{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\mu} d_{11}$. Так как собственные числа λ_j матрицы H удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_j \leqslant -\alpha < 0$, то существует постоянная K такая, что

$$\|e^{\varepsilon H(t-\tau)}\| \leqslant K e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\alpha(t-\tau)}. \tag{11}$$

Учитывая неравенства (9), (11) и используя лемму 2, из (10) получаем неравенство

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)} \|y(t, \varepsilon)\| \leqslant K n^3 d_4 \frac{3}{4} \rho_1 \max_{0 \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)} \|y(t, \varepsilon)\| + \frac{\varepsilon}{\mu} K \left(d_{11} + \right.$$

$$\left. + \frac{d_{12}}{\alpha} + d_1 d_2 d_5 d_{11} \right) + 4\mu K d_1 d_2 d_{11} + \sqrt{\varepsilon} K d_{10}.$$

Положим $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, $\frac{1}{2} K \left(d_{10} + d_{11} + \frac{1}{\alpha} d_{12} + d_1 d_2 d_5 d_{11} + 4 d_1 d_2 d_{11} \right) + d_{11} = d$, $\rho_1 = \min \left\{ \frac{1}{2} \rho;\ \frac{2}{3n^3 K d_4} \right\}$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1 = \min \left\{ \varepsilon_0;\ d_2^{-2};\ \left(\frac{\rho_1}{4d_{10}} \right)^2; \left(\frac{\rho_1}{4d_{11}} \right)^2 \right\}$.

Возвращаясь к переменным x по формуле (7), выводим оценку (6) $\forall t \in [0, T(\varepsilon)]$. Из (6) и условий гладкости правых частей системы (1) следует, что при $0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}_0 = \min \{ \varepsilon_1;\ \frac{1}{4} \rho_1^2 d^{-2} \}$ решение $(x(t, \varepsilon), \varphi(t, \varepsilon))$ можно продолжить для всех $t \geqslant 0$. Оценка (6) при этом не изменяется, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Предположения на функцию $\omega_2(\varepsilon t)$ можно несколько ослабить. Так, неравенство $\left| \omega_2^{-2} \frac{d}{dt} (\omega_2) \right| \leqslant \varepsilon d_3$ можно заменить неравенством $\left| \omega_2^{-2} \frac{d}{dl} (\omega_2) \right| \leqslant e^{\varepsilon \alpha_1 t} \varepsilon C_1$, где $C_1 = \mathrm{const} > 0$, $\alpha_1 < \alpha = -\operatorname{Re} \lambda_j$, $j = \overline{1, n}$, а предположение о монотонности $\omega_2(\varepsilon t)$, $t \in [0, \infty)$, — предположением о монотонности $\omega_2(\varepsilon t)$ на конечном числе интервалов, которые покрывают $[0, \infty)$. При этом изменится только постоянная d в оценке (6).

Рассмотрим случай, когда среднее функции $a(x, \varphi)$ по угловым переменным φ тождественно равно нулю в области D, т. е. $\bar{a}(x) \equiv 0\ \forall x \in D$. В этом случае установим экспоненциальную оценку времени устойчивости системы (1).

Будем считать, что функция $\omega_2(\tau)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\omega_2(\tau)} \leqslant d_{13} \ln t + d_{14}, \quad \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\omega_2(\tau)} \right) \right| d\tau \leqslant d_{15} \ln t + d_{16}, \tag{12}$$

где $d_i = \mathrm{const} > 0$, $i = 13, 14, 15, 16$, $t \geqslant 1$.

Лемма 3. *Пусть выполняются* (3), (12) *и* $0 < \mu \leqslant \min \{1/2;\ d_2^{-1}\}$. *Тогда для всех* $T \geqslant 1/\varepsilon$

$$M(T) \equiv \int_0^T \frac{1 - h_k(\varepsilon t)}{|(K, \omega(\varepsilon t))|} dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(d_{14} + \frac{1}{d_4} \right) + \left(d_{13} + \frac{2}{d_1 d_2} \right) \ln \varepsilon T - \frac{2}{d_1 d_2} \ln \mu \right],$$

$$N(T) \equiv \int_0^T \left| \frac{d}{dt} \frac{1 - h_k(\varepsilon t)}{(k, \omega(\varepsilon t))} \right| dt \leqslant \frac{2 + d_4}{d_1 d_2 \mu} + \frac{1}{\mu d_2} (d_{15} \ln \varepsilon T + d_{16}),$$

а для всех $0 \leqslant T \leqslant 1/\varepsilon$

$$M(T) \leqslant \frac{1}{\varepsilon d_1} \max \left\{ 1;\ \frac{1}{d_2} \right\}, \quad N(T) \leqslant \frac{1}{\mu d_1 d_2} \left(d_4 + \frac{\bar{d}}{d_1} \right), \quad \bar{d} = \max_{[0,1]} \left| \frac{d\omega_2}{d\tau} \right|.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Теорема 2. *Пусть:*

1) *выполняются условия* (3), (5), (12);

2) $\bar{a}(x) \equiv 0\ \forall x \in D$;

3) x_0 — *произвольная точка, содержащаяся в* D *вместе со своей* ρ-*окрестностью.*

Тогда существуют постоянные $\varepsilon_2 > 0$ *и* $d_{17} > 0$ *такие, что* $\forall t \in [0, T(\varepsilon)]$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, *справедливо неравенство*

$$\| x(t, \varepsilon) - x_0 \| \leqslant d_{17} \varepsilon^{\beta}. \tag{13}$$

Здесь β — *произвольное число, удовлетворяющее неравенствам* $0 < \beta \leqslant 1/2$; $T(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} e^{\varepsilon^{2\beta - 1}}$, $\| x(0, \varepsilon) - x_0 \| \leqslant d_{10} \varepsilon^{\beta}$.

Доказательство. Система уравнений (10) в рассматриваем
случае имеет вид

$$y(t, \varepsilon) = y(0, \varepsilon) + \varepsilon \int_0^t \left[\delta(x, \varphi, \varepsilon\tau) - \frac{\partial U}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} a - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial \varphi} b \right] d\tau. \quad (1$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (14), использовав при эт лемму 3. Тогда при $\mu = \varepsilon^{\beta}$ для произвольного $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ будем иметь

$$\| y(t, \varepsilon) \| \leqslant d_{18}\varepsilon^{\beta}, \; d_{18} = d_{10} + 4d_1d_2d_{11} + \\ + d_2d_{12} \max\{1; d_?^{-1}\} + d_{11}(d_4 + \bar{d}/d_2) + d_{11}. \quad (1$$

Если же $t > 1/\varepsilon$, то

$$\| y(t, \varepsilon) \| \leqslant d_{19}\varepsilon^{\beta} + d_{20}\varepsilon^{1-\beta} \ln \varepsilon t, \; d_{19} = d_{10} + 4d_1d_2d_{11} + \\ + d_{11} + d_1d_2 [d_{12}d_{14} + d_{12}/d_4 + 2d_{12}/(d_1d_2) + (2 + d_4) d_{11}/(d_1d_2) + \\ + d_{11}d_{16}/d_2], \; d_{20} = d_1d_{11}d_{15} + 2d_{12} + d_1d_2d_{12}d_{13}. \quad (1$$

Из неравенства (16) следует, что оценка (13) справедлива, если $\varepsilon^{1-\beta} \ln$ пропорционально ε^{β}, т. е. $T(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \exp(\varepsilon^{2\beta-1})$. При этом $d_{17} = d_{11}$ · $+ \max\{d_{18}; d_{19} + d_{20}\}$. Теорема доказана.

Замечание 2. Если вместо (12) на функцию $\omega_2(\varepsilon t)$ наложи более сильное предположение

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\omega_2(\tau)} \leqslant C, \quad \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\omega_2}\right) \right| d\tau \leqslant C, \quad C = \text{const} > 0,$$

то оценка (13) будет справедливой для всех $t \geqslant 0$.

Следующий пример свидетельствует о том, что условия (12) существе ны. Рассмотрим систему

$$dx/dt = \varepsilon(x \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2), \; d\varphi_1/dt = \varepsilon t, \; d\varphi_2/dt = 1, \\ x(0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0,$$

для которой выполняются все условия теоремы 2, за исключением перво неравенства в (12). Решая эту систему, находим

$$x(t, \varepsilon) = e^{\varepsilon \sin t} \int_0^t e^{-\varepsilon \sin \tau} \sin \tau d\tau.$$

Тогда при $t \sim \varepsilon^{-2}$ получаем $|x(t, \varepsilon) - x(0)| \geqslant \text{const} > 0$, т. е. оценка (1 нарушается.

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думк 1971.— 440 с.
2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных ура нений.— М. : Наука, 1979.— 304 с.
3. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М. : Наука, 1979.— 432 с.
4. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных с стем.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1971.— 508 с.
5. *Хапаев М. М.* Проблемы устойчивости в системах обыкновенных дифференциальных ура нений // Успехи мат. наук. — 1980.— 35, вып. 1.— С. 127—170.
6. *Нехорошев Н. Н.* Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систе близких к интегрируемым // Там же.— 1977.— 32, вып. 6.— С. 5—66.
7. *Самойленко А. М., Петришин Р. И.* Исследование некоторых резонансных систем Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 2.— С. 11—14.
8. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.— М. : Ми 1968.— 428 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев.
Черновиц. ун-т

Получено 19.09.