УДК 517.925

М. Т. Терёхин

Бифуркация периодического решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Задача о бифуркации периодического решения рассматривалась в работах [1—3].

Целью статьи является изучение бифуркации периодического решения в случае, когда матрица линейного приближения системы имеет два комплексно-сопряженных собственных значения, которые могут пересекать мнимую ось как с нулевой, так и с как угодно большой скоростью, система же удовлетворяет только условиям существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных данных и параметра.

1. Пусть задана система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, \lambda)\, x, \tag{1}$$

где $x \in E_n$, $f(x, \lambda)$ — $n \times n$-матрица, $\lambda \in E_m$, λ — параметр, E_s — s-мерное векторное пространство.

Пусть $|x| = \max\limits_i |x_i|$, $D(\delta_0) = \{(x, \lambda) : |x| \leqslant \delta_0, \ |\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta_0\}$, $w(\delta_0) = \{\alpha : \alpha \in E_n, \ |\alpha| \leqslant \delta_0\}$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число.

Символом $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ обозначим непрерывное решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(0, \alpha, \lambda) = \alpha$.

Очевидно, при любом λ $x \equiv 0$ является решением системы (1) при условии, что на множестве $D(\delta_0)$ матрица $f(x, \lambda)$ определена.

Определение. *Следуя* [4], *число* λ_0 *назовем бифуркационным значением параметра* λ *системы* (1), *если* $\forall \varepsilon > 0$ *существуют векторы* $\alpha \in E_n$, $\alpha \neq 0$, $\lambda \in E_m$ *и число* $\omega > 0$ *такие, что* $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ *является* ω-*периодическим решением системы* (1), *удовлетворяющим неравенству* $|x(t, \alpha, \lambda)| < \varepsilon \ \forall t \in [0, \omega]$.

Одновременно с системой (1) рассмотрим линейную систему

$$\dot{y} = A(t, \alpha, \lambda)\, y, \tag{2}$$

$y \in E_n$, матрица $A(t, \alpha, \lambda)$ определяется равенством $A(t, \alpha, \lambda) = f(x(t, \alpha, \lambda), \lambda)$.

Пусть $Y(t, \alpha, \lambda)$ — фундаментальная матрица системы (2), $Y(0, \alpha, \lambda) = E$, E — единичная матрица.

Теорема 1. *Пусть матрица $f(x, \lambda)$ непрерывна на множестве $D(\delta_0)$. Тогда для того чтобы решение $x(\cdot, \alpha, \lambda)$, $\alpha \neq 0$, системы* (1), *определенное на промежутке* $[0, \omega]$, $|x(t, \alpha, \lambda)| \leqslant \delta_0$ *при* $t \in [0, \omega]$, *было ω-периодическим, необходимо и достаточно, чтобы единица была собственным значением, а α — соответствующим этому значению собственным вектором матрицы $Y(\omega, \alpha, \lambda)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Из условий теоремы следует, что решение $y(\cdot) = Y(\cdot, \alpha, \lambda)\alpha$ системы (2) удовлетворяет равенствам $y(\omega) = y(0) = \alpha$. На множестве $[0, \omega[$ решением системы (2), удовлетворяющим условию $y(0) = \alpha$, является решение $y(\cdot) = x(\cdot, \alpha, \lambda)$. Поэтому в силу единственности решения системы (2) решения $y(\cdot) = Y(\cdot, \alpha, \lambda)\alpha$, $y(\cdot) = x(\cdot, \alpha, \lambda)$ на сегменте $[0, \omega]$ совпадают. Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть матрица $f(x, \lambda)$ непрерывна на множестве $D(\delta_0)$ и на множестве $w(\delta_0)$ определены функции $\alpha \to \lambda(\alpha)$, $\alpha \to \omega(\alpha)$, $\lambda(0) = \lambda_0$, $\omega(0) = \omega_0$, $\omega_0 > 0$ — некоторое число. Тогда для того чтобы λ_0 было бифуркационным значением параметра λ системы* (1), *необходимо и достаточно, чтобы $\forall\delta \in]0, \delta_0]$ во множестве $w(\delta)$ существовала неподвижная точка α_0, $\alpha_0 \neq 0$, оператора Γ, определенного равенством*

$$[Y(\omega(\alpha), \alpha, \lambda(\alpha)) - E]\alpha^* = 0 \tag{3}$$

при условии, что $\Gamma(\alpha) = \alpha^*$.

2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = C(\lambda)x + \nu(x, \lambda)x, \tag{4}$$

где $C(\lambda)$ и $\nu(x, \lambda)$ — $n \times n$-матрицы, определенные и непрерывные на множестве $D(\delta_0)$, λ — скалярный параметр.

Определим условия существования бифуркационного значения параметра λ системы (4).

Матрица $A(t, \alpha, \lambda)$ для системы (4) принимает вид $A(t, \alpha, \lambda) = C(\lambda) + \nu(x(t, \alpha, \lambda), \lambda)$.

Пусть существует число $\delta \in]0, \delta_0]$ такое, что $\forall\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ матрица $C(\lambda)$ имеет пару комплексно-сопряженных собственных значений $\sigma(\lambda) \pm i\tau(\lambda)$. Тогда неособенным линейным преобразованием систему (4) можно свести к системе вида

$$\dot{z} = R(\lambda)z + F(z, \xi, \lambda), \quad \dot{\xi}_1 = \sigma(\lambda)\xi_1 + \tau(\lambda)\xi_2 + \Psi_1(z, \xi, \lambda),$$
$$\dot{\xi}_2 = -\tau(\lambda)\xi_1 + \sigma(\lambda)\xi_2 + \Psi_2(z, \xi, \lambda), \tag{5}$$

z — $(n-2)$-мерный вектор, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $F(z, \xi, \lambda)$, $\Psi_1(z, \xi, \lambda)$, $\Psi_2(z, \xi, \lambda)$ — нелинейные относительно z, ξ члены.

С целью сохранения обозначений положим $x = (z, \xi)$.

Теорема 3. *Если* 1) $\sigma(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m \sigma_1(\lambda)$, *функции* $\lambda \to \sigma_1(\lambda)$, $\lambda \to \tau(\lambda)$ *непрерывны на сегменте* $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$, $\delta \in]0, \delta_0]$, $\sigma_1(\lambda_0) \neq 0$, $\tau(\lambda_0) \neq 0$; 2) *число* $m > 0$ *и удовлетворяет равенству* $(-\gamma)^m = -\gamma^m$, $\gamma > 0$ — *некоторое число*; 3) *числа* $\pm ik\tau(\lambda_0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *не являются собственными значениями матрицы* $R(\lambda_0)$; 4) *на множестве* $D(\delta_0)$ *функции* F, Ψ_1, Ψ_2 *и матрица* $R(\lambda)$ *непрерывны, система* (5) *обладает свойством единственности решения, то* λ_0 — *бифуркационное значение параметра* λ *системы* (5).

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число и пусть $\omega_0 > 0$, $\omega^* > 0$, $\delta \in]0, \delta_0]$ таковы, что $\omega_0 \in]0, \omega^*[$, $\cos\tau(\lambda_0)\omega_0 = 1$, $\forall\alpha \in w(\delta)$, $\forall\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ решение $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ системы (5) определено на промежутке $[0, \omega^*]$ и $\forall t \in [0, \omega^*]$ выполнено неравенство $|x(t, \alpha, \lambda)| < \varepsilon$.

Из условий теоремы следует существование числа $\delta \in]0, \delta_0]$ и матрицы $S(\omega, \alpha, \lambda)$ с отличным от нуля, независящим от ω, α, λ определителем (см.

[5]), таких, что $\forall \alpha \in w(\delta)$, $\forall \lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ и $\forall \omega \in]\,0, \omega^*[\, \cap\, [\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta]$ матрица $(Y(\omega, \alpha, \lambda) - E)\, S(\omega, \alpha, \lambda)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} B_{11}(\omega, \alpha, \lambda) & B_{12}(\omega, \alpha, \lambda) \\ B_{21}(\omega, \alpha, \lambda) & B_{22}(\omega, \alpha, \lambda) \end{pmatrix},$$

где $B_{11}(\omega, \alpha, \lambda)$, $B_{22}(\omega, \alpha, \lambda)$ — квадратные матрицы, все элементы матрицы $B_{12}(\omega, \alpha, \lambda)$ равны нулю,

$$B_{22}(\omega, \alpha, \lambda) = \begin{pmatrix} \exp[\sigma(\lambda)\omega]\cos\tau(\lambda)\omega - 1 + \beta_{11}(\omega, \alpha, \lambda) & \exp[\sigma(\lambda)\omega]\sin\tau(\lambda)\omega + \beta_{12}(\omega, \alpha, \lambda) \\ -\exp[\sigma(\lambda)\omega]\sin\tau(\lambda)\omega + \beta_{21}(\omega, \alpha, \lambda) & \exp[\sigma(\lambda)\omega]\cos\tau(\lambda)\omega - 1 + \beta_{22}(\omega, \alpha, \lambda) \end{pmatrix},$$

$\lim\limits_{\alpha \to 0} \beta_{pq}(\omega, \alpha, \lambda) = 0$ равномерно относительно ω, λ; $p, q = 1, 2$.

Докажем, что $\delta \in]\,0, \delta_0]$ можно выбрать так, что $\forall \delta_1 \in]\,0, \delta]$ существуют числа $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$, $\omega \in]\,0, \omega^*[\, \cap [\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta]$, вектор $\alpha \in w(\delta_1)$, $\alpha \neq 0$, и вектор c^*, первые $n - 1$ координаты которого равны нулю, удовлетворяющие равенствам

$$\exp[\sigma(\lambda)\omega]\sin\tau(\lambda)\omega + \beta_{12}(\omega, \alpha, \lambda) = 0, \quad \exp[\sigma(\lambda)\omega]\cos\tau(\lambda)\omega - 1 + \beta_{22}(\omega, \alpha, \lambda) = 0, \quad \alpha = S(\omega, \alpha, \lambda)\, c^*. \tag{6}$$

Так как $S(\omega_0, 0, \lambda_0) = E$, то равенства (6) будут выполнены, если выполнены равенства

$$\sigma(\lambda)\omega = \frac{1}{2}\ln[1 - 2\beta_{22}(\omega, \alpha, \lambda) + \beta_{22}^2(\omega, \alpha, \lambda) + \beta_{12}^2(\omega, \alpha, \lambda),$$

$$\tau(\lambda)\omega = -\operatorname{arctg}\frac{\beta_{12}(\omega, \alpha, \lambda)}{1 - \beta_{22}(\omega, \alpha, \lambda)} + \tau(\lambda_0)\omega_0, \quad \tilde{\alpha} = \mathscr{T}(\omega, \alpha, \lambda), \tag{7}$$

где $\tilde{\alpha}$ — $(n - 1)$-мерный вектор, координатами которого являются первые $n - 1$ координаты вектора α, $\tilde{\alpha} = \mathscr{T}(\omega, \alpha, \lambda)$ — векторная запись первых $n - 1$ равенств системы $S^{-1}(\omega, \alpha, \lambda)\alpha = 0$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\mathscr{T}(\omega, \alpha, \lambda)}{\alpha} = 0$ равномерно относительно ω, λ.

Положив $\lambda - \lambda_0 = \lambda_1$, $\omega - \omega_0 = \omega_1$, систему равенств (7) представим в виде

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau(\lambda)}\left[\tau(\lambda_0)\omega_0 - \operatorname{arctg}\frac{\beta_{12}(\omega, \alpha, \lambda)}{1 - \beta_{22}(\omega, \alpha, \lambda)}\right] - \omega_0, \quad \tilde{\alpha} = \mathscr{T}(\omega, \alpha, \lambda),$$

$$\lambda_1 = \left\{\frac{1}{\sigma_1(\lambda)\omega}\left[\frac{1}{2}\ln(1 - 2\beta_{22}(\omega, \alpha, \lambda) + \beta_{22}^2(\omega, \alpha, \lambda) + \beta_{12}^2(\omega, \alpha, \lambda))\right]\right\}^{1/m}. \tag{8}$$

Оператор A определим равенством $Au^* = (A_1u^*, A_2u^*, A_3u^*)$, в котором

$$A_1u^* = \frac{1}{\tau(\lambda)}\left[\tau(\lambda_0)\omega_0 - \operatorname{arctg}\frac{\beta_{12}(\omega, \alpha, \lambda)}{1 - \beta_{22}(\omega, \alpha, \lambda)}\right] - \omega_0, \quad A_2u^* = \mathscr{T}(\omega, \alpha, \lambda),$$

$$A_3u^* = \left\{\frac{1}{\sigma_1(\lambda)\omega}\left[\frac{1}{2}\ln(1 - 2\beta_{22}(\omega, \alpha, \lambda) + \beta_{22}^2(\omega, \alpha, \lambda) + \beta_{12}^2(\omega, \alpha, \lambda))\right]\right\}^{1/m},$$

$$u^* = (\omega_1, \tilde{\alpha}, \lambda_1).$$

Из определения оператора A следует существование таких чисел $\delta \in]0, \delta_0]$, $\varepsilon_0 > 0$, что на множестве $\{(\omega_1, \tilde{\alpha}, \lambda_1)\colon \omega_1 \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], |\tilde{\alpha}| \leqslant \delta, \lambda_1 \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\}$ при любой фиксированной n-й координате α_n вектора $\alpha \in w(\delta)$ оператор A непрерывен.

Так как $\forall \omega \in [0, \omega^*]$, $\forall \lambda \in [\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0 + \delta_0]$ $\beta_{11}(\omega, 0, \lambda) = \beta_{22}(\omega, 0, \lambda) = 0$, $\mathcal{F}(\omega, 0, \lambda) = 0$, то числа $\delta \in]0, \delta_0]$, $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0]$ можно выбрать так, чтобы при любом фиксированном $\alpha_n \in [-\delta, \delta]$ для любого вектора $u^* = (\omega_1, \tilde{\alpha}, \lambda_1)$, удовлетворяющего неравенствам $|\omega_1| \leqslant \varepsilon_0$, $|\tilde{\alpha}| \leqslant \delta$, $|\lambda_1| \leqslant \varepsilon_1$, выполнялись неравенства $|A_1 u^*| \leqslant \varepsilon_0$, $|A_2 u^*| \leqslant \delta$, $|A_3 u^*| \leqslant \varepsilon_1$. А это значит, что при любом фиксированном α_n, $|\alpha_n| \leqslant \delta$, оператор A на замкнутом, ограниченном, выпуклом множестве $\{(\omega_1, \tilde{\alpha}, \lambda_1) : \omega_1 \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], |\tilde{\alpha}| \leqslant \delta, \lambda_1 \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]\}$ имеет неподвижную точку. При $\alpha_n = 0$ единственной неподвижной точкой оператора A является точка $(\omega_1, \tilde{\alpha}, \lambda_1) = (0, 0, 0)$. Это следует из того, что при $\alpha_n = 0$ равенству $\tilde{\alpha} = \mathcal{F}(\omega, \tilde{\alpha}, \lambda)$ удовлетворяет только вектор $\tilde{\alpha} = 0$. Но тогда и $\omega_1 = \lambda_1 = 0$.

Следовательно, на множестве $\{\alpha_n : |\alpha_n| \leqslant \delta\}$ равенства (7) определяют функции $\alpha_n \to \omega(\alpha_n)$, $\alpha_n \to \tilde{\alpha}(\alpha_n)$, $\alpha_n \to \lambda(\alpha_n)$, $\omega(0) = \omega_0$, $\tilde{\alpha}(0) = 0$, $\lambda(0) = \lambda_0$.

Пусть вектор c^* таков, что $c^* = S^{-1}(\omega(\alpha_n), \alpha, \lambda(\alpha_n))\, \alpha$; $\alpha = (\tilde{\alpha}(\alpha_n), \alpha_n)$. Но тогда $\delta \in]0, \delta_0]$ можно выбрать так, что $\forall \delta_1 \in]0, \delta]$ $\exists \lambda \in [\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0 + \delta_0]$, $\exists \omega \in]0, \omega^*[\cap [\omega_0 - \delta_0, \omega_0 + \delta_0]$ $\exists \alpha_0 \in w(\delta_1)$, $\alpha_0 \neq 0$, α_0 — неподвижная точка оператора Γ, определенного равенством (3). Доказательство завершается применением теоремы 2.

3. Пусть задана сингулярно возмущенная система вида

$$\dot{y} = R_1(\lambda)\, y + F_1(x, \lambda), \quad \lambda \dot{z} = R_2(\lambda)\, z + F_2(x, \lambda),$$

$$\lambda \dot{\xi}_1 = p(\lambda)\, \xi_1 + q(\lambda)\, \xi_2 + \Phi_1(x, \lambda), \quad \lambda \dot{\xi}_2 = -q(\lambda)\, \xi_1 + p(\lambda)\, \xi_2 + \Phi_2(x, \lambda), \tag{9}$$

в которой y — r-мерный вектор, z — $(s-2)$-мерный вектор, $x = (y, z, \xi_1, \xi_2)$, $F_1(x, \lambda)$, $F_2(x, \lambda)$, $\Phi_1(x, \lambda)$, $\Phi_2(x, \lambda)$ — нелинейные относительно x члены.

Одновременно с системой (9) рассмотрим систему

$$\dot{z} = R_2(0)\, z + F_2(x^*, 0), \quad \dot{\xi}_1 = q(0)\, \xi_2 + \Phi_1(x^*, 0),$$

$$\dot{\xi}_2 = -q(0)\, \xi_1 + \Phi_2(x^*, 0), \tag{10}$$

x^* — $(r+s)$-мерный вектор, $x^* = (0, z, \xi_1, \xi_2)$.

Теорема 4. *Если* 1) $p(\lambda) = \lambda^m p_1(\lambda)$, *функции* $\lambda \to p_1(\lambda)$, $\lambda \to q(\lambda)$ *непрерывно дифференцируемы на сегменте* $[-\delta, \delta]$, $\delta \in]0, \delta_0]$, $p_1(0) \neq 0$, $q(0) \neq 0$; 2) *число* $m > 0$ *и удовлетворяет равенству* $(-\gamma)^m = -\gamma^m$, $\gamma > 0$ — *некоторое число*; 3) *числа* $\pm ikq(0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *не являются собственными значениями матрицы* $R_2(0)$, $\det R_1(0) \neq 0$; 4) $\forall \omega^* > 0$ *число* $\delta \in]0, \delta_0]$ *можно выбрать так, что при* $\alpha \in w(\delta)$ *единственным* ω-*периодическим решением системы* (10), $\omega \in]0, \omega^*[$, *является тождественно равное нулю решение*; 5) *на множестве* $D(\delta_0)$ *функции* F_1, F_2, Φ_1, Φ_2 *и матрицы* $R_1(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ *непрерывно дифференцируемы*, $F_1(x, 0) = 0$, *то* $\lambda = 0$ — *бифуркационное значение параметра* λ *системы* (9).

Доказательство в основном аналогично доказательству теоремы 3.

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний.— М. : Физматгиз, 1959.— 915 с.
2. *Отроков Н. Ф.* Об одном случае рождения предельных циклов.//Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат.— 1961— 19, № 4.—С. 23—44.
3. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М. : Мир, 1980.— 367 с.
4. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1966.— 331 с.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1966.— 575 с.

Рязан. пед. ин-т

Получено 01.08.84

Из определения оператора A следует существование таких чисел $\delta \in]0, \delta_0]$, $\varepsilon_0 > 0$, что на множестве $\{(\omega_1, \tilde{\alpha}, \lambda_1): \omega_1 \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], |\tilde{\alpha}| \leqslant \delta, \lambda_1 \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\}$ при любой фиксированной n-й координате α_n вектора $\alpha \in w(\delta)$ оператор A непрерывен.

Так как $\forall \omega \in [0, \omega^*]$, $\forall \lambda \in [\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0 + \delta_0]$ $\beta_{11}(\omega, 0, \lambda) = \beta_{22}(\omega, 0, \lambda) = 0$, $\mathscr{G}(\omega, 0, \lambda) = 0$, то числа $\delta \in]0, \delta_0]$, $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0]$ можно выбрать так, чтобы при любом фиксированном $\alpha_n \in [-\delta, \delta]$ для любого вектора $u^* = (\omega_1, \tilde{\alpha}, \lambda_1)$, удовлетворяющего неравенствам $|\omega_1| \leqslant \varepsilon_0$, $|\tilde{\alpha}| \leqslant \delta$, $|\lambda_1| \leqslant \varepsilon_1$, выполнялись неравенства $|A_1 u^*| \leqslant \varepsilon_0$, $|A_2 u^*| \leqslant \delta$, $|A_3 u^*| \leqslant \varepsilon_1$. А это значит, что при любом фиксированном α_n, $|\alpha_n| \leqslant \delta$, оператор A на замкнутом, ограниченном, выпуклом множестве $\{(\omega_1, \tilde{\alpha}, \lambda_1): \omega_1 \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], |\tilde{\alpha}| \leqslant \delta, \lambda_1 \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]\}$ имеет неподвижную точку. При $\alpha_n = 0$ единственной неподвижной точкой оператора A является точка $(\omega_1, \tilde{\alpha}, \lambda_1) = (0, 0, 0)$. Это следует из того, что при $\alpha_n = 0$ равенству $\tilde{\alpha} = \mathscr{G}(\omega, \tilde{\alpha}, \lambda)$ удовлетворяет только вектор $\tilde{\alpha} = 0$. Но тогда и $\omega_1 = \lambda_1 = 0$.

Следовательно, на множестве $\{\alpha_n : |\alpha_n| \leqslant \delta\}$ равенства (7) определяют функции $\alpha_n \to \omega(\alpha_n)$, $\alpha_n \to \tilde{\alpha}(\alpha_n)$, $\alpha_n \to \lambda(\alpha_n)$, $\omega(0) = \omega_0$, $\tilde{\alpha}(0) = 0$, $\lambda(0) = \lambda_0$.

Пусть вектор c^* таков, что $c^* = S^{-1}(\omega(\alpha_n), \alpha, \lambda(\alpha_n))\,\alpha$; $\alpha = (\tilde{\alpha}(\alpha_n), \alpha_n)$. Но тогда $\delta \in]0, \delta_0]$ можно выбрать так, что $\forall \delta_1 \in]0, \delta]$ $\exists \lambda \in [\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0 + \delta_0]$, $\exists \omega \in]0, \omega^*[\cap [\omega_0 - \delta_0, \omega_0 + \delta_0]$ $\exists \alpha_0 \in w(\delta_1)$, $\alpha_0 \neq 0$, α_0 — неподвижная точка оператора Γ, определенного равенством (3). Доказательство завершается применением теоремы 2.

3. Пусть задана сингулярно возмущенная система вида

$$\dot{y} = R_1(\lambda)\, y + F_1(x, \lambda), \quad \lambda \dot{z} = R_2(\lambda)\, z + F_2(x, \lambda),$$

$$\lambda \dot{\xi}_1 = p(\lambda)\, \xi_1 + q(\lambda)\, \xi_2 + \Phi_1(x, \lambda), \quad \lambda \dot{\xi}_2 = -q(\lambda)\, \xi_1 + p(\lambda)\, \xi_2 + \Phi_2(x, \lambda), \tag{9}$$

в которой y — r-мерный вектор, z — $(s-2)$-мерный вектор, $x = (y, z, \xi_1, \xi_2)$, $F_1(x, \lambda)$, $F_2(x, \lambda)$, $\Phi_1(x, \lambda)$, $\Phi_2(x, \lambda)$ — нелинейные относительно x члены.

Одновременно с системой (9) рассмотрим систему

$$\dot{z} = R_2(0)\, z + F_2(x^*, 0), \quad \dot{\xi}_1 = q(0)\, \xi_2 + \Phi_1(x^*, 0),$$

$$\dot{\xi}_2 = -q(0)\, \xi_1 + \Phi_2(x^*, 0), \tag{10}$$

x^* — $(r+s)$-мерный вектор, $x^* = (0, z, \xi_1, \xi_2)$.

Теорема 4. *Если* 1) $p(\lambda) = \lambda^m p_1(\lambda)$, *функции* $\lambda \to p_1(\lambda)$, $\lambda \to q(\lambda)$ *непрерывно дифференцируемы на сегменте* $[-\delta, \delta]$, $\delta \in]0, \delta_0]$, $p_1(0) \neq 0$, $q(0) \neq 0$; 2) *число* $m > 0$ *и удовлетворяет равенству* $(-\gamma)^m = -\gamma^m$, $\gamma > 0$ — *некоторое число*; 3) *числа* $\pm ikq(0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *не являются собственными значениями матрицы* $R_2(0)$, $\det R_1(0) \neq 0$; 4) $\forall \omega^* > 0$ *число* $\delta \in]0, \delta_0]$ *можно выбрать так, что при* $\alpha \in w(\delta)$ *единственным* ω*-периодическим решением системы* (10), $\omega \in]0, \omega^*[$, *является тождественно равное нулю решение*; 5) *на множестве* $D(\delta_0)$ *функции* F_1, F_2, Φ_1, Φ_2 *и матрицы* $R_1(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ *непрерывно дифференцируемы*, $F_1(x, 0) = 0$, *то* $\lambda = 0$ — *бифуркационное значение параметра* λ *системы* (9).

Доказательство в основном аналогично доказательству теоремы 3.

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний.— М. : Физматгиз, 1959.— 915 с.
2. *Отроков Н. Ф.* Об одном случае рождения предельных циклов.//Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат.— 1961— 19, № 4.—С. 23—44.
3. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М. : Мир, 1980.— 367 с.
4. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1966.— 331 с.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1966.— 575 с.

Рязан. пед. ин-т

Получено 01.08.84