УДК 517.944

Г. П. Хома, М. И. Громяк

Периодические решения гиперболических интегро-дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим краевую задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon f(x, t, u, u_t, u_x) + \varepsilon \int_0^{h(x,t)} \varphi(x, t, s, u(x, s), u_t(x, s), u_x(x, s))\, ds,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \tag{1}$$

Заметим, что исследованию периодических решений гиперболических дифференциальных уравнений, т. е. уравнений вида (1), несодержащих интегрального члена, посвящены работы [1—5]. В настоящей работе установлено, что аналогичные утверждения справедливы и для краевой задачи (1).

Теорема 1. *Пусть функция* $h(x,t)$ *определена в области* $\Pi_\infty = \{0 \leqslant x \leqslant \pi,\ t \in \mathbb{R}\}$, *а функции* $f(x,t,u,u_t,u_x)$ *и* $\varphi(x,t,s,u,u_t,u_x)$ — *в области* $\Omega_\infty = \{0 \leqslant x \leqslant \pi,\ t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R},\ |u| \leqslant a,\ |u_t| \leqslant a,\ |u_x| \leqslant a\}$, *непрерывны по* x, t, s, 2π-*периодические по переменным* t *и* s *и* $f(x,t,u,u_t,u_x) \in \mathrm{Lip}_{u,u_t,u_x}(K;\Omega_\infty)$, $\varphi(x,t,s,u,u_t,u_x) \in \mathrm{Lip}_{u,u_t,u_x}(K_1;\Omega_\infty)$, $K, K_1 = \mathrm{const}$.

Тогда задача Коши

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon f(x,t,u,u_t,u_x) + \varepsilon \int\limits_0^{h(x,t)} \varphi(x,t,s,u(x,s),u_t(x,s),u_x(x,s))\,ds,$$
$$u(0,t) = 0, \qquad u_x(0,t) = \mu(t) \tag{2}$$

для каждой непрерывной и 2π-*периодической функции* $u_x(0,t) = \mu(t)$, $|\mu(t)| < a/2$, *имеет единственное непрерывное* 2π-*периодическое решение в области* $\Delta_\infty = \{0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 2\pi n + x \leqslant t \leqslant 2\pi(n+1) - x,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ *для всех значений параметра* ε, *для которых* $|u| \leqslant a$, $|u_t| \leqslant a$, $|u_x| \leqslant a$ *при* $(x,t) \in \bar{\Delta} = \{0 \leqslant x \leqslant \pi,\ x \leqslant t \leqslant 2\pi - x\}$.

Доказательство. Задаче Коши (2) в классе гладких функций эквивалентна следующая система интегральных уравнений [5]:

$$u_1(x,t) = \mu(t+x) - \varepsilon \int\limits_0^x F[u,u_1,u_2](\eta, t+x-\eta)\,d\eta,$$
$$u_2(x,t) = -\mu(t-x) + \varepsilon \int\limits_0^x F[u,u_1,u_2](\eta, t-x+\eta)\,d\eta, \tag{3}$$
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \{u_1(\xi,t) - u_2(\xi,t)\}\,d\xi \ \forall (x,t) \in \bar{\Delta} = \{0 \leqslant x \leqslant \pi,\ x \leqslant t \leqslant 2\pi - x\},$$

где $u_1 = u_t + u_x$, $u_2 = u_t - u_x$, $F[u,u_1,u_2](x,t) = f(x,t,u(x,t),u_t(x,t),u_x(x,t)) + \int\limits_0^{h(x,t)} \varphi(x,t,s,u(x,s),u_t(x,s),u_x(x,s))\,ds$.

Решая методом последовательных приближений систему интегральных уравнений (3), убеждаемся в справедливости теоремы 1.

Замечание. Очевидно, построенное решение $u(x,t)$ задачи Коши (2) удовлетворяет первому краевому условию $u(0,t) = 0$, а второе краевое условие $u(\pi,t) = 0$, вообще говоря, не при каждой начальной функции $\mu(t)$ выполняется.

Теорема 2. *Пусть в областях* Π_∞ *и* Ω_∞ *выполнены условия теоремы* 1 *и условия*: а) $f(x,t,0,0,0) \not\equiv 0$ *или* $\varphi(x,t,s,0,0,0) \not\equiv 0$; б) $f(x,-t,0,0,0) = -f(x,t,0,0,0)$; $\varphi(x,-t,-s,0,0,0) = \varphi(x,t,s,0,0,0)$; $h(x,-t) = -h(x,t)$ *и для каждой нечетной функции* $u(x,t) \in C^1$ *по переменной* t *функция* $F[u,u_1,u_2](x,t)$ *нечетная по переменной* t.

Тогда для $u_x(0,t) = 0$ *решение задачи Коши* (2) *в области* $\bar{\Delta} = \{0 \leqslant x \leqslant \pi,\ x \leqslant t \leqslant 2\pi - x\}$ — *удовлетворяет условию* $u(\pi,\pi) = 0$.

Доказательство. На основании (3) решение задачи Коши (2) при $u_x(0,t) = \mu(t) \equiv 0$ удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$u_1(x,t) = -\varepsilon \int\limits_0^x F[u,u_1,u_2](\eta, t+x-\eta)\,d\eta, \quad u_2(x,t) = \varepsilon \int\limits_0^x F[u,u_1,u_2](\eta, t-x+\eta)\,d\eta,$$
$$u(x,t) = -\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^\xi \{F[u,u_1,u_2](\eta, t+\xi-\eta) + F[u,u_1,u_2] \times (\eta, t-\xi+\eta)\}\,d\eta. \tag{4}$$

Теперь, выбирая за нулевое приближение $u_1^0(x, t) = 0$, $u_2^0(x, t) = 0$, $u^0(x, t) = 0$ и учитывая систему (4), строим последовательности функций $(u_1^n(x, t))$, $(u_2^n(x, t))$, $(u^n(x, t))$. Покажем, что все члены последовательности $(u^n(x, t))$ — нечетные функции переменной t. Имеем

$$u^1(x, t) = -\frac{\varepsilon}{2}\int_0^x d\xi\int_0^\xi \{F[0, 0, 0](\eta, t+\xi-\eta) + F[0, 0, 0](\eta, t-\xi+\eta)\}d\eta \equiv$$

$$\equiv -\frac{\varepsilon}{2}\int_0^x d\xi\int_0^\xi \{f(\eta, t+\xi-\eta, 0, 0, 0) + f(\eta, t-\xi+\eta, 0, 0, 0)\}\, d\eta -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^x d\xi\int_0^\xi \Big\{\int_0^{h(\eta, t+\xi-\eta)} \varphi(\eta, t+\xi-\eta, s, 0, 0, 0)\, ds + \int_0^{h(\eta, t-\xi+\eta)} \varphi(\eta, t-\xi+$$

$$+\eta, s, 0, 0, 0)\, ds\Big\}\, d\eta = -u_{11}(x, t) - u_{12}(x, t). \tag{5}$$

На основании условия б) теоремы 2 получаем

$$u_{11}(x, -t) = -u_{11}(x, t), \quad u_{12}(x, -t) = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^x d\xi\int_0^\xi \Big\{\int_0^{h(\eta, -t+\xi-\eta)} \varphi(\eta, -t+$$

$$+\xi-\eta, s, 0, 0, 0)\, ds + \int_0^{h(\eta, -t-\xi+\eta)} \varphi(\eta, -t-\xi+\eta, s, 0, 0, 0)\, ds\Big\}\, d\eta. \tag{6}$$

Отсюда, произведя замену переменных во внутренних интегралах и учитывая условие б) теоремы 2, находим

$$u_{12}(x, -t) = -\frac{\varepsilon}{2}\int_0^x d\xi\int_0^\xi \Big\{\int_0^{h(\eta, t-\xi+\eta)} \varphi(\eta, -t+\xi-\eta, -s, 0, 0, 0)\, ds +$$

$$+\int_0^{h(\eta, t+\xi-\eta)} \varphi(\eta, -t-\xi+\eta, -s, 0, 0, 0)\, ds\Big\}\, d\eta = -u_{12}(x, t). \tag{7}$$

Таким образом, учитывая (5) — (7), получаем $u^1(x, -t) = -u^1(x, t)$. Далее на основании условия б) теоремы 2 и третьего уравнения системы (4) методом математической индукции устанавливаем, что все члены последовательности $(u^n(x, t))$ — нечетные функции переменной t и $u^n(\pi, \pi) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, предельная функция $u_{\bar\Delta}(x, t) = \lim\limits_{n\to\infty} u^n(x, t)$ — решение задачи Коши (2) в области $\bar\Delta = \{0 \leqslant x \leqslant \pi,\ x \leqslant t \leqslant 2\pi - x\}$ — удовлетворяет краевым условиям $u(0, t) = 0$, $u(\pi, \pi) = 0$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть в областях Π_∞ и Ω_∞ выполнены условия теоремы 1 и условие б) теоремы 2. Тогда для каждой непрерывной, нечетной и 2π-периодической функции $u_x(0, t) = \mu(t)$, $|\mu(t)| < a/2$, решение задачи Коши в области $\bar\Delta$ удовлетворяет условию $u(\pi, \pi) = 0$.*

Доказательство. Выбирая за нулевое приближение $u^0(x, t)$ в системе интегральных уравнений (3) нечетную и 2π-периодическую по t функцию $u^0(x, t) = \frac{1}{2}\int_0^x (\mu(t+\xi) + \mu(t-\xi))\, d\xi$, полагая $u_1^0(x, t) = \mu(t)$, $u_2^0(x, t) = -\mu(t)$ и учитывая условия теоремы, убеждаемся в справедливости теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и условие $f(x, t, 0, 0, 0) \equiv 0$, $\varphi(x, t, s, 0, 0, 0) \equiv 0$. Тогда для каждой непрерывной, нечетной и 2π-периодической функции $u_x(0, t) = \mu(t)$, $|\mu(t)| < a/2$, краевая задача (1) имеет единственное решение $u \in L^\infty$.*

Доказательство. Разобьем прямоугольник $\Pi_{2\pi} = \{0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant \leqslant t \leqslant 2\pi\}$ прямыми $t = x$ и $t = 2\pi - x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, на три части $\overline{\Delta}, \overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2$: $\overline{\Delta} = \{(x, t) \in \Pi_{2\pi} : 0 \leqslant x \leqslant \pi; x \leqslant t \leqslant 2\pi - x\}$, $\overline{\Delta}_1 = \{(x, t) \in \Pi_{2\pi} : 0 \leqslant x \leqslant \pi; 0 \leqslant \leqslant t \leqslant x\}$, $\overline{\Delta}_2 = \{(x, t) \in \Pi_{2\pi} : 0 \leqslant x \leqslant \pi, 2\pi - x \leqslant t \leqslant 2\pi\}$. Полагая в областях $\overline{\Delta}_1$ и $\overline{\Delta}_2$ $u(x, t) \equiv 0$, а в области $\overline{\Delta}$ — $u(x, t) = u_{\overline{\Delta}}(x, t)$ (решение задачи Коши (2) в области $\overline{\Delta}$), получаем ограниченную функцию, 2π-периодическую по переменной t, определенную на прямоугольнике $\Pi_{2\pi}$, которая является решением краевой задачи (1) на $\Pi_{2\pi}$ и принадлежит L^∞. Теорема 4 доказана.

1. *Rabinowitz P. H.* Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations // Communs Pure and Appl. Math — 1967.— **20**, N 1.— P. 145—205.
2. *Rabinowitz P. H.* A priori bounds for a semilinear ware equation // Lect. Notes Math.— 1979.— N 703.— P. 340—347.
3. *Brezis Haim, Coron Jean-Michel, Nirenberg Lonis.* The vibrations for a nonlinear ware equations and a theorem of P. Rabinowitz // Communs Pure and Appl. Math.— 1980.— **33**, N 5.— P. 667—684.
4. *Brezis Haim, Coron Jean-Michel.* Periodic solutions of nonlinear ware equations and Hamiltonian system // Amer. J. Math.— 1981.— **103**, N 3.— P. 559—570.
5. *Хома Г. П.* О структуре периодических решений волнового уравнения второго порядка.— Киев, 1985.— 32 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 85.53).

Тернополь. пед. ин-т,
Ин-т математики АН УССР, Киев

Полученс 13.09.85