УДК 519.4

В. Л. Островский

Конструкция квазиинвариантных мер на одном классе групп, не являющихся локально компактными

В задачах теории представлений групп естественно возникает вопрос о построении регулярной борелевской меры $d\mu(\cdot)$ на топологической группе G, инвариантной относительно правых либо левых групповых сдвигов. Если G локально компактна, существует единственная с точностью до постоянного множителя инвариантная (σ-конечная) мера — мера Хаара. Обратно, теорема А. Вейля [1] утверждает, что существование меры Хаара влечет локальную компактность группы G. Любая вероятностная мера $d\mu(\cdot)$, эквивалентная мере Хаара, обладает свойством G-квазиинвариантности: для любого $g \in G$ мера $d\mu_g(\cdot) = d\mu(\cdot g)$ эквивалентна мере $d\mu(\cdot)$.

Однако уже для простейшей группы, не являющейся локально компактной — группы аддитивных сдвигов бесконечномерного локально-выпуклого линейного топологического пространства L — не существует регулярной борелевской меры, квазиинвариантной относительно сдвигов на все элементы $x \in L$ [2]. В связи с этим для групп, не являющихся локально компактными, естественно вместо пары $(G, d\mu(\cdot))$ рассматривать тройку $(G, G_0, d\mu(\cdot))$, где $G_0 \subset G$ — плотная в G подгруппа, а $d\mu(\cdot)$ — регулярная борелевская вероятностная мера на G, квазиинвариантная относительно правых (или левых) групповых сдвигов на элементы из G_0 [3].

В настоящей работе рассмотрен один класс групп G_0, для которых естественно строятся объемлющие группы G, причем действие группы G_0 в G обладает свойствами, позволяющими построить на G регулярную борелевскую меру, квазиинвариантную относительно правого либо левого действия подгруппы G_0. Построенные меры эргодические относительно действия G_0.

Известно, что если $d\mu_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, — квазиинвариантные меры на $\mathbb{R}^1$, то продакт-мера $d\mu(x) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} d\mu_k(x_k)$ на $\mathbb{R}^{\infty}$ квазиинвариантна относительно финитных сдвигов ($\mathbb{R}_0^{\infty}$-квазиинвариантна). Дальнейшие построения — обобщение приведенного примера на случай некоммутативных групп.

Пусть задана последовательность вложенных локально компактных групп: $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$, причем при всех $n \in \mathbb{N}$ группа G_{n+1} разлагается в полупрямое произведение: $G_{n+1} = G^{(n+1)} \otimes G_n$ ($G^{(n+1)}$ — некоторая нормальная подгруппа в G_{n+1}). При этом условии G_n — фактор-группа, $G_n = G_{n+1}/G^{(n+1)}$. Естественные проекции $p_{n+1}^n : G_{n+1} \to G_{n+1}/G^{(n+1)}$ определяют последовательность проекций $p_{n+1}^n : G_{n+1} \to G_n$, что позволяет наряду с группой $G_0 = \operatorname{ind}\lim G_n$ построить группу $G = \operatorname{pr}\lim G_n$. Элементы группы G — последовательности $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots)$, $g_n \in G_n$, для которых $p_{n+1}^n(g_{n+1}) = g_n$. Групповая операция определяется покомпонентно. Группа G_0 плотно топологически вложена в G как подгруппа стабилизирующихся последовательностей, т. е. последовательностей вида $g_0 = (g_1, g_2, \ldots, g_n, g_n, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$.

Пример 1. Положим $G_n = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$. Зададим вложения $\mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Проекции $p_{n+1}^n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ имеют вид $\mathbb{R}^{n+1} \ni (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbb{R}_0^{\infty} = \operatorname{ind}\lim \mathbb{R}^n$ — группа финитных последовательностей вещественных чисел. Группа $G = \operatorname{pr}\lim \mathbb{R}^n$ изоморфна группе $\mathbb{R}^{\infty}$ всех последовательностей, наделенной тихоновской топологией.

Пример 2. Пусть $B(n, \mathbb{R})$, $n \geqslant 3$,— группа вещественных верхнетреугольных матриц порядка $n \times n$ с единицами на главной диагонали; $B(n+1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \otimes B(n, \mathbb{R})$, где $B(n, \mathbb{R})$ — подгруппа матриц в $B(n+1, \mathbb{R})$, имеющих нули в последнем столбце выше главной диагонали, а $\mathbb{R}^n$ отождествляется с подгруппой матриц, у которых заполнен только последний столбец. Соответствующие группы $B_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \operatorname{ind}\lim B(n, \mathbb{R})$ и $B(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \operatorname{pr}\lim B(n, \mathbb{R})$ — группы бесконечных матриц вида $I + A_0$, $I + A$ соответственно, где A_0 — финитная, а A — произвольная верхнетреугольная матрицы.

Пример 3. Пусть H — локально компактная группа Ли. Положим $G_1 = H$, $G_2 = H \times H = H^2, \ldots, G_n = G_{n-1}^2 = H^{2^{n-1}}, \ldots$ и зададим вложения $G_n \ni g \mapsto (g, g) \in G_{n+1}$. Проекции p_{n+1}^n имеют в этом случае вид $G_{n+1} \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 \in G_n$; $G_0 = \operatorname{ind}\lim G_n$ — группа $H_{\Pi(2)}$ ступенчатых H-токов на отрезке $[0, 1]$ с разрывами в двоично-рациональных точках [4], G — пополнение группы G_0 в топологии проективного предела последовательности групп G_n.

Перейдем к построению G_0-квазиинвариантных мер на группе G. Рассмотрим тихоновское произведение $\prod_{k=1}^{\infty} G^{(k)}$ ($G^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} G_1$) и определим отображения φ_r, $\varphi_l : \prod_{k=1}^{\infty} G^{(k)} \to G$, полагая $\varphi_r(g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(n)}, \ldots) = (g^{(1)}, g^{(2)}g^{(1)}, \ldots, g^{(n)} \ldots g^{(1)}, \ldots)$, $\varphi_l(g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(n)}, \ldots) = (g^{(1)}, g^{(1)}g^{(2)}, \ldots g^{(1)} \ldots g^{(n)}, \ldots)$.

Лемма. *Отображение $\varphi_r(\varphi_l)$ гомеоморфно отображает $\prod_{k=1}^{\infty} G^{(k)}$ на G.*

Пусть $d\mu_k(\cdot)$ — $G^{(k)}$-квазиинвариантная вероятностная мера на группе $G^{(k)}$. На измеримом пространстве $\left(\prod_{k=1}^{\infty} G^{(k)}, \mathcal{B}\left(\prod_{k=1}^{\infty} G^{(k)}\right)\right)$ построим продакт-меру $d\mu(\cdot) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} d\mu_k(\cdot)$. Обозначим через $d\mu_r(\cdot)$ (соответственно $d\mu_l(\cdot)$) меру на группе G, являющуюся образом меры $d\mu(\cdot)$ при отображении φ_r (соответственно φ_l).

Т е о р е м а. *Мера* $d\mu_r(\cdot)$ *квазиинвариантна и эргодична относительно правого действия группы* G_0. *Аналогично мера* $d\mu_l(\cdot)$ *квазиинвариантна и эргодична относительно левого действия группы* G_0.

Отметим, что построенная мера $d\mu_r(\cdot)$ может не быть квазиинвариантной относительно левого действия группы G_0.

П р и м е р 4. Пусть $G_0 = B_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $G = B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (см. пример 2). В качестве меры $d\mu(\cdot)$ на $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$ выберем гауссовскую меру $d\gamma_C(\cdot)$ с диагональным корреляционным оператором C. Приведенные в [5] необходимые и достаточные условия $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$-квазиинвариантности меры $d\gamma_C(\cdot)$ позволяют построить меру $d\mu_r(\cdot)$, не являющуюся квазиинвариантной относительно левого действия группы $B_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

1. *Вейль А.* Интегрирование в топологических группах и его применения.— М. : Изд-во иностр. лит., 1950.— 222 с.
2. *Судаков В. Н.* Линейные множества с квазиинвариантной мерой // Докл. АН СССР.— 1969.— 127, № 3.— С. 524—525.
3. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М. : Физматгиз, 1961.— 472 с.
4. *Самойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1984.— 232 с.
5. *Косяк А. В.* Область Гординга и продолжение унитарных представлений бесконечномерных групп : Автореф. дис. ...канд. физ.- мат. наук.— Киев, 1985.— 19 с.

Киев. ун-т Получено 05.12.85