УДК 517.95

С. А. Ломов, В. Ф. Сафонов

Алгоритм нормальных форм в нелинейных сингулярно возмущенных системах с нестабильным спектром

Рассматривается сингулярно возмущенная система

$$\varepsilon y' = A(x)\, y + \varepsilon F(y, x) + h(x), \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \tag{1}$$

для которой не выполняются известные условия стабильности спектра $\{\lambda_j(x)\}$ предельного оператора $A(x)$ (см. [1]). Построение асимптотических решений в этом случае существенно отличается от случая, когда спектр указанного оператора стабилен. На этот факт обращалось внимание при рассмотрении линейных задач с нестабильным спектром (см. [2]). В настоящей работе предлагается алгоритм построения асимптотических решений системы (1), основанный на регуляризации задачи (1) с помощью нормальных дифференциальных форм. Впервые такая регуляризация проводилась в работе [4] (см. также [3, 5]).

Регуляризация с помощью нормальных форм является естественным обобщением общей идеи метода регуляризации [1] (идеи перехода в пространство бóльшей размерности) на системы с нестабильным спектром и системы с нетождественным резонансом.

Сформулируем условия, при которых будем рассматривать задачу (1). Пусть в системе (1) независимая переменная x изменяется на конечном отрезке $[0, a]$, $a > 0$, $F(y, x)$, y и $h(x)$ — вектор-функции размерности $n \times 1$, $A(x)$ — $n \times n$-матрица, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Будем предполагать, что:

Iа) элементы матрицы $A(x)$ и компоненты вектора $h(x)$ принадлежат пространству $C^\infty[0, a]$;

Iб) каждая компонента $F_j(y, x)$ вектора $F(y, x)$ представляется в виде

$$F_j(y, x) = \sum_{0 \leqslant |m| \leqslant N} F_j^{(m)}(x)\, y^m \equiv \sum_{m_1 + \ldots + m_n = 0}^{N} F_j^{(m_1, \ldots m_n)}(x)\, y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n},$$

где коэффициенты $F_j^{(m)}(x) \in C^\infty[0, a]$, $0 \leqslant |m| \leqslant N$, $0 \leqslant N < \infty$;

II) спектр $\{\lambda_j(x),\ j = \overline{1, n}\}$ оператора $A(x)$ удовлетворяет при каждом $x \in [0, a]$ требованиям:

а) $\lambda_1(x) = -(x - x_1)^{s_1} \ldots (x - x_r)^{s_r} k(x)$, $k(x) > 0$ (здесь x_j — фиксированные точки отрезка $[0, a]$, s_j — четные целые неотрицательные числа);

б) $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x)$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$;

в) $\lambda_j(x) \neq 0$, $j = \overline{2, n}$;

г) $\operatorname{Re} \lambda_j(x) \leqslant 0$, $j = \overline{1, n}$;

III) функция $h_0(x) \equiv (h(x), d_1(x))$, где $d_1(x)$ — собственный вектор оператора $A^*(x)$, соответствующий собственному значению $\overline{\lambda_1}(x) \equiv \lambda_1(x)$, удовлетворяет условиям $h_0^{(\sigma)}(x_j) = 0$, $\sigma = \overline{0, s_j - 1}$, $j = \overline{1, r}$.

При описанных условиях на спектр оператора $A(x)$ существует матрица $\mathbb{C}(x) \equiv (c_1(x), \ldots, c_n(x))$ со столбцами $c_j(x) \in C^\infty([0, a], \mathbb{C}^n)$ такая, что *

$$\mathbb{C}^{-1}(x)\, A(x)\, \mathbb{C}(x) = \Lambda(x) \equiv \operatorname{diag}(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)) \quad \forall x \in [0, a]. \tag{2}$$

Нарушение стабильности спектра оператора $A(x)$ здесь состоит в том, что собственное значение $\lambda_1(x)$ обращается в нуль в изолированных точках $x_j \in [0, a]$, $j = \overline{1, r}$. Условие III эквивалентно тому, что функция $h_0(x)$ представляется в виде $h_0(x) = (x - x_1)^{s_1} \ldots (x - x_r)^{s_r} h_1(x)$, где $h_1(x)$ — некоторая функция класса $C^\infty[0, a]$.

* Тождество (2) автоматически исключает точки поворота.

Ниже будет показано, что это условие вместе с условиями I и II обеспечивает разрешимость в целом (на отрезке $[0, a]$) исходной системы (1) (см. теорему 5). При нарушении условия III задача (1) может не иметь решения на отрезке $[0, a]$ (см. пример 1).

Отметим также следующее важное обстоятельство. Условие IIа нестабильности спектра $\{\lambda_j(x)\}$ оператора $A(x)$ приводит к тому, что в системе (1) всегда имеет место многоточечный резонанс вида

$$m_1^1\lambda_1(x_k) = \lambda_1(x_k),\ m_1^1 \geqslant 2,\ m_1^j\lambda_1(x_k) + \lambda_j(x_k) = \lambda_j(x_k),\ j = \overline{2, n},\ m^j \geqslant 1, \quad (3)$$

где m_1^1, $m_1^j \geqslant 0$ — целые числа, $k = \overline{1, r}$.

Однако в этой системе могут наблюдаться и резонансы более сложного типа, отличные от резонансов (3). В настоящем исследовании мы исключаем их, оставляя лишь резонансы типа (3), порождаемые условием IIа. В этом случае будем говорить, что в системе (1) наблюдается *слабый резонанс*. Рассмотрение более сложных типов резонанса может быть проведено по схеме, излагаемой ниже.

1. Регуляризация задачи. Обозначим через Γ_j следующие множества мультииндексов $m^j = (m_1^j, \ldots, m_n^j)$ $\left(m_k^j \geqslant 0\text{—целые числа}, (m, \lambda(x)) \equiv \right.$ $\left. \equiv \sum_{k=1}^{n} m_k\lambda_k(x),\ |m| \equiv \sum_{k=1}^{n} m_k\right)$:

$$\Gamma_1 = \{m^1: (m^1, \lambda(x_k)) = \lambda_1(x_k),\ |m^1| \geqslant 2,\ k = \overline{1, r}\},$$

$$\Gamma_j = (m^j: (m^j, \lambda(x_k)) = \lambda_j(x_k),\ |m^j| \geqslant 1,\ k = \overline{1, r}\},\ j = \overline{2, n}.$$

Поскольку в системе (1) наблюдается слабый резонанс (3), то Γ_1 состоит из мультииндексов вида $m^1 = (m_1^1, 0, \ldots, 0) \equiv m_1^1 e_1$, $m_1^1 \geqslant 2$, а множества Γ_j, $j = \overline{2, n}$, — из мультииндексов вида $m^j = (m_1^j, 0, \ldots, 1, \ldots, 0) \equiv$ $\equiv m_1^j e_1 + e_j$, $m_1^j \geqslant 1$, где через $e_s = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ обозначен s-й орт в $\mathbb{C}^n$.

Введем теперь вектор $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ регуляризирующих переменных, удовлетворяющий следующей системе в нормальной форме:

$$\varepsilon du/dx = \Lambda(x) u + \sum_{k=1}^{l+1} \varepsilon^k g_k(x, u),\ u(0, \varepsilon) = \overline{1}, \quad (4)$$

где $\overline{1} = \{1, \ldots, 1\}$, $g_k(x, u)$ — функции, являющиеся суммами резонансных мономов,

$$g_k(x, u) = g_k^{(0)}(x) e_1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m^j \in \Gamma_j} g_k^{(m^j)}(x) u^{m^j} e_j,$$

в которых $g_k^{(0)}(x)$ и $g_k^{(m^j)}(x)$ — скалярные функции класса $C^\infty[0, a]$. Свободный член $g_k^{(0)}(x)$ в g_k соответствует нулевому резонансу $0\cdot\lambda_1(x) = \lambda_1(x)$, $x = x_k$, $k = \overline{1, r}$. Функции g_k будут выбраны в процессе построения решений итерационных задач (см. ниже задачи (ε^k)). Правые части этих задач содержат конечное число мономов $h^{(m)}(x) u^m$ с $m \in \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j$ (резонансных мономов), порождаемых многочленной нелинейностью $F(y, x)$, поэтому суммы g_k будут состоять из конечного числа слагаемых, отличных от нуля.

Задаче (1) поставим в соответствие «расширенную» задачу

$$\varepsilon\partial\tilde{y}/\partial x + \partial\tilde{y}/\partial u \left[\Lambda(x) u + \sum_{k=1}^{l+1} \varepsilon^k g_k(x, u)\right] - A(x)\tilde{y} - \varepsilon F(\tilde{y}, x) =$$

$$= h(x),\ \tilde{y}(0, \overline{1}, \varepsilon) = y^0 \quad (5)$$

для функции $\tilde{y} = \tilde{y}(x, u, \varepsilon)$ переменных x, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и ε. Если $\tilde{y} = \tilde{y}(x, u, \varepsilon)$ — решение задачи (5), то его сужение на векторе $u = u(x, \varepsilon)$ регуляризирующих переменных, удовлетворяющих нормальной форме (4), будет точным решением исходной задачи (1). Определяя решение «расширенной» задачи (5) в виде ряда

$$\tilde{y}(x, u, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x, u),$$

получаем следующие итерационные задачи для коэффициентов этого ряда:

$$\mathscr{L} y_0(x, u) \equiv \partial y_0/\partial u \, \Lambda(x) u - A(x) y_0 = h(x), \; y_0(0, \bar{1}) = y^0, \qquad (\varepsilon_0)$$

$$\mathscr{L} y_1(x, u) = -\partial y_0/\partial x - \partial y_0/\partial u \, g_1(x, u) + F(y_0, x), \; y_1(0, \bar{1}) = 0, \; (\varepsilon^1)$$

. . . .

$$\mathscr{L} y_{k+1}(x, u) = -\partial y_k/\partial x - \partial y_0/\partial u \, g_{k+1}(x, u) -$$

$$- \sum_{j=1} \partial y_j/\partial u \, g_{k-j+1}(x, u) + P_k, \; y_{k+1}(0, \bar{1}) = 0. \qquad (\varepsilon^{k+1})$$

Здесь $P_k \equiv P_k(x, y_0, \ldots, y_k)$ — некоторые многочлены относительно $y_0, \ldots, y_k$; $k \geqslant 1$.

Опишем класс U решений итерационных задач (ε^k), $k \geqslant 0$.

Определение 1. *Будем говорить, что функция* $w(x, u) \equiv \{w_1, \ldots, w_n\} \in U$, *если она представляется в виде полинома по* u

$$w(x, u) = \sum_{\leqslant |m| \leqslant N} w^{(m)}(x) u^m \tag{6}$$

с векторными коэффициентами $w^{(m)}(x) \in C^\infty([0, a], \mathbb{C}^n)$ (N — *целое неотрицательное число*).

В пространстве U вводится скалярное (при каждом $x \in [0, a]$) произведение ($w, v \in U$)

$$\langle w, v \rangle \equiv \langle \sum_{\leqslant |m| \leqslant N_1} w^{(m)}(x) u^m, \sum_{\leqslant |m| \leqslant N} v^{(m)}(x) u^m \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\leqslant |m| \leqslant N_0} (w^{(m)}(x), v^{(m)}(x)),$$

где $(\cdot, \cdot)$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n_x$, $N_0 = \min(N_1, N_2)$.

Обозначим через $d_j(x)$ собственный вектор оператора $A^*(x)$, соответствующий собственному значению $\bar{\lambda}_j(x)$, $j = \overline{1, n}$. Системы $\{c_j(x)\}$ и $\{d_j(x)\}$ собственных векторов операторов $A(x)$ и $A^*(x)$ возьмем биортонормированными: $(c_i(x), d_j(x)) \equiv \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Изучим разрешимость итерационных задач в пространстве U.

2. Нормальная и однозначная разрешимость итерационных задач. Рассмотрим систему уравнений в частных производных вида

$$\mathscr{L} w(x, u) \equiv \frac{\partial w}{\partial u} \Lambda(x) u - A(x) w = h(x, u), \tag{7}$$

где $h(x, u)$ — некоторая известная вектор-функция. Каждая из итерационных задач (ε^k) имеет вид (7). Будем говорить, что в системе (7) наблюдается *слабый резонанс*, если спектр $\{\lambda_j(x)\}$ оператора $A(x)$ допускает лишь резонансные соотношения вида (3). Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть в системе* (7) *наблюдается слабый резонанс, вектор-функция* $h(x, u) \equiv \sum_{0 \leqslant |m| \leqslant N} h^{(m)}(x) u^m \in U$, *оператор* $A(x)$ *удовлетворяет условию* Ia, *а его спектр* $\{\lambda_j(x)\}$ — *условиям* IIa — IIв.

чае, когда выполняются равенства

$$D^{\sigma}(h^{(m^j)}, d_j)(x_k) = 0,\ \sigma = \overline{0, s_k - 1},\ k = \overline{1, r},\ 1 \leqslant m_1^j \leqslant N,\ j \in \{2, \dots, n\}. \tag{17}$$

Объединяя (16) и (17), находим условия (10), необходимые и достаточные для разрешимости уравнений (13) в классе $C^{\infty}([0, a], \mathbb{C}^{\lambda})$. Теорема доказана.

Замечание 1. При выполнении условий теоремы 1 система (7) имеет решение в классе U, представимое в виде

$$w(x, u) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{(h^{(0)}(x), d_j(x))}{\lambda_j(x)} c_j(x) + \sum_{j=1}^{n} [\gamma_j(x) c_j(x) + \tilde{w}^{e_j}(x)] u_j +$$

$$+ \sum_{m_1^1=2}^{N} \frac{(h^{m_1^1 e_1}(x), d_1(x))}{(m_1^1 - 1)\lambda_1(x)} c_1(x) u_1^{m_1^1} + \sum_{j=2}^{n} \sum_{m_1^j=1}^{N} \frac{(h^{m_1^j e_1 + e_j}(x), d_j(x))}{m_1^j \lambda_1(x)} c_j(x) u_1^{m_1^j} u_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \sum_{m^i \in \Gamma_i^N} \frac{(h^{(m^i)}(x), d_j(x))}{(m^i, \lambda(x)) - \lambda_j(x)} c_j(x) u^{m^i} +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant |m| \leqslant N, m \notin \cup \Gamma_j} [(m, \lambda(x)) I - A(x)]^{-1} h^{(m)}(x) u^m, \tag{18}$$

где $\gamma_j(x)$ — произвольные скалярные функции класса $C^{\infty}[0, a]$, $\tilde{w}^{e_j}(x)$ — частное решение системы (12) (здесь и всюду далее выражения типа $H(x)/\lambda_1(x) \equiv H(x)/\left(k(x) \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)^{s_j}\right)$ понимаются в предельном смысле).

Прежде чем перейти к формулировке условий однозначной разрешимости итерационных задач (ε^k) в классе U, вычислим решение $y_0(x, u)$ первой итерационной задачи (ε^0). Ее правая часть $h(x, u) \equiv h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, поэтому система (ε^0) имеет решение в классе U вида (см. (18))

$$y_0(x, u) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(0)}(x) c_j(x) u_j + y_0^{(0)}(x), \tag{19}$$

где $\gamma_j^{(0)}(x) \in C^{\infty}[0, a]$ — произвольные функции, $y_0^{(0)}(x)$ — гладкое решение системы (11) при $h^{(0)}(x) = h(x)$, т. е.

$$y_0^{(0)}(x) = \frac{(h(x), d_1(x))}{k(x) \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)^{s_j}} c_1(x) - \sum_{j=2}^{n} \frac{(h(x), d_j(x))}{\lambda_j(x)} c_j(x) \equiv$$

$$\equiv \frac{h_1(x)}{k(x)} c_1(x) - \sum_{j=2}^{n} \frac{(h(x), d_j(x))}{\lambda_j(x)} c_j(x). \tag{19'}$$

Подставляя в (19) значение $x = 0$ и учитывая, что $y_0(0, \bar{1}) = y^0$, будем иметь $(\gamma^{(0)} \equiv \{\gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_n^{(0)}\})$: $\mathbb{C}(0)\gamma^{(0)}(0) = y^0 - y_0^{(0)}(0)$, откуда находим начальные значения для функций $\gamma_j^{(0)}(x)$:

$$\gamma^{(0)}(0) = [(y^0, d_1(0)) - h_1(0)/k(0)] e_1 + \sum_{j=2}^{n} (y^0 + h(0)/\lambda_j(0), d_j(0)) e_j. \tag{20}$$

Для составления уравнений относительно $\gamma_j^{(0)}(x)$ перейдем к следующей задаче (ε^1). Для разрешимости этой задачи в классе U необходимо и достаточно, чтобы ее правая часть $h(x, u)$,

$$h(x, u) \equiv -\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j^{(0)}(x) c_j(x))' u_j - (y_0^{(0)}(x))' - \mathbb{C}(x) \Gamma_0(x) g_1(x, u) +$$

$$+ F(y_0^{(0)}(x), x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(y_0^{(0)}(x), x)}{\partial y} (\gamma_j^{(0)}(x) c_j(x)) u_j + \sum_{2 \leqslant |m| \leqslant N_1} f^{(m)}(x) u^m, \tag{21}$$

где

$$\Gamma_0(x) = \operatorname{diag}(\gamma_1^{(0)}(x), \ldots, \gamma_n^{(0)}(x)), \quad \sum_{2 \leqslant |m| \leqslant N_1} f^{(m)}(x) u^m \equiv F(y_0(x, u), x) -$$

$$- F(y_0^{(0)}(x), x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(y_0^{(0)}(x), x)}{\partial y} (\gamma_j^{(0)}(x) c_j(x)) u_j,$$

N_1 — некоторое натуральное число, удовлетворяла условиям (8)—(10). Функция $g_1(x, u)$, выбираемая в виде суммы резонансных мономов:

$$g_1(x, u) = g_1^{(0)}(x) e_1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m^j \in \Gamma_j^{N_1}} g_1^{(m^j)}(x) u^{m^j}, \tag{22}$$

позволит удовлетворить условиям (9) и (10) (см. ниже теорему 2). Условия (8) для правой части (21) системы (ε^1) приводят к уравнениям

$$-\gamma_j^{(0)\prime}(x) - (c_j'(x) - F_y'(y_0^{(0)}(x), x) c_j(x), \ d_j(x)) \gamma_j^{(0)}(x) = 0, \ j = \overline{1, n}.$$

Присоединяя к этим уравнениям начальные условия (20), определяем однозначно функции $\gamma_j^{(0)}(x)$:

$$\gamma_1^{(0)}(x) = [(y^0, d_1(0)) - h_1(0)/k(0)] \exp\left\{\int_0^x \mu_1(\tau) d\tau\right\},$$

$$\gamma_j^{(0)}(x) = (y^0 + h(0)/\lambda_j(0), \ d_j(0)) \exp\left\{\int_0^x \mu_j(\tau) d\tau\right\}, \tag{23}$$

где $\mu_j(x) \equiv -(c_j'(x) - F_y'(y_0^{(0)}(x), x) c_j(x), d_j(x))$, $j = \overline{1, n}$. Следовательно, решение (19) задачи (ε^0) в классе U определяется однозначно.

Перейдем теперь к формулировке условий однозначной разрешимости итерационных задач (ε^k) при $k \geqslant 1$. Запишем для этого две системы

$$\mathscr{L}w(x, u) = h(x, u), \ w(0, \overline{1}) = w^0, \tag{24}$$

$$\mathscr{L}v(x, u) = -\partial w/\partial x - \partial y_0(x, u)/\partial u g(x, u) - H(x, u), \tag{25}$$

где $h(x, u)$, $H(x, u)$ — известные вектор-функции, $g(x, u)$ — функция типа (22), подлежащая определению, w^0 — постоянный вектор. Такой вид имеют две последовательные задачи (ε^k) и (ε^{k+1}), $k \geqslant 1$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть все* $\gamma_j^{(0)}(0) \neq 0$, *выполнены условия теоремы* 1, *функция* $h(x, u) \in U$ *удовлетворяет условиям* (8) — (10), *а функция* $H(x, u) \in U$ — *условиям* (8).

Тогда существует функция $g(x, u)$ *вида*

$$g(x, u) = g^{(0)}(x) e_1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m^j \in \Gamma_j^N} g^{(m^j)}(x) u^{m^j} e_j, \tag{26}$$

в которой суммирование производится по всем резонансным мономам правой части системы (25), *такая, что* (25) *разрешима в классе* U. *При этом система* (24) *однозначно разрешима в классе* U.

Доказательство. Поскольку правая часть системы (24) удовлетворяет условиям (8)—(10), то эта система имеет решение в классе U в виде функции (18), в которой все коэффициенты, кроме $\gamma_j(x)$, определены однозначно. Для вычисления начальных условий $\gamma_j(0)=\gamma_j^0$ воспользуемся условием $w(0,\overline{1})=w^0$. Подставляя сюда (18), находим однозначно значения $\gamma_j(0)=\gamma_j^0$, $j=\overline{1,n}$. Та же подстановка, а также подстановка функции (26) в правую часть системы (25) приводят к уравнению

$$\mathscr{L}v=-\sum_{j=1}^{n}(\gamma_j(x)c_j(x))'u_j-\sum_{j=1}^{n}H^{e_j}(x)u_j-p_0(x)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{m^j\in\Gamma_j^N}p^{(m^j)}(x)u^{m^j}-\sum_{0\leqslant|m|\leqslant N,m\notin\cup\Gamma_j}p^{(m)}(x)u^m-\mathbb{C}(x)\Gamma_0(x)\Big(g^{(0)}(x)e_1+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{m^j\in\Gamma_j^N}g^{(m^j)}(x)u^{m^j}e_j\Big),\tag{27}$$

где

$$H(x,u)\equiv\sum_{j=1}^{n}H^{e_j}(x)u_j+p_0(x)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{m^j\in\Gamma_j^N}p^{(m^j)}(x)u^{m^j}+$$

$$+\sum_{0\leqslant|m|\leqslant N,m\notin\cup\Gamma_j}p^{(m)}(x)u^m.$$

Подчиняя правую часть системы (27) условиям (8), получаем уравнения

$$-\gamma_j(x)-(c_j(x),d_j(x))\gamma_j(x)-(H^{e_j}(x),d_j(x))=0,\ \ j=\overline{1,n},$$

которые в совокупности с начальными условиям $\gamma_j(0)=\gamma_j^0$, $j=\overline{1,n}$, найденными ранее, определяют функции $\gamma_j(x)$ однозначным образом. Следовательно, решение (18) системы (24) вычисляется однозначно.

Для разрешимости системы (25) в классе U необходимо и достаточно, чтобы кроме условий (8) (которым мы уже удовлетворили) выполнялись еще условия (см. (9) и (10))

$$D^\sigma(p_0+\gamma_1^{(0)}g^{(0)}c_1,\ d_1)(x_k)=0,\ \ \sigma=\overline{0,s_k-1},\ \ k=\overline{1,r};$$

$$D^\sigma(p^{(m^j)}+\gamma_j^{(0)}g^{(m^j)}c_j,\ d_j)(x_k)=0,\ \sigma=\overline{0,s_k-1},\ k=\overline{1,r},\ m^j\in\Gamma_j^N,\ \ j=\overline{1,n}.$$

Выполняя здесь скалярное умножение и обозначая

$$\psi_0(x)\equiv-(p_0(x),d_1(x))/\gamma_1^{(0)}(x),\ \ \psi^{(m^j)}(x)\equiv(p^{(m^j)}(x),\ d_j(x))/\gamma_j^{(0)}(x),\ \ j=\overline{1,n},$$

получаем (учитывая, что $\gamma_j^{(0)}(x)\neq0\ \ \forall x\in[0,a]$; см. (23)) интерполяционные условия

$$D^\sigma g^{(0)}(x_k)=D^\sigma\psi_0(x_k),\ \ \sigma=\overline{0,s_k-1},\ k=\overline{1,r},\ \ D^\sigma g^{(m^j)}(x_k)=$$

$$=D^\sigma\psi^{(m^j)}(x_k),\ \ \sigma=\overline{0,s_k-1},\ \ k=\overline{1,r},\ \ m^j\in\Gamma_j^N,\ \ j=\overline{1,n},\tag{28}$$

на функции $g^{(0)}(x)$ и $g^{(m^j)}(x)$. Выбрав в качестве $g^{(0)}(x)$ и $g^{(m^j)}(x)$ интерполяционные полиномы Лагранжа—Сильвестра (см., например, [6]), найдем эти функции однозначно, и значит, построим функцию (26) однозначным образом. Это позволит удовлетворить условиям (9), (10) и сделать систему (25) разрешимой в классе U. Теорема доказана.

Замечание 2. Теорема 2 доказана нами в предположении, что ни одна из компонент вектора (20) не равна нулю. Это ограничение несущественно. Его можно не налагать, если несколько иначе выбирать начальные условия для регуляризирующей системы (4). Другой прием, позволяющий не использовать это ограничение, заключается в построении асимптотического решения задачи (1) в предположении $\gamma_j^{(0)}(0) \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, и переходе в нем к пределу при $\gamma_j^{(0)}(0) \to 0$, $j = \overline{1, n}$.

3. Разрешимость в целом регуляризирующей системы. Применяя теоремы 1 и 2 к итерационным задачам (ε^k), $k = \overline{0, l+1}$, строим решения $y_0(x, u), \ldots, y_l(x, u)$ этих систем в классе U. При этом соответствующая регуляризирующая система (4) будет иметь вид

$$\varepsilon du_1/dx = \lambda_1(x) u_1 + \sum_{k=1}^{l+1} \varepsilon^k \left[g_k^{(0)}(x) + \sum_{m_1^1=2}^{N_{k_1}} g_k^{m_1^1 e_1}(x) u_1^{m_1^1} \right], \ u_1(0, \varepsilon) = 1,$$

(29)

$$\varepsilon du_j/dx = \lambda_j(x) u_j + \sum_{k=1}^{l+1} \varepsilon^k \sum_{m_1^j=1}^{N_{kj}} g_k^{m_1^j e_1 + e_j}(x) u_1^{m_1^j} u_j, \ u_j(0, \varepsilon) = 1, \ j = \overline{2, n},$$

где N_{k1}, N_{kj} — некоторые неотрицательные целые числа, $g_k^{m_1^1 e_1}$, $g^{m_1^j e_1 + e_j}(x)$ — полиномы Лагранжа—Сильвестра, определяемые условиями типа (28). Если первое уравнение (29) разрешимо в целом на отрезке $[0, a]$, то последние уравнения имеют решения в виде

$$u_j(x, \varepsilon) = \exp\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \left(\lambda_j(\tau) + \sum_{k=1}^{l+1} \varepsilon^k \sum_{m_1^j=1}^{N_{kj}} g_k^{m_1^j e_1 + e_j}(\tau) u_1^{m_1^j}(\tau, \varepsilon) \right) d\tau, \ j = \overline{2, n}, \right. \quad (30)$$

где $u_1(x, \varepsilon)$ — решение первого уравнения (29).

Таким образом, интегрирование регуляризирующей системы (29) сводится к интегрированию нелинейного скалярного уравнения (29) относидельно функции u_1. Использовав теорему о разрешимости операторного уравнения (см. [7, с. 680])

$$P(v) = 0, \quad (31)$$

приводимую ниже, покажем, что нелинейное уравнение (29) разрешимо в целом (при указанных выше предположениях).

Теорема 3. *Пусть оператор $P(v)$ переводит открытое множество Ω банахова пространства X в другое банахово пространство Y и имеет вторую непрерывную производную $P''(v)$ в шаре $\Omega_0 = \{ v - v_0 \leqslant r\} \subset \Omega$. Пусть, кроме того, выполнены условия:*

1) *существует непрерывный линейный оператор* $\Gamma = [P'(v_0)]^{-1}$;
2) $\| \Gamma(P(v_0) \| \leqslant \eta$;
3) $\| \Gamma(P''(v)) \| \leqslant \mathcal{K} \ \forall v \in \Omega_0$.

Тогда если $\delta = \mathcal{K}\eta \leqslant 1/2$, $r \geqslant r_0 = (1 - \sqrt{1 - 2\delta})\eta/\delta$, *то уравнение* (31) *имеет решение* $v = v^* \in X$, *удовлетворяющее условию* $\| v^* - v_0 \| \leqslant r_0$.

Докажем теперь разрешимость в целом нелинейного уравнения (29) относительно u_1.

Теорема 4. *Пусть в первом уравнении* (29) *коэффициенты* $k(x)$, $g_k^{(0)}(x)$, $g_k^{m_1^1 e_1}(x) \in C[0, a]$, $k(x) > 0 \ \forall x \in [0, a]$. *Тогда при достаточно малых* ε ($0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$) *это уравнение имеет на отрезке* $[0, a]$ *единственное решение* $u_1 = u_1(x, \varepsilon)$, *удовлетворяющее начальному условию* $u_1(0, \varepsilon) = 1$. *Это решение равномерно ограничено, т. е.*

$$\| u_1(0, \varepsilon) \| \leqslant \text{const} \ \forall (x, \varepsilon) \in [0, a] \times (0, \varepsilon_0].$$

Доказательство. В качестве оператора $P = P_\varepsilon$ возьмем оператор

$$P_\varepsilon(v) \equiv \varepsilon dv/dx - \lambda_1(x) v - \lambda_1(x) - \varepsilon \sum_{k=1}^{l+1} \varepsilon^{k-1} \Big[g_k^{(0)}(x) + \\ + \sum_{m_1^1=2}^{N_{k1}} g_k^{m_1^1 e_1}(x)(v+1)^{m_1^1} \Big].$$

Этот оператор действует из пространства $\dot{C}^1[0, a] = \{f(x) \in C^1[0, a] : f(0) = 0\}$ в пространство $C[0, a]$, в которых введены нормы $\| f \|_{C[0,a]} = \max\limits_{x \in [0,a]} |f(x)|$, $\| f \|_{\dot{C}^1[0,a]} = \| f \|_{C[0,a]} + \varepsilon \| f' \|_{C[0,a]}$.

В качестве начального приближения $v_0 = v_0(x, \varepsilon)$ возьмем функцию $v_0 = \bar{v}(x, \varepsilon) - 1$, где $\bar{v}(x, \varepsilon)$ — решение задачи Коши

$$\varepsilon d\bar{v}/dx - \lambda_1(x)\bar{v} = 0, \quad \bar{v}(0, \varepsilon) = 1.$$

Тогда

$$P_\varepsilon(v_0) = \varepsilon \sum_{k=1}^{l+1} \varepsilon^{k-1} \Big[g_k^{(0)}(x) + \sum_{m_1^1=2}^{N_{k1}} g_k^{m_1^1 e_1}(x) \bar{v}^{m_1^1} \Big] \equiv \varepsilon R(x, \varepsilon).$$

Для получения элемента $\Gamma(P_\varepsilon(v_0))$ надо решить следующую задачу:

$$\varepsilon dz/dx - \lambda_1(x) z - \varepsilon \xi(x, \varepsilon) z = \varepsilon R(x, \varepsilon), \quad z(0, \varepsilon) = 0,$$

где $\xi(x, \varepsilon) \equiv \sum_{k=1}^{l+1} \varepsilon^{k-1} \sum_{m_1^1=2}^{N_{k1}} g_k^{m_1^1 e_1}(x) m_1^1 \bar{v}^{m_1^1 - 1}$. Будем иметь

$$z(x, \varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x (\lambda_1(\tau) + \varepsilon\xi(\tau, \varepsilon)) d\tau} \int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\lambda_1(\tau) + \varepsilon\xi(\tau, \varepsilon)) d\tau} R(s, \varepsilon)\, ds,$$

откуда получаем

$$|z(x, \varepsilon)| \leqslant C_1 e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \lambda_1(\tau) d\tau} \int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_1(\tau) d\tau} ds,$$

где $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Используя идеи работы [1, с. 186—190], находим оценку

$$|z(x, \varepsilon)| \leqslant C_2 \varepsilon \quad \forall (x, \varepsilon) \in [0, a] \times (0, \varepsilon_0],$$

где $\alpha > 0$ — некоторая постоянная, $C_2 > 0$ — константа, не зависящая от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Из этой оценки вытекает неравенство

$$\| \Gamma(P_\varepsilon(v_0) \|_{\dot{C}^1[0,a]} \leqslant C_3 \varepsilon^\alpha \quad \forall (x, \varepsilon) \in [0, a] \times (0, \varepsilon_0].$$

Существование оператора $P''(v)$ в шаре $\{\| v \| \leqslant r\} \subset \dot{C}^1[0, a]$ и наличие оценки

$$\| \Gamma(P''_\varepsilon(v)) \| \leqslant C_r \quad \forall v \in \{\| v \| \leqslant r\},$$

устанавливаются аналогично.

Таким образом, все условия теоремы 3 выполнены, и значит, уравнение $P_\varepsilon(v) = 0$ имеет решение $v^* = v^*(x, \varepsilon) \in \dot{C}[0, a]$, удовлетворяющее неравенству

$$\| v^* - (\bar{v} - 1) \|_{\dot{C}^1[0,a]} \leqslant r_0 \leqslant C_4 \varepsilon^\alpha.$$

Отсюда вытекает, что первое уравнение (29) имеет при достаточно малых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ решение $u_1 = v^*(x, \varepsilon) + 1$, для которого справедлива оценка

$$\| u_1(x, \varepsilon) - \bar{v}(x, \varepsilon) \|_{\dot{C}^1[0,a]} \leqslant C\varepsilon^\alpha. \tag{32}$$

И, наконец, учитывая, что функция $\bar{v}(x, \varepsilon)$ равномерно ограничена при $(x, \varepsilon) \in [0, a] \times (0, \varepsilon_0]$, получаем из (32) утверждение теоремы.

Следствие. *Пусть в системе* (29) *коэффициенты* $k(x)$, $g_k^{(0)}(x)$, $g_k^{m_1^1 e_1}(x)$, $g_k^{m_1^j e_1 + e_j}(x)$ *принадлежат классу* $C[0, a]$ *и* $k(x) > 0$ $\forall x \in [0, a]$.

Тогда при достаточно малых ε $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ *задача* (29) *однозначно разрешима на отрезке* $[0, a]$, *причем ее решение* $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *удовлетворяет оценкам*

$$\| u_j(x, \varepsilon) \| \leqslant \text{const} \quad \forall (x, \varepsilon) \in [0, a] \times (0, \varepsilon_0].$$

Более того, справедливы асимптотические разложения (в метрике $C[0, a]$*):*

$$u_1(x, \varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x \lambda_1(\tau)d\tau} + O(\varepsilon^\alpha), \quad u_j(x, \varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x \lambda_j(\tau)d\tau} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to +0, \quad (33)$$

Заметим, что разложения (33) вытекают из формул (30) и неравенства (32).

Замечание 2. Разрешимость в целом регуляризирующей системы (29) (а вместе с ней и исходной системы (1); см. теорему 5) вытекает из того, что ее первое уравнение аппроксимируется с точностью до членов порядка ε линейным однородным уравнением $\varepsilon\bar{v}' - \lambda_1(x)\bar{v} = 0$, все решения которого равномерно ограничены. Эта ситуация будет нарушена, если для исходной системы (1) не будет выполнено условие III, что может привести (как показывает приводимый ниже пример) к отсутствию решения на отрезке $[0, a]$ (как системы (1), так и регуляризирующей системы (29)).

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\varepsilon y' = -x(x-1)^2 y + x(x-1) - \varepsilon y^2, \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad x \in [0, a]. \quad (34)$$

При $a \geqslant 1$ неоднородность $h(x) \equiv x(x-1)$ уравнения Риккати (34) не удовлетворяет условию III. В этом случае решение задачи (34)

$$y = \frac{1}{x-1} + \frac{\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x \tau(\tau-1)^2\, d\tau\right\}}{(x-1)^2\left[(1+y^0)^{-1} + \int\limits_0^x (\tau-1)^2 \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau s(s-1)^2\, ds\right\} d\tau\right]}$$

не существует на отрезке $[0, a]$. Если $0 < a < 1$, то $h(x)$ удовлетворяет условию III; приведенное выше решение задачи (34) также существует на отрезке $[0, a]$.

4. Асимптотическая сходимость формальных решений. С помощью теорем о нормальной и однозначной разрешимости итерационных систем, доказанных выше, построим частичную сумму

$$S_l(x, u, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{l} \varepsilon^k y_k(x, k) \quad (35)$$

с коэффициентами $y_k(x, u) \in U$. При этом будет также построена регуляризирующая система (29) порядка $l+1$. Пусть $u = u(x, \varepsilon)$ — решение этой системы (оно существует и равномерно ограничено при $(x, \varepsilon) \in [0, a] \times (0, \varepsilon_0]$; см. теорему 4). Произведем сужение частичной суммы (35) на векторе $u = u(x, \varepsilon)$ и обозначим полученную функцию через $y_{\varepsilon l}(x)$. Имеет место следующее утверждение, доказываемое так же, как и аналогичное утверждение в [1, с. 244—245].

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* I—III, $\gamma_j^{(0)}(0) \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, *и в системе* (1) *наблюдается слабый резонанс* (3).

Тогда при достаточно малых ε $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ *задача* (1) *имеет на отрезке* $[0, a]$ *единственное решение* $y(x, \varepsilon)$, *для которого справедлива оценка*

$$\| y(x, \varepsilon) - y_{\varepsilon l}(x) \|_{C[0,a]} \leqslant C\varepsilon^{l+1},$$

где $C > 0$ — *постоянная, не зависящая от* ε *при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Пример 2. Построим главный член асимптотики решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} \varepsilon y' &= \lambda_1(x)\, y + h_0(x) + \varepsilon z^2, \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \\ \varepsilon z' &= \lambda_2(x)\, z + h_2(x) + \varepsilon y^2, \quad z(0, \varepsilon) = z^0, \end{aligned} \tag{36}$$

где $h_0(x) \equiv x(x-1)^2 h_1(x)$, $\lambda_1(x) = -x(x-1)^2$, $\lambda_2(x) \neq 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2(x) \leqslant 0$ $(\operatorname{Im}\lambda_2(x) \neq 0)$ $\forall x \in [0, a]$, $a \geqslant 1$ $(\lambda_1(x), \lambda_2(x), h_1(x), h_2(x) \in C^1[0, a])$.

Регуляризирующая система (4) в этом случае имеет вид

$$\varepsilon du/dx = \Lambda(x)\, u + \varepsilon g_1(x, u), \quad u(0, \varepsilon) = \bar{1}. \tag{37}$$

Здесь $\Lambda(x) = \operatorname{diag}(\lambda_1(x), \lambda_2(x))$, $u = \{u_1, u_2\}$, $\bar{1} = \{1, 1\}$, $g_1(x, u)$ — функция, подлежащая определению. Вычисляя решение «расширенной» системы

$$\varepsilon \partial w/\partial x + \partial w/\partial u\, [\Lambda(x)\, u + \varepsilon g_1(x, u)] - \Lambda(x)\, w - \varepsilon F(w) = h(x), \quad w(0, \bar{1}) = w^0$$

(в которой $w = \{\tilde{y}, \tilde{z}\}$, $F(w) = \{\tilde{y}^2, \tilde{z}^2\}$, $h = \{h_0, h_2\}$, $w^0 = \{y^0, z^0\}$) в виде ряда $w = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k$, получаем следующие итерационные задачи:

$$\mathscr{L} w_0 = \partial w_0/\partial u \Lambda(x)\, u - \Lambda(x)\, w_0 = h(x), \quad w_0(0, \bar{1}) = w^0, \quad (\varepsilon^0)$$

$$\mathscr{L} w_1 = -\partial w_0/\partial x - \partial w_0/\partial u g_1(x, u) + F(w_0), \quad w_0(0, \bar{1}) = 0 \quad (\varepsilon^1)$$

(здесь приведены только те задачи, которые потребуются для построения главного члена асимптотики).

Решение системы (ε^0) в пространстве U имеет вид

$$w_0(x, u) = \alpha_1(x)\, u_1 e_1 + \alpha_2(x)\, u_2 e_2 + w_0^{(0)}(x) \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1(x)\, u_1 + h_1(x) \\ \alpha_2(x)\, u_2 + \varphi(x) \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где $\varphi(x) \equiv -h_2(x)/\lambda_2(x)$, $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ — произвольные скалярные функции из класса $C^1[0, a]$. При этом система (ε^1) принимает вид

$$\mathscr{L} w_1 = -\begin{pmatrix} \alpha_1 u_1 + h_1' \\ \alpha_2' u_2 + h_2' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 g_1^{e_1}(x, u) \\ \alpha_2 g_1^{e_2}(x, u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2^2 u_2^2 + 2\alpha_2 \varphi u_2 + \varphi^2 \\ \alpha_1^2 u_1^2 + 2\alpha_1 h_1 u_1 + h_1^2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку уравнение для первой компоненты вектора w_1 не содержит в правой части резонансных мономов степени $\geqslant 2$ относительно u_1, то функция $g_1(x, u)$ будет выбрана в данном случае в виде (см. (22)) $g_1(x, u) \equiv g_1^{e_1}(x, u)\, e_1 + g_1^{e_2}(x, u)\, e_2 = g_1^{(0)}(x)\, e_1$.

Условия ортогональности (8) для системы (ε^1) приводят к уравнениям $-\alpha_1 = 0$, $-\alpha_2' = 0$. Присоединяя к этим уравнениям начальные условия $\alpha_1(0) = y^0 - h_1(0) \neq 0$, $\alpha_2(0) = z^0 - \varphi(0)$, находим однозначно решение (38) задачи (ε^0):

$$w_0(x, u) = \begin{pmatrix} (y^0 - h_1(0))\, u_1 + h_1(x) \\ (z^0 - \varphi(0))\, u_2 + \varphi(x) \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Условие (9) для системы (ε^1) позволяет записать функцию $g_1^{(0)}(x)$ в виде $g_1^{(0)}(x) = H(0)(x-1)^2 + [(H' - H)(1)]\, x(x-1) + H(1)\, x$, где $H(x) \equiv (h_1'(x) - \varphi^2(x))/(h_1(0) - y^0)$.

Итак, главный член асимптотики решения задачи (36) имеет вид (39), где функции $u_1 = u_1(x, \varepsilon)$ и $u_2 = u_2(x, \varepsilon)$ находятся из линейной системы уравнений (см. (37)):

$$\varepsilon du_1/dx = -x(x-1)^2 u_1 + \varepsilon g_1^{(0)}(x), \quad u_1(0, \varepsilon) = 1,$$

$$\varepsilon du_2/dx = \lambda_2(x)\, u_2, \quad u_2(0, \varepsilon) = 1,$$

решение которой определяется в квадратурах. При этом (согласно теореме 5) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ будет иметь место оценка

$$\| W(x, \varepsilon) - w_0(x, u(x, \varepsilon)) \|_{C[0,a]} \leqslant C\varepsilon,$$

где $W(x, \varepsilon) \equiv \{y(x, \varepsilon), z(x, \varepsilon)\}$ — точное решение задачи (36), $C > 0$ — постоянная, не зависящая от ε.

5. Замечание о предельном переходе в решении задачи (1). Используя формулы (19), (33), а также теорему 5, записываем асимптотическое разложение

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(0)}(x)\, c_j(x)\, [e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \lambda_j(\tau)d\tau} + O(\varepsilon^{\alpha_0})] + y_0^{(0)}(x) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to +0,$$

решения $y(x, \varepsilon)$ задачи (1), справедливое в метрике $C([0, a], \mathbb{C}^n)$ ($\alpha_0 = \min(1; \alpha)$). Те же рассуждения, что и в [1, с. 69—72], проводимые с учетом данного разложения, приводят к следующему результату.

Теорема 6. *Если в системе* (1) *наблюдается слабый резонанс* (3), $\gamma_j^{(0)}(0) \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, *и выполнены условия* I—III, *то решение* $y(x, \varepsilon)$ *задачи* (1) *стремится при* $\varepsilon \to +0$ *к предельному решению* $y_0^{(0)}(x)$ *(вычисляемому по формуле* (19′)) *слабо в* $\mathscr{L}_2([0, a], \mathbb{C}^n)$.

Заметим, что сильная сходимость в $C([\delta, a], C^n)$, где δ — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0 < \delta < a$, возможна лишь при отсутствии точек $\lambda_j(x)$ спектра оператора $A(x)$, лежащих на мнимой оси (см. [1]).

1. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М. : Наука, 1981.— 400 с.
2. *Ломов С. А., Сафонов В. Ф.* Регуляризация и асимптотические решения сингулярно возмущенных задач с точечными особенностями спектра предельного оператора // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 2.— С. 172—180.
3. *Губин Ю. П., Ломов С. А., Сафонов В. Ф.* Точечный резонанс в системе двух осцилляторов // Прикл. математика и механика.— 1982.— **45**, вып. 3.— С. 389—396.
4. *Губин Ю. П., Сафонов В. Ф.* Нелинейная регуляризация резонансных задач // Тр. Моск. энергет. ин-та.— 1980.— Вып. 499.— С. 73—77.
5. *Губин Ю. П., Сафонов В. Ф.* Асимптотические решения сингулярно возмущенных задач со слабой нелинейностью в случае нетождественного резонанса // Дифференц. уравнения.— 1984.— **20**, № 6.— С. 930—941.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Гостехтеориздат, 1953.— 492 с.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 744 с.

Моск. энергет. ин-т
Получено 21.02.85