УДК 517.43

Т. В. Цикаленко

Бесконечномерный оператор Шредингера и его потенциальные возмущения

В статье вводится класс эллиптических дифференциальных операторов второго порядка с бесконечным числом переменных, обобщающий операторы вторичного квантования. Подобные операторы допускают реализацию в приложениях как гамильтонианы физических систем с бесконечным числом степеней свободы в магнитных полях, поэтому естественно называть их бесконечномерными операторами Шредингера. Рассматриваются условия существенной самосопряженности указанных операторов и их возмущений потенциалами. Получены представления соответствующих полугрупп в терминах функциональных интегралов. Доказан бесконечномерный вариант известного неравенства Като.

1. Пусть $(\mathcal{H}_0, \ (\cdot, \ \cdot)_0)$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, в котором действует самосопряженный оператор $A \geqslant 0$. Следуя конструкции [1], гл. 2, по оператору A можно построить оснащение

$$\Phi' \supset \mathcal{H}_0 \supset \Phi \tag{1}$$

такое, что: 1) Φ — ядерный проективный предел семейства гильбертовых пространств $(\mathcal{H}_{+\tau})_{\tau \in T}$, каждое из которых квазиядерно вложено в $\mathcal{H}_0$; 2) $A \in \mathcal{L}(\Phi, \Phi)$, $e^{-tA} \in \mathcal{L}(\Phi, \Phi)$ $\forall t \geqslant 0$ и Φ — область существенной самосопряженности для A. Сопряженное пространство к Φ относительно $\mathcal{H}_0$ представимо в виде $\Phi' = \operatorname{ind}\lim_{\tau \in T} \mathcal{H}_{-\tau}$, где $\mathcal{H}_{-\tau}$ — сопряженное относительно $\mathcal{H}_0$ к $\mathcal{H}_{+\tau}$, $\tau \in T$. Наряду с этими пространствами используем их комплексификации, что всегда будет ясно из контекста и не потребует специальных обозначений.

На Φ' введем гауссовскую меру μ_0, заданную характеристическим функционалом

$$\tilde{\mu}_0(\varphi) = \int_{\Phi'} e^{i(x,\varphi)_0} d\mu_0(x) = e^{-1/4\|\varphi\|_0^2}, \quad \varphi \in \Phi,$$

согласно выбору Φ: $\mu_0(\mathscr{H}_{-\tau}) = 1 \ \forall \tau \in T$.

В пространстве $L_2(\Phi', d\mu_0)$ выделим плотное подмножество $C_b^2(\Phi')$ функций, сужения которых на каждое $(\mathscr{H}_{-\tau}, \|\cdot\|_{-\tau})$, $\tau \in T$, дважды непрерывно дифференцируемы и ограничены вместе с производными (понимаемыми в терминах двойственности, устанавливаемой $\mathscr{H}_0$, т. е. как элементы $\Phi_c^{\otimes k}$, $k = 0, 1, 2$). Снабдим $C_b^2(\Phi')$ естественной топологией, порожденной системой норм $\|f\|_\tau = \max_{k=0,1,2} \sup_{x \in \mathscr{H}_{-\tau}} \|f^{(k)}(x)\|_{\mathscr{H}_{+\tau,c}^{\otimes k}}$, $\tau \in T$, $(C_b^2(\Phi'))'$ — сопряженное пространство относительно $L_2(\Phi', d\mu_0)$.

Для заданной функции $a: \Phi' \to \mathscr{H}_0$ рассмотрим билинейную форму

$$D_{A,a}(f, g) = 1/2 \int_{\Phi'} (f' - iaf, \quad A(g' - iag))_{0,c}\, d\mu_0 \ (f, g \in C_b^2(\Phi')). \tag{2}$$

Случаю $a = 0$ соответствует оператор вторичного квантования (в шредингеровом представлении) H_A, ассоциированный с формой Дирихле $(H_A f, g)_{L_2(\Phi', d\mu_0)} = 1/2 \int_{\Phi'} (f', Ag')_{0,c} d\mu_0$, $f, g \in C_b^2(\Phi')$. Оператор H_A в существенном самосопряжен на $C_b^2(\Phi')$ и задается дифференциальным выражением $(H_A f)(x) = -1/2\,[\mathrm{Sp}_{\mathscr{H}_0} Af''(x) - 2(Af'(x), x)_{0,c}]$, $f \in C_b^2(\Phi')$, где $\mathrm{Sp}_{\mathscr{H}_0} Af''(x)$ — след в $\mathscr{H}_0$ ядра $(A \otimes 1) f''(x) \in \Phi_c^{\otimes 2}$. Вторично квантованные операторы с использованием их дифференциальной природы подробно изучены в [2, 3].

Выделим множество допустимых потенциалов a. Пусть $C_b^k(\Phi', \Phi)$, $k \in \mathscr{N} \cup \{0\}$, — совокупность функций $a: \Phi' \to \Phi$ таких, что все $a \restriction \mathscr{H}_{-\tau}$, $\tau \in T$, k раз непрерывно дифференцируемы и ограничены вместе с производными $(a \restriction \mathscr{H}_{-\tau})^{(l)}: \mathscr{H}_{-\tau} \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_{-\tau}^l, \mathscr{H}_{+\tau})$, $l = 0, \ldots, k$.

Обозначим через $W_{2,A}^1(\Phi', d\mu_0)$ пополнение $C_b^1(\Phi', \Phi)$ в норме $\|a\|_{W_{2,A}^1} = \left(\int_{\Phi} (\|a\|_0^2 + \|Aa\|_0^2 + \|(Aa)'\|_0^2)\, d\mu_0\right)^{1/2}$, $a \in C_b^1(\Phi', \Phi)$, где $\|(Aa)'(x)\|_0$ — гильбертова норма в $\mathscr{H}_0$ оператора $(Aa)'(x) \in \mathscr{L}(\Phi', \Phi)$, $x \in \Phi'$. Будем рассматривать только такие $a: \Phi' \to \mathscr{H}_0$, для которых справедливы включения

$$a \in W_{2,A}^1(\Phi', d\mu_0), \quad \|A^{1/2} a\|_0 \in L_4(\Phi', d\mu_0). \tag{3}$$

Бесконечномерным оператором Шредингера (с магнитным полем) $H_{A,a}$ назовем дифференциальный оператор в $L_2(\Phi', d\mu_0)$ вида

$$H_{A,a} f = H_A f + i(f', Aa)_{0,c} + 1/2(\|A^{1/2} a\|_0^2 + i\gamma_{A,a}) f, \quad f \in C_b^2(\Phi'), \tag{4}$$

где

$$\gamma_{A,a}(x) = \mathrm{div}_{\mathscr{H}_0} Aa(x) - 2(Aa(x), x)_0, \quad x \in \Phi', \tag{5}$$

— измеримая квадратично интегрируемая функция, определенная в силу (3). Интегрированием по частям проверяется равенство $(H_{A,a} f, g)_{L_2(\Phi', d\mu_0)} = D_{A,a}(f, g)$, f; $g \in C_b^2(\Phi')$.

2. Построим представление для полугруппы, соответствующей оператору $H_{A,a}$, в терминах однородного марковского процесса $\{\Phi', \Omega, \nu_x^A\}$ с фазовым пространством Φ', пространством траекторий $\Omega = (\Phi')^{[0,+\infty)} = \{\xi(t) \in \Phi', \ t \in [0, +\infty)\}$ и семейством вероятностных распределений ν_x^A, $x \in \Phi'$, на Ω, порожденного сохраняющей положительность полугруппой e^{-tH_A}, $t \geqslant 0$ [4]. Процесс $\{\Phi', \Omega, \nu_x^A\}$ однозначно определяется стохастическими ядрами $\mu_{t,x}^A$, $t \geqslant 0$, $x \in \Phi'$, которые задают явный вид операторов e^{-tH_A}, $t \geqslant 0$. Как показано в [2], для $t \geqslant 0$ и $f \in L_2(\Phi', d\mu_0)$ справедливо

равенство

$$(e^{-tH}Af)(x)=\int_{\Psi'} f(y)\,d\mu_{t,x}^{A}(y)\quad\forall\, x\in\Phi'\,(\mathrm{mod}\,\mu_0),\tag{6}$$

где $\mu_{t,x}^{A}$, $t\geqslant 0$, $x\in\Phi'$, — гауссовская мера на Φ' с характеристическим функционалом $\tilde{\mu}_{t,x}^{A}(\varphi)=e^{i(x,e^{-tA}\varphi)_0-1/4(\varphi,(1-e^{-2tA})\varphi)_0}$, $\varphi\in\Phi$. На основе (6) устанавливаются свойства регулярности семейства распределений ν_x^A, $x\in\Phi'$.

Лемма 1. *Пусть оснащения* (1) *выполнено условие* $\forall\,\tau_0\in T$ $\exists\,\tau_0\in T: e^{-tA}\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_{-\tau_0},\mathscr{H}_{-\tau_0})$ $\forall\, t\geqslant 0$ *и отображения* $[0,+\infty)\ni t\to\to e^{-tA}x\in\mathscr{H}_{-\tau_0}$ *непрерывны* $\forall\, x\in\mathscr{H}_{-\tau_0}$. *Тогда* $\exists\,\tau\in T$, $\tau=\tau(\tau_0,\tau_0')$, *такое, что* $\mathscr{H}_{-\tau}\supset\mathscr{H}_{-\tau_0}$, $\mathscr{H}_{-\tau_0}$ *и множество* $\Omega_{-\tau}$ *непрерывных траекторий* $\xi(\cdot):[0,+\infty)\to\mathscr{H}_{-\tau}$ *имеет полные внешние меры* ν_x^A *одновременно для всех* $x\in\mathscr{H}_{-\tau_0}$.

Фиксируем пространства $\mathscr{H}_{-\tau_0}\subset\mathscr{H}_{-\tau}\subset\mathscr{H}_{-\tau'}$, $\tau'\in T$ выбираем из условия $A\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_{-\tau},\mathscr{H}_{-\tau'})$. Введем в рассмотрение бесконечномерный винеровский процесс $w_x^A(t)$, $t\geqslant 0$, со значениями в $\mathscr{H}_{-\tau'}$ и корреляционным оператором A, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega_{-\tau},\nu_x^A)$, $x\in\mathscr{H}_{-\tau_0}$, равенством

$$w_x^A(t,\xi(\cdot))=\xi(t)+\int_0^t A\xi(s)\,ds-x,\ t\geqslant 0,\ \xi(\cdot)\in\Omega_{-\tau}.\tag{7}$$

На процессы $w_x^A(t)$, $t\geqslant 0$, $x\in\mathscr{H}_{-\tau_0}$, стандартным образом распространяется техника стохастического интегрирования. В частности, для функции $a:\Phi'\to\mathscr{H}_0$, удовлетворяющей (3), и почти всех $x\in\mathscr{H}_{-\tau_0}\,(\mathrm{mod}\,\mu_0)$ на $(\Omega_{-\tau},\nu_x^A)$ можно определить непрерывный локально квадратично интегрируемый мартингал $I_x^a(t)=\int_0^t(a(\xi(s)),dw_x^A(s))_0$, $t\geqslant 0$ $\left(\text{характеристика } \langle I_x^a,I_x^a\rangle(t)=\int_0^t\|A^{1/2}a(\xi(s))\|_0^2ds\right)$.

Следующее предложение содержит аналог известной формулы Фейнмана—Каца—Ито для конечномерных операторов Шредингера с магнитными полями [5].

Теорема 1. *Однопараметрическое семейство операторов* P_t, $t\geqslant 0$, *вида*

$$(P_tf)(x)=\int_{\Omega_{-\tau}} e^{-i/2\int_0^t \gamma_{A,a}(\xi(s))ds-i\int_0^t(a(\xi(s)),dw_x^A(s))_0} f(\xi(t))\,d\nu_x^A(\xi(\cdot)),$$

$$x\in\Phi'\,(\mathrm{mod}\,\mu_0),\quad f\in L_2(\Phi',d\mu_0),\tag{8}$$

образует в $L_2(\Phi',d\mu_0)$ *сильно непрерывную самосопряженную полугруппу, сужение генератора которой на* $C_b^2(\Phi')$ *совпадает с* $H_{A,a}$. *Полугруппа* P_t, $t\geqslant 0$, *является* L_p*-сжимающей для всех* $p\geqslant 1$, *а в случае строгой положительности оператора* $A\geqslant c\mathbf{1}>0$ — *гиперсжимающей:* $\forall\, p$, $q>1$ *таких, что* $e^{-2tc}\leqslant\dfrac{p-1}{q-1}$ *оператор* P_t *задает сжимающее отображение из* $L_p(\Phi',d\mu_0)$ *в* $L_q(\Phi',d\mu_0)$.

Замечания: 1. L_p — Оценка для оператора P_t, $t\geqslant 0$, — прямое следствие сжимаемости (гиперсжимаемости) полугруппы e^{-tH_A}, $t\geqslant 0$. Остальные свойства проверяются непосредственно.

2. Подобно конечномерной ситуации представление (8) можно фор-

мально записать с использованием стохастического интеграла $\int_0^t (a(\xi(s)),$ $d\xi_x(s))_0$ по каноническому процессу $\xi_x(t, \xi(\cdot)) = \xi(t)$, $t \geqslant 0$, на $(\Omega_{-\tau}, \nu_x^A)$, $x \in \mathcal{H}_{-\tau_0}$. Однако построение этого интеграла с необходимостью потребует разложения $\xi_x(t)$, $t \geqslant 0$, на мартингальную и абсолютно интегрируемую части. Равенство (7) содержит такое разложение.

Теорема 1 позволяет свести вопрос о существенной самосопряженности оператора $H_{A,a}$ к рассмотрению инвариантных относительно полугруппы P_t, $t \geqslant 0$, пространств функций. В этом направлении можно получить следующий результат.

Теорема 2. *При $a \in C_b^3(\Phi', \Phi)$ оператор $H_{A,a}$ в существенном самосопряжен на $C_b^2(\Phi')$.*

3. Установим для бесконечномерного оператора Шредингера аналог неравенства Като [6]. Считаем $a \in C_b^3(\Phi', \Phi)$. Так как оператор $H_{A,a}$ непрерывно действует из $C_b^2(\Phi')$ в любое $L_q(\Phi', d\mu_0)$, $1 \leqslant q < \infty$, для $f \in L_p(\Phi', d\mu_0)$, $p > 1$, можно определить $H_{A,a}f \in (C_b^2(\Phi'))'$:

$$(H_{A,a}f, g)_{L_2(\Phi', d\mu_0)} = (f, H_{A,a}g)_{L_2(\Phi', d\mu_0)}, \quad g \in C_b^2(\Phi').$$

Теорема 3. *Пусть $f \in L_p(\Phi', d\mu_0)$ с $p > 1$ и $H_{A,a}f \in L_p(\Phi', d\mu_0)$ (в смысле обобщенных функций). Тогда справедливо следующее неравенство между обобщенными функциями из $(C_b^2(\Phi'))'$:*

$$H_A |f| \leqslant \operatorname{Re}[\operatorname{sgn} \bar{f} \cdot H_{A,a} f], \tag{9}$$

где

$$\operatorname{sgn} \bar{f}(x) = \begin{cases} \bar{f}(x) \, |f(x)|^{-1}, & f(x) \neq 0; \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

На гладких функциях $f \in C_b^2(\Phi')$ соотношение (9) доказывается непосредственно. При перенесении его на более широкий класс функций используются методы работы [7], содержащей вариант неравенства Като для операторов вторичного квантования H_A.

Применим неравенство (9) к изучению возмущений оператора $H_{A,a}$ неотрицательными потенциалами.

Теорема 4. *Пусть $0 \leqslant V \in L_{2+\varepsilon}(\Phi', d\mu_0)$, $\varepsilon > 0$. Тогда $H_{A,a} + V$ в существенном самосопряжен на $C_b^2(\Phi')$. Полугруппа $e^{-t(H_{A,a}+V)}$, $t \geqslant 0$, допускает представление:* $\forall f \in L_2(\Phi', d\mu_0)$

$$(e^{-t(H_{A,a}+V)}f)(x) = \int_{\Omega_{-\tau}} e^{-i/2\int_0^t \gamma_{A,a}(\xi(s))ds - i\int_0^t (a(\xi(s)), dw_x^A(s))_0 - \int_0^t V(\xi(s))ds} f(\xi(t)) \, d\nu_x^A(\xi(\cdot)),$$

$$x \in \Phi' \ (\operatorname{mod} \mu_0). \tag{10}$$

Доказательство. Существенная самосопряженность оператора $H_{A,a} + V$ эквивалентна условию $\operatorname{Ker}(H_{A,a} + V + 1)^* = 0$ [6], теорема X. 26. Покажем, что равенству (в смысле обобщенных функций) $H_{A,a}f = -(V+1)f$, $f \in L_2(\Phi', d\mu_0)$ удовлетворяет единственная функция $f = 0$. Условие $V \in L_{2+\varepsilon}(\Phi', d\mu_0)$, $\varepsilon > 0$, дает $(V+1)f \in L_p(\Phi', d\mu_0)$, $p > 1$. Применим неравенство Като для оператора $H_{A,a}$:

$$H_A |f| \leqslant \operatorname{Re}[\operatorname{sgn} \bar{f} \cdot H_{A,a} f] = -\operatorname{Re}[\operatorname{sgn} \bar{f} \cdot (V+1) f] = -(V+1)|f|.$$

Отсюда для $\forall g \in C_b^2(\Phi')$, $g \geqslant 0$,

$$((H_A + 1)|f|, g)_{L_2(\Phi', d\mu_0)} = (|f|, (H_A + 1) g)_{L_2(\Phi', d\mu_0)} \leqslant 0.$$

Осталось положить $g(x) \equiv 1$:

$$((H_A + 1)|f|, 1)_{L_2(\Phi', d\mu_0)} = (|f|, 1)_{L_2(\Phi', d\mu_0)} = \|f\|_{L_1(\Phi', d\mu_0)} \leqslant 0,$$

т. е. $f = 0$.

Представление (10) можно доказать с помощью формулы Троттера либо методами теории случайных процессов подобно теореме 1.

1. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
2. *Кондратьев Ю. Г.* Операторы вторичного квантования и их возмущения.— Киев, 1982. —49 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 82.28).
3. *Кондратьев Ю. Г.* Возмущения операторов вторичного квантования // Функцион. анализ и его прил.— 1982.— **16**, № 4.— С. 76—77.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М.: Наука, 1973.— Т. 2.— 640 с.
5. *Simon B.* Functional integration and guantum Physics. — New York: Acad. press, 1979.— 296 p.
6. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х. т— М.: Мир, 1978.— Т. 2.—395 с.
7. *Кондратьев Ю. Г.* Неравенство Като для операторов вторичного квантования // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 6.— С. 753—756.

Киев. ун-т

Получено 17.12.84