УДК 519.48

В. М. Футорный

Некоторое обобщение модулей Верма и неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3)$

Настоящая работа посвящена изложению одной конструкции модулей над полупростой конечномерной алгеброй Ли над алгебраически замкнутым полем $\mathfrak{k}$ характеристики 0. Построенные модули допускают единственный простой фактор-модуль. Таким способом могут быть получены все простые фактор-модули модулей Верма [1], а также некоторые дополнительные серии простых модулей. В случае алгебры Ли sl(3) дана характеризация простых sl(3)-модулей с конечномерными весовыми пространствами, не получающихся указанным способом.

Далее в основном будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в работе [1].

1. Модули $M(\lambda, \gamma)$ и $L(\lambda, \gamma)$. Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая конечномерная алгебра Ли, $\mathfrak{H}$ — подалгебра Картана, R — соответствующая система корней, Δ — базис системы R, R_+ (соответственно R_-) — множество положительных (соответственно отрицательных) корней относительно Δ, $\omega = \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \in R_+} \alpha$.

Пусть $\beta \in \Delta$. Пару $\Phi = (\Delta, \beta)$ назовем отмеченным базисом системы R. Для любого $\alpha \in R$ выберем $X_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha - \{0\}$. Рассмотрим подалгебру $\overline{\mathfrak{A}}_\Phi = \langle X_\alpha \mid \alpha \in R_+ - \{\beta\} \rangle \subset \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{A}_\Phi = \overline{\mathfrak{A}}_\Phi \oplus \mathfrak{H}$.

Рассмотрим некоторое представление (V, ρ) алгебры $\mathfrak{G}$. Для любого $\chi \in \mathfrak{H}^*$ определим подпространство $V_\chi = \{v \in V \mid \rho(h) v = \chi(h) v \,\forall\, h \in \mathfrak{H}\}$. Если $V_\chi \neq 0$, то χ будем называть весом $\mathfrak{G}$-модуля V. Множество всех весов обозначим через $S(V)$.

Определение 1. *Ненулевой элемент $v \in V_\chi$ назовем почти примитивным элементом веса χ относительно отмеченного базиса Φ, если $\overline{\mathfrak{A}}_\Phi v = 0$.*

Предположим, что $\lambda \in \mathfrak{H}^*$. Определим одномерное представление $\rho_{\lambda-\omega}$ алгебры $\mathfrak{A}_\Phi : \rho_{\lambda-\omega}(a + H) = (\lambda - \omega)(H)$ для любых $H \in \mathfrak{H}$, $a \in \overline{\mathfrak{A}}_\Phi$. Пусть $U(\mathfrak{G})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{G}$, γ — некоторый элемент поля и $c = \sum\limits_{\alpha \in R_+} \frac{1}{K(X_\alpha, X_{-\alpha})} X_{-\alpha} X_\alpha + H_c$ — элемент Казимира, где $H_c \in U(\mathfrak{H})$.

Рассмотрим $U(\gamma) = U(\mathfrak{G})/(c - \gamma)$ и построим $\mathfrak{G}$-модуль $M(\lambda, \gamma) = U(\gamma) \underset{U(\mathfrak{A}_\Phi)}{\otimes} \mathfrak{k}$, ассоциированный с $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, Φ, λ, γ, где $\mathfrak{A}_\Phi$-модуль $\mathfrak{k}$ определен формой $\lambda - \omega$.

Предложение 1. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — попарно различные элементы множества $R_+ - \{\beta\}$. Тогда*

1) $M(\lambda, \gamma) = \bigoplus\limits_{\chi \in \mathfrak{H}^*} M(\lambda, \gamma)_\chi$;

2) *веса модуля $M(\lambda, \gamma)$ имеют вид $\lambda - \omega - \sum\limits_{\alpha \in \Delta - \{\beta\}} n_\alpha \alpha - n_\beta \beta$, коэффициенты n_α, n_β — целые числа, причем $n_\alpha \geqslant 0$; кроме того, для любого $\chi \in \mathfrak{H}^*$ $\dim M(\lambda, \gamma)_\chi = \Gamma(\lambda - \omega - \chi)$, где $\Gamma(\nu)$ — число различных представлений ν в виде $\sum\limits_{\alpha \in R_+ - \{\beta\}} n_\alpha \alpha + n_\beta \beta$ с целыми неотрицательными n_α и целыми n_β;*

3) *для любого $\chi \in \mathfrak{H}^*$*

$$M(\lambda, \gamma)_\chi = \sum_{\substack{p_i, t_i \in N, t_1 t_2 = 0, \\ \lambda - \omega - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \alpha_i - t_1 \beta + t_2 \beta = \chi}} X_{-\alpha_1}^{p_1} X_{-\alpha_2}^{p_2} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n} X_{-\beta}^{t_1} X_\beta^{t_2} \otimes \mathfrak{k};$$

4) $M(\lambda, \gamma)_{\lambda-\omega} = 1 \otimes \mathfrak{k}$, $U(\overline{\mathfrak{A}}_\Phi) M(\lambda, \gamma)_{\lambda-\omega} = 0$.

Предложение 2. *Пусть V — некоторый $\mathfrak{G}$-модуль, $\lambda \in \mathfrak{H}^*$, v — почти примитивный элемент веса λ относительно отмеченного базиса Φ такой, что $cv = \gamma v$. Предположим, что V порожден элементом v как $\mathfrak{G}$-модуль. Тогда*

1) *существует единственный $\mathfrak{G}$-гомоморфизм ψ из $M(\lambda + \omega, \gamma)$ в V такой, что $\psi(1 \otimes 1) = v$; этот гомоморфизм сюръективен;*

2) $V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{H}^*} V_\chi$; *каждое подпространство* V_χ *конечномерно, причем если* $V \neq 0$, *то* $\dim V_\lambda = 1$;

3) *любой эндоморфизм* $\mathfrak{G}$*-модуля* V *скалярен.*

Следствие 1. *Пусть* $M(\lambda)$ — *модуль Верма, ассоциированный с* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, Δ, λ. *Тогда существует эпиморфизм* $\psi: M(\lambda, \gamma_\lambda) \to M(\lambda)$, *где* $\gamma_\lambda = \rho_{\lambda-\omega}(H_c)$.

Предложение 3. *Пусть* $\lambda \in \mathfrak{H}^*$. *Положим* $M(\lambda, \gamma)_+ = \sum_{\chi \neq \lambda-\omega} M(\lambda, \gamma)_\chi$. *Тогда любой* $\mathfrak{G}$*-подмодуль модуля* $M(\lambda, \gamma)$, *отличный от* $M(\lambda, \gamma)$, *содержится в* $M(\lambda, \gamma)_+$.

В $M(\lambda, \gamma)$ существует наибольший $\mathfrak{G}$-подмодуль $\mathfrak{W}$, отличный от $M(\lambda, \gamma)$.

Обозначим через $L(\lambda, \gamma)$ $\mathfrak{G}$-модуль $M(\lambda, \gamma)/\mathfrak{M}$.

Предложение 4. *Рассмотрим простой* $\mathfrak{G}$*-модуль* V *и форму* $\lambda \in \mathfrak{H}^*$. *Пусть* V *содержит почти примитивный элемент* v *веса* $\lambda - \omega$ *относительно отмеченного базиса* Φ *такой, что* $cv = \gamma v$. *Тогда* $V \simeq L(\lambda, \gamma)$.

Доказательство предложений 1 — 4 аналогично доказательству соответствующих результатов для модулей Верма [1, с. 256 — 259].

Следствие 2. *Пусть* $L(\lambda)$ — *фактор-модуль модуля Верма, ассоциированного с* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, Δ, λ *по максимальному подмодулю. Тогда* $L(\lambda) \simeq L(\lambda, \gamma_\lambda)$.

Следствие 3. *Следующие условия равносильны:*

1) $L(\lambda, \gamma) \simeq L(\lambda', \gamma')$, *где* $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{H}^*$; $\gamma, \gamma' \in \mathfrak{k}$;

2) $\gamma = \gamma'$, $\quad \lambda' = \lambda + l\beta$, $\quad l \in \mathbb{Z}$, $\quad$ *и* $\quad \gamma \neq \gamma_\lambda + \dfrac{m}{K(X_\beta, X_{-\beta})}\left(h_\beta + \dfrac{m+1}{2}\beta([X_\beta, X_{-\beta}])\right)$

для всех целых $m \in [\min(0, l), \max(0, l))$, *где* $h_\beta = (\lambda - \omega)([X_\beta, X_{-\beta}])$.

2. Строение неприводимых представлений алгебры Ли sl (3). Пусть $\mathfrak{G} = \mathrm{sl}(3)$, $\mathfrak{H}$ — алгебра Ли диагональных матриц $H = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $R = \{\lambda_i - \lambda_j,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1, 3}\}$. Для каждого $\varphi = \lambda_i - \lambda_j \in R$ обозначим через e_φ матрицу, у которой на (i, j)-м месте стоит 1, а на остальных — нули. Положим $\alpha = \lambda_1 - \lambda_2$, $\beta = \lambda_2 - \lambda_3$, $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = H_1$, $[e_\beta, e_{-\beta}] = H_2$. В качестве образующих центра универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{G})$ возьмем следующие элементы:

$$c_1 = \frac{1}{18}(H_1^2 + H_2^2 + H_1H_2) + \frac{1}{6}(H_1 + H_2) + \frac{1}{6}(e_{-\alpha}e_\alpha + e_{-\beta}e_\beta + e_{-\alpha-\beta}e_{\alpha+\beta}),$$

$$c_2 = -\frac{2}{9}H_1^3 + \frac{2}{9}H_2^3 - \frac{1}{3}H_1^2H_2 + \frac{1}{3}H_1H_2^2 + H_1^2 - H_2^2 - H_1 + H_2 -$$
$$- e_\alpha e_{-\alpha}H_1 - e_{\alpha+\beta}e_{-\alpha-\beta}H_1 + 2e_\beta e_{-\beta}H_1 - 2e_\alpha e_{-\alpha}H_2 + e_{\alpha+\beta}e_{-\alpha-\beta}H_2 +$$
$$+ e_\beta e_{-\beta}H_2 - 3e_\alpha e_\beta e_{-\alpha-\beta} - 3e_{\alpha+\beta}e_{-\alpha}e_{-\beta} - 3e_\beta e_{-\beta} + 3e_\alpha e_{-\alpha}.$$

Обозначим через $C(\mathfrak{H})$ централизатор подалгебры Ли $\mathfrak{H}$ в $U(\mathfrak{G})$. Элементы H_1, H_2, c_1, c_2, $A = e_\alpha e_{-\alpha}$, $B = e_\beta e_{-\beta}$ порождают алгебру $C(\mathfrak{H})$.

Пусть V — некоторый $\mathfrak{G}$-модуль. Образы элементов алгебры $U(\mathfrak{G})$ в этом представлении будем обозначать теми же символами, что и сами элементы. Далее будем считать, что $V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{H}^*} V_\chi$ и $\dim V_\chi < \infty\ \forall\ \chi \in \mathfrak{H}^*$.

Категорию таких модулей обозначим через $\mathbb{W}$. Выделим в $\mathbb{W}$ полную подкатегорию $\overline{\mathbb{W}}$, состоящую из модулей, у которых операторы H_1, H_2, c_1, c_2 имеют собственный базис. Очевидно, что все простые модули из $\mathbb{W}$ принадлежат категории $\overline{\mathbb{W}}$. Пусть $P = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}$, $T = \langle(2, -1), (-1, 2)\rangle \subset P$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{P} = P/T$. Пусть $G = \overline{P} \times \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$. Для каждой тройки $(\tau, \gamma, \delta) \in G$ обозначим через $\overline{\mathbb{W}}(\tau, \gamma, \delta)$ полную подкатегорию в

$\overline{W}$, образованную теми модулями V, у которых $(\chi(H_1), \chi(H_2)) \in \tau \ \forall \ \chi \in \in S(V)$, а операторы c_1, c_2 имеют единственное собственное значение γ и δ соответственно.

Лемма 1. $\overline{W} = \bigoplus_{\tau,\gamma,\delta} \overline{W}(\tau, \gamma, \delta)$, *т. е. каждый модуль* V *однозначно разлагается в прямую сумму подмодулей* $V = \bigoplus_{\tau,\gamma,\delta} V(\tau, \gamma, \delta)$, *где* $V(\tau, \gamma, \delta) \in \overline{W}(\tau, \gamma, \delta)$.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы в [2].

Далее можно изучать отдельно каждую категорию $\overline{W}(\tau, \gamma, \delta)$. Пусть $V \in \overline{W}(\tau, \gamma, \delta)$—некоторый простой $\mathfrak{G}$-модуль, $\lambda \in S(V)$. Весовое пространство V_λ является простым $C(\mathfrak{H})$-модулем, причем, согласно [1, с. 295], по каждому такому подпространству модуль V восстанавливается однозначно.

Рассмотрим некоторые свойства простого $C(\mathfrak{H})$-модуля V_λ. Пусть $X \in \in C(\mathfrak{H})$. Обозначим через $X(\lambda)$ ограничение оператора X на V_λ. На основании формул (3.3) работы [3] нетрудно получить, что операторы $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}
aA(\lambda) = A^2(\lambda) + A(\lambda)B(\lambda) + B(\lambda)A(\lambda) + A(\lambda)B(\lambda)A(\lambda) - \frac{1}{2}B(\lambda)A^2(\lambda) - \\
- \frac{1}{2}A^2(\lambda)B(\lambda) + rB(\lambda) + \varepsilon 1(\lambda), \quad aB(\lambda) = B^2(\lambda) + A(\lambda)B(\lambda) + \\
+ B(\lambda)A(\lambda) + B(\lambda)A(\lambda)B(\lambda) - \frac{1}{2}B^2(\lambda)A(\lambda) - \frac{1}{2}A(\lambda)B^2(\lambda) + \\
+ r_1A(\lambda) + \varepsilon_1 1(\lambda), \quad \frac{1}{4}(A(\lambda)B(\lambda) - B(\lambda)A(\lambda))^2 = A(\lambda)B(\lambda)A(\lambda) + \\
+ B(\lambda)A(\lambda)B(\lambda) + \frac{1}{2}rB^2(\lambda) + \frac{1}{2}r_1A^2(\lambda) - \left(\frac{a}{2} - 1\right)(A(\lambda)B(\lambda) + \\
+ B(\lambda)A(\lambda)) + (\varepsilon + r)B(\lambda) + (\varepsilon_1 + r_1)A(\lambda) + \eta 1(\lambda),
\end{gathered} \tag{1}$$

где $a = 6\gamma + h_1 + h_2 - \frac{1}{3}h_1^2 - \frac{1}{3}h_2^2 + \frac{1}{6}h_1h_2$, $r = \frac{1}{2}(h_1^2 - 2h_1)$, $r_1 = \frac{1}{2}(h_2^2 - 2h_2)$, $\varepsilon = -\frac{h_1}{6}\left[\delta + \frac{1}{9}(h_2 - h_1)^3 + 6\gamma(h_1 - h_2 - 3) + h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2 - 2h_1 - 4h_2\right]$, $\varepsilon_1 = \frac{h_2}{6}\left[\delta + \frac{1}{9}(h_2 - h_1)^3 + 6\gamma(h_1 - h_2 + 3) - h_1^2 - h_2^2 - h_1h_2 + 4h_1 + 2h_2\right]$, $\eta = 2\varepsilon_1 - sh_1h_2 - 2sh_2 - \frac{1}{2}\pi s + \pi h_2 - \frac{1}{2}\pi h_1 - 2h_1h_2 - h_1^2h_2 - h_2^2h_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}h_1 + \frac{\varepsilon}{2}h_2 + \varepsilon + \frac{1}{4}\pi^2$, $s = 6\gamma - \frac{1}{3}h_1^2 - \frac{1}{3}h_2^2 - \frac{1}{3}h_1h_2$, $\pi = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{9}(h_1 - h_2)^2 - \delta + 6\gamma(h_2 - h_1 + 3) - h_1^2 - h_2^2 - h_1h_2 + 2h_1 - 2h_2\right]$, $h_i = \lambda(H_i)$, $i = 1, 2$, $1(\lambda)$ — тождественный на V_λ оператор.

Матрицу оператора $X(\lambda)$ в некотором базисе пространства V_λ будем обозначать $[X(\lambda)]$.

Рассмотрим следующий многочлен двух переменных: $g(x, y) = (x - y)^2 - 2x - 2y - 2r$.

Определение 2. *Цепочка* $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ *попарно различных элементов поля* $\mathfrak{k}$ *называется связанной, если* $g(z_i, z_{i+1}) = 0 \ \forall \ i = \overline{1, k-1}$.

Замечание 1. Если $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ — связанная цепочка, то $g(z_1, z_k) \neq 0$.

Определение 3. *Связанную цепочку* $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ *будем называть вырожденной, если* $z_1 = -\frac{1}{2}r$ *или* $z_k = -\frac{1}{2}r$, *и невырожденной — в противном случае.*

Определение 4. *Связанную цепочку* $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ *будем называть критической, если* $z_2 = 1 + z_1$ *или* $z_{k-1} = 1 + z_k$, *и некритической — в противном случае.*

Лемма 2. *Все попарно различные собственные значения оператора* $A(\lambda)$ *можно упорядочить в связанную цепочку.*

Доказательство. Выберем в V_λ базис, в котором матрица $[A(\lambda)]$ имеет нормальную форму Жордана. Пусть $[A(\lambda)] = \bigoplus_{i=1}^{n} A_{\mu_i}$, где A_{μ_i} — прямая сумма клеток Жордана с собственным значением μ_i и $\mu_i \neq \mu_j$ при $i \neq j$. При этом $[B(\lambda)] = (B_{ij})_{i,j=1}^{n}$, где B_{ij} — клетка, стоящая на пересечении i-й горизонтальной и j-й вертикальной полос. Из первого соотношения в (1) имеем

$$0 = A_{\mu_i}B_{ij} + B_{ij}A_{\mu_j} + A_{\mu_i}B_{ij}A_{\mu_j} - \frac{1}{2}A_{\mu_i}^2 B_{ij} - \frac{1}{2}B_{ij}A_{\mu_j}^2 + rB_{ij}. \qquad (2)$$

Обозначим оператор, который сопоставляет B_{ij} правую часть (2), через F_{ij}. Тогда F_{ij} имеет вид $F_{ij} = A_{\mu_i} \otimes 1 + 1 \otimes A_{\mu_j} + A_{\mu_i} \otimes A_{\mu_j} - \frac{1}{2}A_{\mu_i}^2 \otimes 1 - \frac{1}{2} 1 \otimes A_{\mu_j}^2 + r1 \otimes 1$, $F_{ij}(B_{ij}) = 0$. Оператор F_{ij} имеет единственное собственное значение $c_{ij} = \mu_i + \mu_j + \mu_i\mu_j - \frac{1}{2}\mu_i^2 - \frac{1}{2}\mu_j^2 + r$, $c_{ij} = c_{ji}$, $c_{ij} = -\frac{1}{2}g(\mu_i, \mu_j)$. Если $c_{ij} \neq 0$, то $B_{ij} = B_{ji} = 0$, что, как легко видеть, влечет приводимость модуля V_λ. Поэтому для каждого i существует $j \neq i$ такое, что $g(\mu_i, \mu_j) = 0$. Осталось перенумеровать собственные значения. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если связанная цепочка* $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ *всех попарно различных собственных значений оператора* $A(\lambda)$ *невырожденная и некритическая, то матрица* $[A(\lambda)]$ *подобна матрице* $\mathrm{diag}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$.

Доказательство. Выберем в V_λ базис, в котором $[A(\lambda)] = \bigoplus_{i=1}^{n} A_{\mu_i}$. Пусть $[B(\lambda)] = (B_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — соответствующее разбиение матрицы $[B(\lambda)]$. Предположим, что $[A(\lambda)]$ недиагональная. Тогда, подставив $[A(\lambda)]$ и $[B(\lambda)]$ в соотношения (1), нетрудно явно указать инвариантное подпространство в V_λ. Это противоречит простоте $C(\mathfrak{H})$-модуля V_λ. Поэтому матрица $[A(\lambda)]$ диагональна. Далее, пусть существует j такое, что $\dim A_{\mu_j} > 1$. Но из второго и третьего соотношений в (1) следует, что B_{ij} — скалярные матрицы для всех i, j. Опять приходим к противоречию с простотой модуля V_λ. Значит, $\dim A_{\mu_i} = 1$ для всех i.

Рассмотрим характеристический многочлен оператора $A(\lambda)$ $f_{A(\lambda)}(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - \mu_i)^{k_i}$ ($\mu_i \neq \mu_j$ при $i \neq j$) и минимальный многочлен $h_{A(\lambda)}(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - \mu_i)^{m_i}$.

Лемма 4. *Пусть цепочка* $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ *связанная.*

1. *Если цепочка* $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ *вырожденная или критическая, то* $k_i \leqslant 2$ *для всех* i, *причем, если* $k_j = 2$, *то* $m_j = 2$.

2. *Пусть цепочка* $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ *вырожденная и* $\mu_1 = -\frac{1}{2}r$. *Тогда, если* $k_j = 1$, *то* $k_i = 1$ $\forall\, i \geqslant j$.

3. *Пусть цепочка* $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ *критическая и* $\mu_2 = 1 + \mu_1$. *Тогда* $k_1 = 1$ *и, если* $k_j = 1$ *при* $j > 1$, *то* $k_i = 1 \forall\ i \geqslant j$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Лемма 5. *Пусть* V — *простой* $\mathfrak{G}$-*модуль*, $\lambda \in S(V)$, $\mu \in \operatorname{Spec}(A(\lambda))$.

1. *Если* $\mu \neq \lambda(H_1)$, *то* $\lambda + \alpha \in S(V)$ *и* $\mu - \lambda(H_1) \in \operatorname{Spec}(A(\lambda + \alpha))$.

2. *Если* $\mu \neq 0$, *то* $\lambda - \alpha \in S(V)$ *и* $\mu + \lambda(H_1) - 2 \in \operatorname{Spec}(A(\lambda - \alpha))$.

Доказательство очевидно.

Замечание 2. Все результаты относительно собственных значений оператора $A(\lambda)$ справедливы и для собственных значений операторов $B(\lambda)$ и $D(\lambda) = e_{\alpha+\beta}e_{-\alpha-\beta}(\lambda)$.

Следствие 4. *Пусть* V — *простой* $\mathfrak{G}$-*модуль*, $\lambda \in \mathfrak{H}^*$, $d_1 = \dim V_\lambda$, $d_2 = \dim V_{\lambda+\varphi}$, *где* $\varphi \in R$. *Тогда* $|d_1 - d_2| \leqslant 1$.

Более того, имеют место следующие результаты о размерностях весовых пространств в простом $\mathfrak{G}$-модуле.

Лемма 6. *Пусть* V — *простой* $\mathfrak{G}$-*модуль*, $\lambda \in \mathfrak{H}^*$, $\varphi \in R$. *Если* $\dim V_\lambda = \dim V_{\lambda+\varphi} \neq 0$, *то* $\det[e_{-\varphi}e_\varphi(\lambda)] \neq 0$.

Докажем лемму для $\varphi = -\alpha$ в частном случае, когда связанная цепочка $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ всех собственных значений оператора невырожденная и некритическая. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Предположим, что $\det[A(\lambda)] = 0$ и $n = \dim V_\lambda = V_{\lambda-\alpha} > 1$.

Пусть $h_i = \lambda(H_i)$, $i = 1, 2$. Возьмем $v_1 \in V_\lambda$ такой, что $A(\lambda)v_1 = 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mu_1 = 0$. Тогда $\mu_2 = 2 - h_1$ или $\mu_2 = h_1$ в силу связанности цепочки $(0, \mu_2, \ldots, \mu_n)$. Рассмотрим первый случай (второй доказывается аналогично). Пусть $e_{-\alpha}v_1 \neq 0$ и $e_\alpha(e_{-\alpha}v_1) = 0$.

Заметим, что цепочка $(h_1 - 2, \mu_2 + h_1 - 2, \ldots, \mu_n + h_1 - 2)$ собственных значений оператора $A(\lambda - \alpha)$ связанная. Поэтому $B(\lambda - \alpha)e_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, где $e_1 = e_{-\alpha}v_1$, $e_2 = e_{-\alpha}v_2$, $A(\lambda)v_2 = \mu_2 v_2$, $\alpha_i \neq 0$, $i = 1,2$. Из соотношения $e_\alpha e_{\alpha+\beta} = e_{\alpha+\beta}e_\alpha$ следует, что $(e_\alpha^2 e_\beta + e_\beta e_\alpha^2 - 2e_\alpha e_\beta e_\alpha)e_{-\beta}e_1 = 0$. Поскольку $e_\alpha e_{-\beta} = e_{-\beta}e_\alpha$, то $e_\alpha^2 e_\beta e_{-\beta}e_1 = 0$ и $e_\alpha v_2 = 0$. Значит, $h_1 = 1$ и цепочка $(0, 1, \ldots, \mu_n)$ критическая, что противоречит предположению. Аналогично рассматривается случай, когда $e_{-\alpha}v = 0$. Если $\det[A(\lambda)] = 0$ и $n = 1$, то, применяя соотношения $e_\alpha e_{-\beta} = e_{-\beta}e_\alpha$ и $e_{-\alpha}e_\beta = e_\beta e_{-\alpha}$, нетрудно показать, что представление приводимо. Лемма доказана.

По такой же схеме доказывается следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть* V — *простой* $\mathfrak{G}$-*модуль* $\lambda \in \mathfrak{H}^*$, $\varphi \in R$, $d_i = \dim V_{\lambda+(i-1)\varphi}$, $i = 1, 2, 3$. *Если* $0 < d_2 < d_1$, *то* $d_3 < d_2$.

Теорема. *Пусть* V — *простой* $\mathfrak{G}$-*модуль*, $\lambda \in S(V)$, $h_i = \lambda(H_i)$, $i = 1, 2$, $\mu_1 \in \operatorname{Spec}(A(\lambda))$, $\mu_2 \in \operatorname{Spec}(B(\lambda))$. *Следующие условия равносильны*:

1) *модуль* V *не содержит почти примитивных элементов при любом выборе отмеченного базиса системы* R;

2) *операторы* e_φ, $\varphi \in R$ *индуцируют изоморфные отображения соответствующих весовых пространств*;

3) $\mu_i \neq l(h_i + l - 1)$, $i = 1, 2$, *для всех целых* l.

Справедливость теоремы следует из лемм 5—7.

3. Пример. Полученные результаты позволяют построить пример простого sl(3)-модуля, не содержащего почти примитивных элементов при любом выборе отмеченного базиса системы R.

Пусть $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ и $\lambda(H_i) = 0$, $i = 1, 2$. Рассмотрим простой $C(\mathfrak{H})$-модуль V_λ, у которого $\operatorname{Spec}(A(\lambda)) = \operatorname{Spec}(B(\lambda)) = \{(i-1)^2 - 1/4, \quad i = \overline{1, n}\}$, $\gamma = (4n^2 - 6n - 1)/24$, $\delta = 3(2n^2 - 3n + 1)/4$. Существование и простота такого модуля следует из (1). Согласно теореме простой sl(3)-модуль, соответствующий модулю V_λ, не содержит почти примитивных элементов. Все весовые пространства этого модуля имеют размерность n.

1. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры.— М. : Мир, 1978.— 407 с.
2. *Дрозд Ю. А.* Про зображення алгебри Лі sl (2) // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Математика і механіка.— 1983.— № 25.— С. 70—77.
3. *Britten D. I., Lemire F. W.* Irreducible representations of A_n with a 1-dimensional weight space // Trans. Amer. Math. Soc.— 1982.— 273, N 2.— P. 509—540.

Киев. ун-т — Получено 15.04.85