3. *Зайцев Д. И.* Признаки непростоты произведений групп // XVI Всесоюз. алгебр. конф. (Ленинград, 22—25 сент. 1981 г.) : Тез. докл. — Л. : Ленингр. отд-ние Мат. ин-та АН СССР, 1981.— Ч. 1.— С. 52—53.
4. *Зайцев Д. И.* О ступени разрешимости произведения абелевой и нильпотентной групп // XVII Всесоюз. алгебр. конф. (Минск, 14—17 сент. 1983 гг.): Тез. докл.— Минск : Ин-т математики АН БССР, 1983.— Ч. 1.— С. 75.
5. *Amberg B.* Artinian and Noetherian factorized groups // Rend. Semin. mat. Univ. Padova.— 1976.— 55.— P. 105—122.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 18.06.85

УДК 517.5

Н. В. Зорий

Экстремальная задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов

В работе даны необходимые и достаточные условия разрешимости экстремальной задачи о минимуме ньютоновой энергии в одном классе зарядов, ассоциированных с пространственным конденсатором (теоремы 1 и 2). Исследовано соотношение между этой минимальной величиной и гриновой емкостью одной из пластин конденсатора относительно дополнения к другой (теорема 2). Описаны свойства носителей и потенциалов минимизирующих зарядов (теорема 3). Указаны достаточно общие условия, наложенные на последовательность конденсаторов, при которых их минимизирующие заряды сходятся по норме к равновесной мере компакта (теорема 4). В качестве вспомогательных утверждений получен результат о полноте специальных пространств зарядов (теорема A) и установлено характеристическое свойство множеств, разреженных на бесконечности, в терминах теории выметания зарядов (теорема B).

1. Постановка задачи. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 3$, будем рассматривать борелевские заряды [1] ν, их носители $S(\nu)$, ньютоновы энергии $\mathscr{I}(\nu) = \iint\limits_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p} |x-y|^{2-p} d\nu(x)\, d\nu(y)$ и потенциалы $U^\nu(x) := = \int\limits_{\mathbb{R}^p} |x-y|^{2-p} d\nu(y)$. Следуя [1], величину $\nu(\mathbb{R}^p)$ обозначим $\nu(1)$.

Пару $E = (E^+, E^-)$ непустых замкнутых множеств $E^+, E^- \subset \mathbb{R}^p$, одно из которых ограничено, назовем конденсатором. Для E введем классы зарядов $\mathfrak{N}(E) = \{\nu = \nu^+ - \nu^- : S(\nu^+) \subset E^+,\ S(\nu^-) \subset E^-,\ (\nu^+ + \nu^-)(1) < < +\infty\}$ и $\mathfrak{N}^1(E) = \{\nu \in \mathfrak{N}(E) : \nu^+(1) = \nu^-(1) = 1\}$. Обозначим $V(E) = \inf\limits_{\nu \in \mathfrak{N}^1(E)} \mathscr{I}(\nu)$ и рассмотрим экстремальную $\mathfrak{N}^1$-задачу о существовании и единственности заряда $\lambda = \lambda_E$, удовлетворяющего условию

$$\mathscr{I}(\lambda) = V(E). \tag{1}$$

Чтобы $\mathfrak{N}^1$-задача была содержательна, всюду далее для E будем полагать $V(E) < +\infty$, или, что равносильно, ньютонову емкость каждой из пластин E^+, E^- будем считать ненулевой.

Для E с ограниченной границей $\partial(E^+ \cup E^-)$ $\mathfrak{N}^1$-задача решена в [2]. В общем случае при ее решении возникают трудности, обусловленные отсутствием слабой компактности $\mathfrak{N}^1(E)$.

Для плоских конденсаторов и логарифмического ядра аналогичная вариационная задача рассматривалась в [3, 4]. Наши результаты и методы исследований для пространственных конденсаторов существенно отличаются от результатов и методов исследований на плоскости, что обусловлено неинвариантностью величины $V(E)$ относительно мебиусовых преобразований $\mathbb{R}^p$.

2. Вспомогательные результаты. Благодаря равномерной отделимости множеств $S(\nu^+)$ и $S(\nu^-)$, $\nu=\nu^+-\nu^-\in\mathfrak{N}(E)$, для зарядов класса $\mathfrak{N}(E)$ можно установить аналоги некоторых результатов о мерах, которые, вообще говоря, для зарядов не верны.

Лемма. *Заряды $\nu_n\in\mathfrak{N}(E)$ слабо сходятся к ν $(\nu_n \curlywedge\!\!\nearrow \nu)$ в том и только том случае, когда $\nu_n^+ \curlywedge\!\!\nearrow \nu^+$, $\nu_n^- \curlywedge\!\!\nearrow \nu^-$.*

Достаточное утверждение леммы очевидно. Доказательство необходимого утверждения основано на следующем наблюдении: для всякого $f\in\Phi$, где Φ — множество всех вещественных, непрерывных, финитных функций в $\mathbb{R}^p$, найдутся такие $f_+, f_-\in\Phi$, что $\nu^+(f)=\nu(f_+)$, $\nu^-(f)=\nu(f_-)$ $\forall\nu\in\mathfrak{N}(E)$.

В пространстве $\mathscr{E}$ всех зарядов с конечной энергией введем евклидову структуру, положив $(\nu_1,\nu_2)=\iint\limits_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p}|x-y|^{2-p}d\nu_1(x)\,d\nu_2(y)$. Величину $\|\nu\|=\sqrt{(\nu,\nu)}$ будем называть нормой заряда ν. Известно [1], что пространство $\mathscr{E}$ не полное.

Теорема А. *Для всякого $c>0$ метрическое пространство $\overset{0}{\mathfrak{N}}_c(E)=\{\nu\in\mathfrak{N}(E)\cap\mathscr{E}:(\nu^++\nu^-)(1)\leqslant c\}$ полное. Если $E^+\cup E^-$ компактно, то полным является все пространство $\mathfrak{N}(E)\cap\mathscr{E}$.*

Теорема А доказывается по схеме, предложенной в [1] для доказательства теоремы 1.18, с использованием отмеченной специфики пространства $\mathfrak{N}(E)$ [5].

В качестве вспомогательных утверждений нами установлены также некоторые результаты о выметании мер.

Определение [6]. *Множество $Q\subset\mathbb{R}^p$ называется разреженным на бесконечности, если множество Q^*, полученное из Q преобразованием инверсии относительно сферы $\{x\in\mathbb{R}^p:|x|=1\}$, разрежено в точке O.*

Понятие разреженности множества в конечной точке обсуждается в [1, 7].

Класс замкнутых множеств, разреженных на бесконечности, обозначим $\mathfrak{R}_\infty$. Класс $\mathfrak{R}_\infty$ содержит в себе все замкнутые множества F с ньютоновой емкостью $C_2(F)<+\infty$, но не исчерпывается ими. Из результатов работы [1] можно видеть [5], что если $F\in\mathfrak{R}_\infty$, то существует (единственная) C-абсолютно непрерывная мера γ_F (не обязательно конечная), для которой $S(\gamma_F)\subset F$ и $U^{\gamma_F}(x)=1$ квазивсюду на F. Меру γ_F называют равновесной мерой множества F.

Как следует из замечания в [7, с. 115], для $F\in\mathfrak{R}_\infty$ существует одна и только одна компонента связности множества $\mathbb{R}^p\setminus F$ (обозначим ее Ω_F), дополнение которой разрежено на бесконечности. Легко видеть [5], что

$$U^{\gamma_F}(x)<1 \qquad \forall x\in\Omega_F. \tag{2}$$

Для замкнутого множества F и конечного заряда ν через $(\nu)_F$ обозначим решение задачи выметания ν на F в классе зарядов, тождественно равных нулю на множестве иррегулярных точек из F. Известно [1], что такое решение существует и единственно.

Пусть F — непустое замкнутое множество, не совпадающее с $\mathbb{R}^p$, $\mathfrak{M}^+(CF)$ — класс конечных мер μ, для которых $\inf\limits_{x\in F,\ y\in S(\mu)}|x-y|>0$.

Теорема В. *F принадлежит $\mathfrak{R}_\infty$ в том и только том случае, когда в классе $\mathfrak{M}^+(CF)$ найдется такая мера ω, что*

$$(\omega)_F(1)<\omega(1). \tag{3}$$

Если $F\in\mathfrak{R}_\infty$, то неравенство (3) *верно для всякой меры $\omega\in\mathfrak{M}^+(CF)$, у которой $\omega(\Omega_F)>0$.*

Необходимое утверждение теоремы В следует из (2) и равенства [5] (лемма 10)

$$(\mu)'_F(1)=(\mu,\gamma_F)\quad\forall\mu\in\mathfrak{M}^+(CF),\ F\in\mathfrak{R}_\infty. \tag{4}$$

Достаточное утверждение доказывается методом от противного с использованием теоремы Брело [1] (теорема 5.10) и конструкции построения меры $(\omega)'_F$, принадлежащей М. Риссу [1, с. 323—331].

3. Основные результаты. Для замкнутого множества F обозначим через $\check{F}$ его приведенное ядро [1]. Открытое множество $\mathbb{R}^p \setminus (\check{E}^+ \cup \cup \check{E}^-)$ состоит из конечного или счетного числа областей R_i. Объединение R_i, у которых ∂R_i пересекается и с $\check{E}^+$, и с $\check{E}^-$ (соответственно только с $\check{E}^+$ и только с $\check{E}^-$), обозначим через $G = G_E$ (соответственно через $G^+ = G_E^+$ и $G^- = G_E^-$). Из определения конденсатора E следует, что одно из множеств $E^+ \cup G^+$, $E^- \cup G^-$ ограничено. Всюду далее $E^+ \cup G^+$ будем считать компактом. Совокупность всех таких конденсаторов обозначим $\mathfrak{C}$. Результаты, получаемые при решении $\mathfrak{N}^1$-задачи для конденсатора E, определяются массивностью множества $E^- \cup G^-$ в окрестности бесконечно удаленной точки. В соответствии с этим разобьем $\mathfrak{C}$ на следующие классы конденсаторов: $\mathfrak{C}_1 = \{E : E^- \cup G^- \notin \mathfrak{R}_\infty\}$, $\mathfrak{C}_2 = \{E : E^- \cup G^- \in \in \mathfrak{R}_\infty,\ C_2(E^-) = +\infty\}$, $\mathfrak{C}_3 = \{E : E^- \cup G^- \in \mathfrak{R}_\infty,\ C_2(E^-) < +\infty\}$.

Каждый из классов $\mathfrak{C}_i$, $i = 1, 2, 3$, не пуст. Дадим пример их геометрически (но не метрически) однотипных представителей.

Пример. Пусть $p = 3$, $f(\rho)$ — положительная монотонно убывающая функция, определенная на промежутке $[+1, +\infty)$ и удовлетворяющая условиям $f(1) < \pi$, $\lim\limits_{\rho \to +\infty} f(\rho) = 0$. Рассмотрим конденсатор $E = (E^+, E^-)$, у которого $E^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leqslant 1/2\}$, а отрицательная пластина E^- представляет собой замкнутое тело вращения, которое в сферических координатах (ρ, θ, φ) задается условиями $\rho \geqslant 1$, $\theta \leqslant f(\rho)$. Если при этом $f(\rho) = = A\rho^{-m}$, то E принадлежит классу $\mathfrak{C}_1$. Если $f(\rho) = Ae^{-m\rho^k}$, то при $0 < < k \leqslant 1$ конденсатор E принадлежит классу $\mathfrak{C}_2$, а при $k > 1$ — классу $\mathfrak{C}_3$.

Теорема 1. *Для того чтобы в классе $\mathfrak{N}^1(E)$ существовал заряд λ, удовлетворяющий условию* (1), *необходимо и достаточно, чтобы $E \in \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_3$. Если минимизирующий заряд $\lambda \in \mathfrak{N}^1(E)$ существует, то он единствен в классе $\mathfrak{N}^1(E)$.*

Пусть $g_E(x, y)$ — обобщенная функция Грина открытого множества $\mathbb{R}^p \setminus E^-$, а $C_g^E(E^+) = C_g(E^+)$ и $\mu_{E^+;E} = \mu_{E^+}$ — соответственно емкость и равновесная мера, нормированная условием $\mu_{E^+}(1) = 1$, множества E^+ относительно ядра $g_E(x, y)$ [1, 7]. Пользуясь результатами Картана [8] и представлением гриновых энергий мер ω, $S(\omega) \subset E^+$, через ньютоновы энергии зарядов $\omega - (\omega)'_{E^-}$ [1, 9], можно видеть [10], что

$$1/C_g(E^+) = \inf_{\nu \in \mathfrak{N}^{(1)}(E)} \mathcal{I}(\nu), \tag{5}$$

где $\mathfrak{N}^{(1)}(E) = \{\nu \in \mathfrak{N}(E) : \nu^+(1) = 1,\ \nu^-(1) \leqslant 1\}$.

Теорема 2. *Если $C_2(E^- \cup G^-) = +\infty$ (т. е. $E \in \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2$), то в классе $\mathfrak{N}^{(1)}(E)$ существует единственный заряд λ, удовлетворяющий условию* (1). *В этом (и только в этом) случае верны равенства $V(E) = = 1/C_g(E^+)$, $\lambda = \mu_{E^+} - (\mu_{E^+})_{E^-}$.*

Как видно из теорем 1 и 2, для конденсаторов класса $\mathfrak{C}_2$, и только для них, задача о минимуме энергии в классе $\mathfrak{N}^1(E)$ не имеет экстремалей в этом классе. Для $E \in \mathfrak{C}_2$ величина $V(E)$ реализуется на заряде λ, у которого $\lambda^-(1) < 1$. Иными словами, здесь происходит «утечка» заряда в бесконечно удаленную точку. В такого типа задачах описанное явление свойственно лишь пространственным конденсаторам.

Специфической чертой пространственной задачи является также то, что, как видно из теоремы 2 и равенства (5), для $E \in \mathfrak{C}_3$ верно $C_g(E^+) > > 1/V(E)$ (ср. с [3]).

Пусть $\mathscr{I}_{\partial G}$ — множество иррегулярных точек (для задачи Дирихле) открытого множества G.

Теорема 3. *Пусть λ — заряд, определяемый теоремами 1 и 2. Верны равенства $S(\lambda^+) = E^+ \cap \partial G$, $S(\lambda^-) = E^- \cap \partial G$, $S(\lambda) = \partial G$. Потенциал $U^\lambda(x)$ субгармоничен в $\mathbb{R}^p \setminus (E^+ \cap \partial G)$, супергармоничен в $\mathbb{R}^p \setminus (E^- \cap \cap \partial G)$, гармоничен в $\mathbb{R}^p \setminus \partial G$, непрерывен в $\mathbb{R}^p \setminus \mathscr{I}_{\partial G}$ и удовлетворяет соотношениям*

$$(\lambda^-, \lambda) \leqslant U^\lambda(x) \leqslant (\lambda^+, \lambda) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^p,$$

$$U^\lambda(x) = \begin{cases} (\lambda^+, \lambda) & \forall x \in (\check{E}^+ \cup G^+) \setminus \mathscr{I}_{\partial G}, \\ (\lambda^-, \lambda) & \forall x \in (\check{E}^- \cup G^-) \setminus \mathscr{I}_{\partial G}, \end{cases}$$

$$(\lambda^-, \lambda) < U^\lambda(x) < (\lambda^+, \lambda) \quad \forall x \in G.$$

Числа (λ^+, λ) и (λ^-, λ) конечны, причем

$$(\lambda^+, \lambda) = [1 - (\lambda^-, \gamma_{E^+})]/C_2(E^+) > 0, \tag{6}$$

$$(\lambda^-, \lambda) = \begin{cases} 0 & \forall E \in \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2, \\ -[1 - (\lambda^+, \gamma_{E^-})]/C_2(E^-) < 0 & \forall E \in \mathfrak{C}_3. \end{cases} \tag{7}$$

Соотношения (6), (7) дают возможность получить двухсторонние оценки $V(E)$ через емкости пластин конденсатора в самых широких предположениях ([5], ср. с [3, с. 324]) и с их помощью доказать следующее следствие из теорем 2, 3 и A.

Теорема 4. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^p$ — компакт ненулевой емкости, $\{E_n = (E_n^+, E_n^-)\} \subset \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2$ — последовательность конденсаторов таких, что $\Omega_{\check{E}_n^+} = \Omega_{\check{K}}$ $\forall n$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{x\in\check{K},\, y\in\check{E}_n^-} |x-y| = +\infty$. Тогда $C_2(K) = \lim\limits_{n\to\infty} C_g^{E_n}(E_n^+) = \lim\limits_{n\to\infty} [1/V(E_n)]$. Если, кроме того, выполнены условия $\check{E}_{n+1}^+ \cup G_{E_{n+1}}^+ \subset \check{E}_n^+ \cup \cup G_{E_n}^+$, $\check{E}_{n+1}^- \cup G_{E_{n+1}}^- \subset \check{E}_n^- \cup G_{E_n}^-$, то заряды λ_{E_n} сходятся по норме к мере $\gamma_K/C_2(K)$.*

4. Доказательство теорем 1—3. Определим конденсаторы $L = (L^+, L^-)$, $L_k = (L_k^+, L_k^-)$, $k = 1, 2, \ldots$, равенствами $L^+ = L_k^+ = \check{E}^+ \cup G^+$, $L^- = \check{E}^- \cup G^-$, $L_k^- = \{x \in L^- : |x| \leqslant r_k\}$, где r_k — возрастающая к $+\infty$ последовательность достаточно больших чисел. Для L_k, $k = 1, 2, \ldots$, существуют [2] заряды

$$\lambda_k = \lambda_{L_k} \in \mathfrak{N}^1(L_k) \subset \mathfrak{N}^1(L) \tag{8}$$

с энергией $\|\lambda_k\|^2 = V(L_k)$. Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \|\lambda_k\|^2 = V(L). \tag{9}$$

Существование предела и неравенство $V(L) \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} V(L_k)$ очевидны, так как $\mathfrak{N}^1(L_1) \subset \mathfrak{N}^1(L_2) \subset \ldots \subset \mathfrak{N}^1(L)$. Докажем обратное неравенство. Для всякого заряда $\nu \in \mathfrak{N}^1(L)$ обозначим через ν_k^- сужение ν на L_k^-. Меры ν_k^- возрастают и слабо сходятся к ν^-, причем $\lim\limits_{k\to\infty} \nu_k^-(1) = 1$. Пользуясь равенством (1.4.6) из [1], отсюда легко получить соотношения $\lim\limits_{k\to\infty} V(L_k) \leqslant \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} \|\nu^+ - \nu_k^-/\nu_k^-(1)\|^2 = \|\nu\|^2$. Переходя к инфимуму по $\nu \in \mathfrak{N}^1(L)$, находим искомое неравенство.

Пользуясь соотношениями (8), (9) и рассуждая по аналогии с [1, с. 169], убеждаемся в том, что последовательность $\{\lambda_k\}$ фундаментальна. Учитывая теорему А и включение $\{\lambda_k\} \subset \overset{0}{\mathfrak{N}}_2(L)$, получаем, что для некоторого заряда $\varkappa \in \mathfrak{N}_2(L)$ верно

$$\lim_{k\to\infty} \| \lambda_k - \varkappa \| = 0, \tag{10}$$

а значит, и $\lambda_k \wedge\!\!\nearrow \varkappa$. В силу леммы

$$\lambda_k^+ \wedge\!\!\nearrow \varkappa^+, \quad \lambda_k^- \wedge\!\!\nearrow \varkappa^-, \tag{11}$$

откуда ввиду равномерной финитности единичных мер λ_k^+ имеем $\varkappa^+(1) = 1$. Следовательно,

$$\varkappa \in \mathfrak{N}^{(1)}(L), \ \| \varkappa \|^2 = V(L). \tag{12}$$

Из соотношений (9) и отделимости множеств L^+, L^- следует, что последовательности $\{\| \lambda_k^+ \|\}$, $\{\| \lambda_k^- \|\}$ ограничены. Отсюда и из (11) с помощью леммы 1.4 из [1] несложно получить, что если для некоторых зарядов ν_k, $\nu \in \mathfrak{E}$ верно $\lim\limits_{k\to\infty} \| \nu_k - \nu \| = 0$, то

$$(\varkappa^+, \nu) = \lim_{k\to\infty} (\lambda_k^+, \nu_k), \ (\varkappa^-, \nu) = \lim_{k\to\infty} (\lambda_k^-, \nu_k). \tag{13}$$

Из равенств (10), (13) находим

$$(\varkappa^+, \varkappa) = \lim_{k\to\infty} (\lambda_k^+, \lambda_k), \ (\varkappa^-, \varkappa) = \lim_{k\to\infty} (\lambda_k^-, \lambda_k). \tag{14}$$

Согласно теореме 2 из [2]

$$U^{\lambda_k}(x) = \begin{cases} (\lambda_k^+, \lambda_k) \text{ квазивсюду на } L_k^+, \\ (\lambda_k^-, \lambda_k) \text{ квазивсюду на } L_k^-. \end{cases} \tag{15}$$

Пользуясь (14) и [1] (теорема 3.11), путем предельного перехода в (15) получаем

$$U^{\varkappa}(x) = \begin{cases} (\varkappa^+, \varkappa) \text{ квазивсюду на } L^+, \\ (\varkappa^-, \varkappa) \text{ квазивсюду на } L^-. \end{cases} \tag{16}$$

Заряд $\omega = \varkappa^+ - (\varkappa^+, \varkappa)\, \gamma_{L^+}$ C-абсолютно непрерывен, сосредоточен на L^+ и, как видно из (16), удовлетворяет равенству $U^{\omega}(x) = U^{\varkappa^-}(x)$ квазивсюду на L^+. Следовательно,

$$\varkappa^+ = (\varkappa^-)_{L^+} + (\varkappa^+, \varkappa)\, \gamma_{L^+}, \tag{17}$$

а поэтому (см. (4) и (12))

$$(\varkappa^+, \varkappa) = [1 - (\varkappa^-, \gamma_{L^+})]/C_2(L^+). \tag{18}$$

Аналогично из (15), (16) получаем

$$(\lambda_k^-, \lambda_k) = -[1 - (\lambda_k^+, \gamma_{L_k^-})]/C_2(L_k^-), \tag{19}$$

$$\varkappa^- = (\varkappa^+)_{L^-} - (\varkappa^-, \varkappa)\, \gamma_{L^-}, \text{ если } C_2(L^-) < +\infty, \tag{20}$$

$$(\varkappa^-, \varkappa) = -[\varkappa^-(1) - (\varkappa^+, \gamma_{L^-})]/C_2(L^-), \text{ если } C_2(L^-) < +\infty. \tag{21}$$

Устремив в соотношении (19) k к $+\infty$ и воспользовавшись соответственно утверждением (13) для $\nu_k = \gamma_{L_k^-}$, $\nu = \gamma_{L^-}$, если $C_2(L^-) < +\infty$, и ограниченностью последовательности $\{(\lambda_k^+, \gamma_{L_k^-})\}$, если $C_2(L^-) = +\infty$, имеем

$$(\varkappa^-, \varkappa) = -[1-(\varkappa^+, \gamma_{L^-})]/C_2(L^-), \text{ если } C_2(L^-) < +\infty, \qquad (22)$$

$$(\varkappa^-, \varkappa) = 0, \text{ если } C_2(L^-) = +\infty. \qquad (23)$$

Сравнивая равенства (21), (22), получаем

$$\varkappa \in \mathfrak{N}^1(L), \text{ если } C_2(L^-) < +\infty, \qquad (24)$$

а из второго из соотношений (16) и равенства (23) находим

$$\varkappa^- = (\varkappa^+)'_{L^-}, \text{ если } C_2(L^-) = +\infty. \qquad (25)$$

Ввиду равенства [9] $U_{g_L}^{\varkappa^+}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^p} g_L(x, y)\, d\varkappa^+(y) = U^{\varkappa^+ - (\varkappa^+)'_{L^-}}(x)$ из соотношений (25), (16), (23), (12) получаем $U_{g_L}^{\varkappa^+}(x) = (\varkappa^+, \varkappa) = V(L)$ квазивсюду на L^+, если $C_2(L^-) = +\infty$. В силу характеристического свойства меры $\mu_{L^+;L}$ [7] последнее означает, что

$$\varkappa^+ = \mu_{L^+;L},\ V(L) = 1/C_g^L(L^+), \text{ если } C_2(L^-) = +\infty. \qquad (26)$$

Заметим, что нигде выше мы не пользовались спецификой конденсатора L, а поэтому верно

$$V(E) = 1/C_g^E(E^+), \text{ если } C_2(E^-) = +\infty. \qquad (27)$$

Поскольку $g_L(x, y) = g_E(x, y)\ \forall x, y \in \check{E}^+$, из известных свойств гриновых равновесных мер имеем

$$\mu_{L^+;L} = \mu_{E^+;E},\ C_g^L(L^+) = C_g^E(E^+). \qquad (28)$$

Используя теорему 1.27 из [1], соотношения (16) и включения $\varkappa^+$, $\varkappa^- \in \mathfrak{E}$, убеждаемся в справедливости неравенств

$$(\varkappa^-, \varkappa) \leqslant U^{\varkappa}(x) \leqslant (\varkappa^+, \varkappa) \quad \forall x \in \mathbb{R}^p. \qquad (29)$$

Заметим, что $\varkappa \neq 0$, а поэтому в силу теоремы единственности [1, с. 101] $(\varkappa^+, \varkappa) > (\varkappa^-, \varkappa)$. Пользуясь этим неравенством, соотношениями (16), (29), аналогом теоремы Лузина для потенциалов и рассуждая по аналогии с [2, с. 84—85], получаем $\partial L^+ \subset S(\varkappa^+)$, $\partial L^- \subset S(\varkappa^-)$. Но, как видно из равенств (17), (20), (25) с учетом известных свойств равновесных и выметенных мер [1], справедливы и обратные включения. Согласно определению L имеем

$$S(\varkappa^+) = \partial L^+ = E^+ \cap \partial G_E,\ S(\varkappa^-) = \partial L^- = E^- \cap \partial G_E. \qquad (30)$$

Заметим, что для конденсатора L каждая из компонент связности множества $\mathbb{R}^p \diagdown L^-$ имеет непустое пересечение с ∂L^+. Следовательно (см. (30)), $\varkappa^+(\Omega_{L^-}) > 0$ при $L^- \in \mathfrak{R}_\infty$. Применяя теорему В к (единичной) мере $\varkappa^+$ и множеству L^-, находим $(\varkappa^+)'_{L^-}(1) = 1$, если $L^- \notin \mathfrak{R}_\infty$, и $(\varkappa^+)'_{L^-}(1) < 1$, если $L^- \in \mathfrak{R}_\infty$, что с учетом соотношений (12), (22), (24), (25), (30) доказывает утверждения: а) $\varkappa \in \mathfrak{N}^1(E)\ \forall E \in \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_3$; б) $\varkappa \in \mathfrak{N}^{(1)}(E) \diagdown \mathfrak{N}^1(E)\ \forall E \in \mathfrak{C}_2$; в) $(\varkappa^-, \varkappa) < 0\ \forall E \in \mathfrak{C}_3$. Здесь мы воспользовались тем, что если $L^- \in \mathfrak{R}_\infty$ и $C_2(L^-) = +\infty$, то $C_2(E^-) = +\infty$ [5]. По аналогии с в) из (18) имеем $(\varkappa^+, \varkappa) > 0$.

Покажем, что $\varkappa$ удовлетворяет теоремам 1 и 2.

Из утверждения а) и включения $\mathfrak{N}^1(E) \subset \mathfrak{N}^1(L)$ следует цепочка неравенств

$$V(E) \leqslant \|\varkappa\|^2 = V(L) \leqslant V(E), \qquad (31)$$

которая вместе с утверждением а) доказывает достаточную часть первого утверждения теоремы 1. Утверждение о единственности минимизирующего заряда $\varkappa = \lambda_E \in \mathfrak{N}^1(E)$ для $E \in \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_3$ доказывается так же, как в [2].

Пусть $C_2(L^-) = +\infty$. Если при этом $E \in \mathfrak{C}_1$, то из соотношений (31), (26), (28) имеем

$$\|\varkappa\|^2 = V(E) = 1/C_g^E(E^+). \tag{32}$$

Если $E \in \mathfrak{C}_2$, то $C_2(E^-) = +\infty$, и в силу утверждений б), (5), (12), (26), (28), (27) получаем цепочку соотношений $1/C_g^E(E^+) \leqslant \|\varkappa\|^2 = V(L) = 1/C_g^L(L^+) = 1/C_g^E(E^+) = V(E)$, которая снова дает (32). Равенство $\varkappa = \mu_{E^+;E} - (\mu_{E^+;E})'_{E^-}$ следует из (26), (28), (25) с учетом того, что $(\omega)'_{L^-} = (\omega)'_{E^-}$ для всякой меры ω с $S(\omega) \subset \check{E}^+$. Утверждение о единственности в теореме 2 доказывается по аналогии с [2] с использованием равенств (5) и (32).

Из доказанного и утверждения б) следует необходимая часть теоремы 1.

Для завершения доказательства теоремы 2 заметим, что в силу утверждений в) и (20) для $E \in \mathfrak{C}_3$ $\varkappa^- \neq (\varkappa^+)'_{E^-}$, а поэтому [8] $V(E) = \|\varkappa^+ - \varkappa^-\|^2 > \|\varkappa^+ - (\varkappa^+)'_{E^-}\|^2 \geqslant 1/C_g^E(E^+)$.

Те из утверждений теоремы 3, которые не были доказаны выше, либо доказываются так же, как в [2], либо следуют из равенств (17), (20), (25) и свойств выметенных и равновесных мер.

1. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М. : Наука, 1966.— 515 с.
2. *Зорий Н. В.* Об одной вариационной задаче теории пространственных конденсаторов // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа.— Киев : Ин-т математики АН УССР.— 1984.— С. 71—87.
3. *Bagby T.* The modulus of a plane condenser // J. Math. and Mech.— 1967.— **17**, N 4.— P. 315—329.
4. *Тамразов П. М.* О вариационных задачах теории логарифмического потенциала // Исследования по теории потенциала.— Киев, 1980.— С. 3—13.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 80.25).
5. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов.— Киев, 1985.— 43 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 85.06).
6. *Euglede B.* Asymptotic paths for subharmonic functions and polygonal connectednesse o' fine domains // Springer Lecture Notes in Math.— 1980.— **814**.— P. 97—115.
7. *Брело М.* Основы классической теории потенциала.— М. : Мир, 1964.— 212 с.
8. *Cartan H.* Théorie générale du balayage en potentiel newtonien // Ann. Univ. Grenoble.— 1946.— **22**.— P. 221—280.
9. *Deny J.* Les potentiels d'énergie finie // Acta Math.— 1950.— **82**.— P. 107—183.
10. *Зорий Н. В.* Некоторые функциональные характеристики пространственных конденсаторов и соотношения между ними. — Киев, 1985.— 48 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 85.57).

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 21.02.85