УДК 517.949.2

Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук, И. И. Клевчук

Интегральные многообразия, устойчивость и бифуркация решений сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений

В настоящей работе продолжены исследования интегральных многообразий сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений [1—3].

1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), y_t), \quad \varepsilon\dot{y}(t) = G_1(t, x(t), y_t), \tag{1}$$

где $x(t) \in R^m$, $y(t) \in R^l$, $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \leqslant \theta \leqslant 0$.

Будем обозначать в дальнейшем символом $|\cdot|$ норму элементов $x \in R^m$ и $y \in C[-\varepsilon\Delta, 0]$.

Предположим, что выполняются следующие условия.

1. Функционалы $F(t, x, y)$, $G_1(t, x, y)$ имеют непрерывные частные производные по x, y, которые равномерно ограничены при $|x| \leqslant \rho$, $|y| \leqslant \rho$.

Линеаризуя функционал $G_1(t, x, y)$ относительно y, систему (1) можно представить в виде

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), y_t), \quad \varepsilon\dot{y}(t) = B(t, y_t) + G(t, x(t), y_t), \tag{2}$$

где $B(t, y_t) = \int\limits_{-\varepsilon\Delta}^{0} [d\mu(t, \theta)]\, y(t+\theta)$, $\mu(t, \theta)$ — матрица ограниченной вариации по θ.

2. Все корни характеристического уравнения

$$\det\left(\lambda E - \int\limits_{-\varepsilon\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu(t, \theta)\right) = 0 \tag{3}$$

лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_0 < 0$.

Система (1) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = F(t, x(t), y_t), \\ y_t = T(t, \sigma)\, y_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\sigma}^{t} T(t, s)\, X_0 G(s, x(s), y_s)\, ds, \end{gathered} \tag{4}$$

где $X_0(\theta) = 0$, $-\varepsilon\Delta \leqslant \theta < 0$; $X_0(\theta) = E$; $T(t, s)$ — оператор сдвига по решениям уравнения

$$\varepsilon\dot{y}(t) = B(t, y_t). \tag{5}$$

В силу предположений 1, 2 уравнение $G_1(t, x, z) = 0$ имеет решение $z = \varphi(t, x)$, $\varphi(t, 0) = 0$.

Теорема 1. *Пусть для системы уравнений* (1) *выполняются условия* 1, 2. *Тогда существует такое положительное* ε_0, *что для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *система* (4) *имеет интегральное многообразие* S^-, *представимое соотношением* $y_t = h_1(t, x, \varepsilon) \equiv \varphi(t, x) + h(t, x, \varepsilon)$, *в котором функция* $h(t, x, \varepsilon)$ *определена для всех* $x \in U_{\rho_0}$, $t \in R$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, *равномерно непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет неравенствам* $|h(t, x, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon K_1 |x|$, $|h(t, x, \varepsilon) - h(t, x', \varepsilon)| \leqslant l(\rho, \varepsilon)|x - x'|$, *где* $l(\rho, \varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\rho \to 0$.

Доказательство. Оператор $T(t, s)$ можно представить с помощью фундаментальной матрицы $K(t, s)$ уравнения (5) в виде

$$\varepsilon T(t, s)\, E = \varepsilon K(t+\theta, s) + \int\limits_{s-\varepsilon\Delta}^{s-} d_\beta \left\{ \int\limits_{s}^{t+\theta} K(t+\theta, \alpha)\, \mu(\alpha, \beta - \alpha)\, d\alpha \right\}.$$

Дифференцируя последнее равенство по s, находим

$$\varepsilon \frac{d}{ds} T(t, s) E = -T(t, s) X_0 B(t, E).$$

Во втором уравнении системы (4) сделаем замену $y_t = z_t + \varphi(t, x)$ В результате получим уравнение

$$z_t + \varphi(t, x(t)) = T(t, \sigma) z_\sigma + T(t, \sigma) \varphi(\sigma, x(\sigma)) + \frac{1}{\varepsilon} \int_\sigma^t T(t, s) X_0 G(s, x(s), z_s + \varphi(s, x(s))) ds.$$

Справедливо равенство

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_\sigma^t T(t, s) X_0 G(s, x(s), \varphi(s, x(s))) ds = -\int_\sigma^t \frac{d}{ds} [T(t, s)] [B(s, E)]^{-1} \times$$
$$\times G(s, x(s), \varphi(s, x(s))) ds = \varphi(t, x(t)) - T(t, \sigma) \varphi(\sigma, x(\sigma)) +$$
$$+ \int_\sigma^t T(t, s) \frac{d}{ds} [\varphi(s, x(s))] ds.$$

Отсюда имеем

$$z_t = T(t, \sigma) z_\sigma + \frac{1}{\varepsilon} \int_\sigma^t T(t, s) X_0 [G(s, x(s), z_s + \varphi(s, x(s))) - G(s, x(s),$$
$$\varphi(s, x(s)))] ds + \int_\sigma^t T(t, s) \frac{d}{ds} [\varphi(s, x(s))] ds.$$

Обозначим $\Phi(t, x, z_t) = F(t, x, z_t + \varphi(t, x))$, $Q(s, x, z_s) = G(s, x, z_s + \varphi(s, x)) - G(s, x, \varphi(s, x))$, $D(s, x, z_s) = \frac{d}{ds} \varphi(s, x(s))$. С учетом этих обозначений система (4) преобразуется к виду

$$x = \Phi(t, x, z_t), \quad z_t = T(t, \sigma) z_\sigma + \frac{1}{\varepsilon} \int_\sigma^t T(t, s) X_0 Q(s, x(s), z_s) ds +$$
$$+ \int_\sigma^t T(t, s) D(s, x(s), z_s) ds, \tag{6}$$

причем функции $\Phi(t, x, z_t)$, $Q(t, x, z_t)$, $D(t, x, z_t)$ удовлетворяют неравенствам $|\Phi(t, x, z) - \Phi(t, x', z')| \leqslant L(|x - x'| + |z - z'|)$, $|Q(t, x, z) - Q(t, x', z')| \leqslant M\rho(|x - x'| + |z - z'|)$, $|D(t, x, z) - D(t, x', z')| \leqslant N(|x - x'| + |z - z'|)$,

$$|Q(t, x, z)| \leqslant M\rho |z|, \tag{7}$$

в которых L, M, N — положительные постоянные.

Рассмотрим класс $\mathfrak{M}(\gamma)$ функций $H: R \times R^m \times [0, \varepsilon_0] \to C[-\varepsilon\Delta, 0]$, удовлетворяющих условиям

$$H(t, 0, \varepsilon) = 0, \quad |H(t, x, \varepsilon) - H(t, x', \varepsilon)| \leqslant \gamma |x - x'|, \tag{8}$$

где γ — положительное число, и построим преобразование

$$S_{t,x}(H) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^0 T(t, s+t) X_0 Q(s, X(s, t, x, H), H(s+t, X(s, t, x, H), \varepsilon)) ds +$$
$$+ \int_{-\infty}^0 T(t, s+t) D(s, X(s, t, x, H), H(s+t, X(s, t, x, H), \varepsilon)) ds$$

На основании условия 2 и неравенств (7), (8) нетрудно убедиться, что оператор $S_{t,x}$ переводит класс $\mathfrak{M}(\gamma)$ в себя, а уравнение

$$H = S_{t,x}(H) \tag{9}$$

имеет единственное решение $h(t, x, \varepsilon)$, которое определяет интегральное многообразие системы (6).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1, 2. *Тогда существует такое положительное* ε_0, *что для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *система* (4) *имеет интегральное многообразие* S^+, *представимое соотношением* $x = g(t, y, \varepsilon)$, *в котором функция* $g(t, y, \varepsilon)$ *определена для всех* $y \in U_{\rho_0}$, $t \in R$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, *равномерно непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет неравенству* $|g(t, y, \varepsilon) - g(t, y', \varepsilon)| \leqslant \beta(\rho, \varepsilon)|y - y'|$, *где* $\beta(\rho, \varepsilon) \to 0$ *при* $\rho \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Для любого решения $(g(t, y_t, \varepsilon), y_t)$ *системы* (2), *лежащего на* S^+, *справедливы оценки*

$$|g(t, y_t, \varepsilon)| \leqslant \beta |y_\sigma| \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)], \quad |y_t| \leqslant 2K|y_\sigma| \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)].$$

Доказательство. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$x(t) = -\int_t^\infty F(s, x(s), y_s)\, ds, \quad y_t = T(t, \sigma)\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t, s) X_0 G(s, x(s), y_s)\, ds. \tag{10}$$

Существование решения системы (10) докажем с помощью метода последовательных приближений

$$x_0(t) = 0, \quad y_t^{(0)} = 0, \quad x_{n+1}(t) = -\int_t^\infty F(s, x_n(s), y_s^{(n)})\, ds, \quad y_t^{(n+1)} = T(t, \sigma)\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t, s) X_0 G(s, x_n(s), y_s^{(n)})\, ds.$$

По индукции убедимся, что справедливы неравенства

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leqslant \beta |\varphi| 2^{-m} \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)], \quad |y_t^{(m)} - y_t^{(m-1)}| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma |\varphi| 2^{-m} \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)], \tag{11}$$

где $\gamma = 2K$, $m = 1, 2, \ldots$.

При $m = 1$ неравенства (11) выполняются. Пусть неравенства (11) справедливы при $m = n$. Тогда получим

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant \int_t^\infty L(\beta + \gamma)|\varphi| 2^{-n} \exp[\alpha(\sigma - s)/(2\varepsilon)]\, ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon L(\beta + \gamma)|\varphi| \alpha^{-1} 2^{-n} \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)],$$

$$|y_t^{(n+1)} - y_t^{(n)}| \leqslant \varepsilon^{-1}\int_\sigma^t K \exp[\alpha(s - t)/\varepsilon + \alpha(\sigma - s)/(2\varepsilon)] M(\beta + \rho\gamma)|\varphi| 2^{-n} ds \leqslant$$

$$\leqslant 2KM(\beta + \rho\gamma)|\varphi| \alpha^{-1} 2^{-n} \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)].$$

Выберем ρ и ε настолько малыми, чтобы выполнялись неравенства $4KM(\beta + \rho\gamma) \leqslant \alpha\gamma$, $4L(\beta + \gamma)\varepsilon \leqslant \alpha\beta$. Тогда неравенства (11) будут справедливы при $m = n + 1$, следовательно, они справедливы при всех натуральных m.

Из (11) следует, что последовательность функций $x_m(t)$, $y_t^{(m)}$ сходится равномерно к функциям $x(t, \sigma, \varphi)$, $y_t(\sigma, \varphi)$, которые являются решением системы (10). Выбирая в системе (10) вместо φ постоянную φ', получаем решение $x(t, \sigma, \varphi')$, $y_t(\sigma, \varphi')$. Аналогично неравенствам (11) можно доказать, что справедливы неравенства

$$|x_m(t, \sigma, \varphi) - x_m(t, \sigma, \varphi')| \leqslant \beta |\varphi - \varphi'| \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)],$$

$$|y_t^{(m)}(\sigma, \varphi) - y_t^{(m)}(\sigma, \varphi')| \leqslant \gamma |\varphi - \varphi'| \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)],$$

следовательно,

$$|x(t, \sigma, \varphi) - x(t, \sigma, \varphi')| \leqslant \beta |\varphi - \varphi'| \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)], \quad |y_t(\sigma, \varphi) - y_t(\sigma, \varphi')| \leqslant$$
$$\leqslant \gamma |\varphi - \varphi'| \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)]. \qquad (12)$$

Обозначим $g(\sigma, \varphi, \varepsilon) = x(\sigma, \sigma, \varphi)$. Тогда из (12) следует оценка $|g(\sigma, \varphi, \varepsilon) - g(\sigma, \varphi', \varepsilon)| \leqslant \beta |\varphi - \varphi'|$. Теорема доказана.

2. Рассмотрим уравнение на многообразии

$$du/dt = F(t, u, h_1(t, u, \varepsilon)). \qquad (13)$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* 1, 2. *Если* $(x(t), y_t)$ — *произвольное решение системы (4), то существует решение* $(u(t), h_1(t, u(t), \varepsilon))$, *принадлежащее* S^- *и такое, что справедливы оценки*

$$|x(t) - u(t)| \leqslant \beta P \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)], \quad |y_t - h_1(t, u(t), \varepsilon)| \leqslant$$
$$\leqslant 2KP \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)], \quad P = |y_\sigma - h_1(\sigma, u(\sigma), \varepsilon)|, \quad t \geqslant \sigma. \qquad (14)$$

Доказательство. Обозначим через $u(t)$ решение уравнения (13) с начальным условием $u(\sigma) = a$. Сделав в системе (4) замену $x = v + u(t)$, $y_t = w_t + h_1(t, u(t), \varepsilon)$, получим систему

$$dv/dt = V(t, v, w_t), \quad w_t = T(t, \sigma) w_\sigma + \varepsilon^{-1} \int_\sigma^t T(t, s) X_0 W(s, v(s), w_s)\, ds, \qquad (15)$$

где $V(t, v, w_t) = F(t, v + u, w_t + h_1(t, u, \varepsilon)) - F(t, u, h_1(t, u, \varepsilon))$, $W(t, v, w_t) = G(t, v + u, w_t + h_1(t, u, \varepsilon)) - G(t, u, h_1(t, u, \varepsilon))$.

По теореме 2 система (15) имеет интегральное многообразие вида $v = g(t, w_t, a, \varepsilon)$, где функция g удовлетворяет условиям $g(t, 0, a, \varepsilon) = 0)$, $|g(t, \zeta, a, \varepsilon) - g(t, \zeta', a, \varepsilon)| \leqslant \beta |\zeta - \zeta'|$. Любое решение $(g(t, w_t, a, \varepsilon), w_t$ системы (15) удовлетворяет неравенствам

$$|g(t, w_t, a, \varepsilon)| \leqslant \beta |w_\sigma| \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)], \quad |w_t| \leqslant 2K |w_\sigma| \exp[\alpha(\sigma - t)/(2\varepsilon)].$$

Покажем теперь существсвание таких a и w_σ, что для решения $(x(t), y_t)$ системы (4) и решения $(v(t), w_t)$ системы (15) при всех $t \geqslant \sigma$ выполняются равенства

$$v(t) = x(t) - u(t), \quad w_t = y_t - h_1(t, u(t), \varepsilon), \qquad (16)$$

откуда и будут следовать оценки (14).

Если равенства (16) справедливы при $t = \sigma$, то в силу теоремы единственности они справедливы и при всех $t \geqslant \sigma$. При $t = \sigma$ равенства (16) имеют вид

$$g(\sigma, w_\sigma, a, \varepsilon) = x(\sigma) - a, \quad w_\sigma = y_\sigma - h_1(\sigma, a, \varepsilon). \qquad (17)$$

Будем рассматривать (17) как систему уравнений относительно w_σ и a. Подставляя в первое уравнение (17) значение w_σ из второго уравнения, получаем

$$a = x(\sigma) - g(\sigma, y_\sigma - h_1(\sigma, a, \varepsilon), a, \varepsilon). \qquad (18)$$

Покажем, что это уравнение имеет решение при любых $x(\sigma)$, y_σ. Используя свойства функции g, из равенства (18) находим оценку

$$|a - x(\sigma)| \leqslant \beta |y_\sigma - h_1(\sigma, x(\sigma), \varepsilon)| + \beta |h_1(\sigma, x(\sigma), \varepsilon) - h_1(\sigma, a, \varepsilon)|.$$

Функция h_1 удовлетворяет условию Липшица с некоторой постоянной L, поэтому из последнего неравенства следует $|a - x(\sigma)| \leqslant \beta |y_\sigma - h_1(\sigma, x(\sigma), \varepsilon)| + \beta L |a - x(\sigma)|$. Постоянную β можно выбрать достаточно малой, поэтому

$$|a - x(\sigma)| \leqslant |y_\sigma - h_1(\sigma, x(\sigma), \varepsilon)|. \qquad (19)$$

Рассмотрим в m-мерном пространстве шар H, определяемый неравенством $|a - x(\sigma)| \leqslant |y_\sigma - h_1(\sigma, x(\sigma), \varepsilon)|$. Из неравенства (19) следует, что преобразование (18) переводит шар H в себя, поэтому по теореме Брауэра это преобразование имеет неподвижную точку a^*.

Итак, уравнение (18) имеет решение $a = a^*$, которое в силу (19) удовлетворяет оценке

$$|a^* - x(\sigma)| \leqslant |y_\sigma - h_1(\sigma, x(\sigma), \varepsilon)|. \tag{20}$$

Подставляя решение a^* во второе уравнение (17), убеждаемся, что пара a^*, w_σ^*, где $w_\sigma^* = y_\sigma - h_1(\sigma, a^*, \varepsilon)$, удовлетворяет системе (17). Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* 1, 2. *Если нулевое решение уравнения* (13) *устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво, то и нулевое решение системы* (1) *устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво.*

Теорема 4 является следствием теоремы 3.

3. Изучим вопрос о бифуркации ненулевых автоколебаний. Пусть задана автономная система сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = \xi x(t) + \eta y(t) + \zeta y(t - \varepsilon\Delta) + F(x(t), y(t), y(t - \varepsilon\Delta)),\\ \varepsilon\dot{y}(t) = By(t) + Cy(t - \varepsilon\Delta) + Dx(t) + G(x(t), y(t), y(t - \varepsilon\Delta)).\end{gathered} \tag{21}$$

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}(t) = \xi x(t) + \eta y(t) + \zeta y(t - \varepsilon\Delta), \quad \varepsilon\dot{y}(t) = By(t) + Cy(t - \varepsilon\Delta) + Dx(t). \tag{22}$$

Система (22) эквивалентна следующей системе:

$$\dot{x}(t) = \xi x(t) + \eta y(t) + \zeta y(t - \varepsilon\Delta), \quad y_t = T(t) y_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t T(t - s) X_0 Dx(s)\, ds, \tag{23}$$

где $T(t)$ — оператор сдвига по решениям уравнения $\varepsilon\dot{y}(t) = By(t) + Cy(t - \varepsilon\Delta)$. Сделав в системе (23) замену $y_t = z_t - (B + C)^{-1} Dx$, получим систему

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = \xi x(t) - (\eta + \zeta)(B + C)^{-1} Dx(t) + \eta z(t) + \zeta z(t - \varepsilon\Delta),\\ z_t = T(t) z_0 + \int_0^t T(t - s)(B + C)^{-1} D[\xi x(s) - (\eta + \zeta)(B + C)^{-1} Dx(s) + \\ + \eta z(s) + \zeta z(s - \varepsilon\Delta)]\, ds.\end{gathered} \tag{24}$$

Найдем представление интегрального многообразия системы (24) с точностью до членов порядка ε:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{0} T(-s) Pe^{Rs} x ds, \tag{25}$$

где $P = (B + C)^{-1} D[\xi - (\eta + \zeta)(B + C)^{-1} D]$, $R = \xi - (\eta + \zeta)(B + C)^{-1} D$. В результате интегрирования по частям получим

$$g(x) = -A^{-1}\int_{-\infty}^{0} \frac{d}{ds}[T(-s)] Pe^{Rs} x ds = -A^{-1}Px + A^{-1}\int_{-\infty}^{0} T(-s) PRe^{Rs} x ds, \tag{26}$$

где A — производящий оператор полугруппы $T(t)$, A^{-1} — правый обратный к оператору A,

$$A\varphi(\theta) = \begin{cases} B\varphi(0)/\varepsilon + C\varphi(-\varepsilon\Delta)/\varepsilon, & \theta = 0,\\ \varphi(\theta), & -\varepsilon\Delta \leqslant \theta < 0.\end{cases}$$

Найдем $A^{-1}E$, где E — единичная матрица. Для этого нужно решить систему

$$B\varphi(0) + C\varphi(-\varepsilon\Delta) = \varepsilon E, \quad \dot{\varphi}(\theta) = E. \tag{27}$$

Решение системы (27) имеет вид $\varphi(\theta) = \varepsilon(B + C)^{-1}(E + \Delta C) + \theta E$. В частности, $\varphi(0) = \varepsilon(B + C)^{-1}(E + \Delta C)$, $\varphi(-\varepsilon\Delta) = \varepsilon(B + C)^{-1}(E - \Delta B)$. Подставив последние выражения в (26), получим

$$g(x)|_{\theta=0} = -\varepsilon(B + C)^{-1}(E + \Delta C)Px, \quad g(x)|_{\theta=-\varepsilon\Delta} = -\varepsilon(B + C)^{-1}(E - \Delta B)Px.$$

Уравнение на многообразии примет вид

$$\dot{x} = \xi x - (\eta + \zeta)(B + C)^{-1}Dx - \varepsilon\eta(B + C)^{-1}(E + \Delta C)Px - \varepsilon\zeta(B + C)^{-1} \times$$
$$\times (E - \Delta B)Px.$$

Пусть выполняются условия:

1′. Все корни характеристического уравнения $\det(B + Ce^{-\lambda\Delta} - \lambda E) = 0$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_0 < 0$.

2′. Характеристическое уравнение матрицы $\xi_0 = \xi - (\eta + \zeta)(B + C)^{-1} \times D - \varepsilon\eta(B + C)^{-1}(E + \Delta C)P - \varepsilon\zeta(B + C)^{-1}(E - \Delta B)P$ имеет пару корней вида $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$, $\beta(0) > 0$, остальные его корни лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_0 < 0$.

Обозначим через $\varphi(x)$ решение уравнения $(B + C)\varphi(x) + Dx + G(x, \varphi(x), \varphi(x)) = 0$, $\varphi(0) = 0$.

3′. Нулевое решение уравнения $\dot{x} = \xi x - (\eta + \zeta)(B + C)_{-1} Dx + F(x, \varphi(x), \varphi(x))$ асимптотически устойчиво.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* 1′—3′. *Тогда при малых* $\varepsilon > 0$ *система* (21) *имеет устойчивый предельный цикл, стремящийся к нулю при* $\varepsilon \to 0$, *период которого стремится к* $2\pi/\beta(0)$.

Доказательство проводится методом интегральных многообразий. Устойчивость предельного цикла следует из теоремы 3.

1. *Митропольский Ю. А., Фодчук В. И.* Об устойчивых интегральных многообразиях для одного класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Укр. мат. журн.— 1968.— 20, № 6.— С. 791—801.
2. *Митропольский Ю. А., Фодчук В. И.* О существовании и устойчивости ограниченного решения сингулярно возмущенной системы с запаздыванием // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1969.— № 3.— С. 210—213.
3. *Фодчук В. И., Черевко И. М.* К теории интегральных многообразий для сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений // Укр. мат. журн.— 1982.— 34, № 6.— С. 725—731.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Черновиц. ун-т

Получено 11.10.85