УДК 511

Б. Б. Беньяминов

Оценка разности между последовательными простыми числами

При изучении некоторых вопросов, связанных с распределением простых чисел, приходится рассматривать верхнюю оценку разности $d_n = p_{n+1} - p_n$, $n \in \mathbb{N}$, где p_n — n-е простое число. Имеются различные виды этой оценки. С помощью гипотезы Римана [1], например, получено неравенство $d_n \ll \sqrt{p_n} \ln p_n$, некоторые эвристические рассуждения показывают, что для достаточно больших p_n [2]

$$d_n \ll \ln^2 p_n \tag{1}$$

и др. Однако наибольшее внимание, по-видимому, уделяется оценке степенного относительно p_n типа, т. е. $d_n < p_n^{\gamma}$, в которой показатель степени γ пытаются максимально приблизить к $1/2$: $d_n < p_n^{7/12+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, или к лучшей в настоящее время оценке

$$d_n < p_n^{11/20+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Попытаемся улучшить оценку (2), максимально приблизив ее к недоказанному предположению А. Лежандра ($\gamma = 1/2$):

$$p_{n+1} - p_n < \sqrt{p_n}. \tag{3}$$

Теорема 1. *При* $n \to \infty$ $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} = o(1)$.

Доказательство. Вычислим верхний предел последовательности $\{\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}\}$:

$$M = \varlimsup_{n\to\infty} (\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{d_n}{\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{d_n}{\sqrt{p_n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dfrac{p_{n+1}}{p_n}} + 1} \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{d_n}{\sqrt{p_n}} \cdot \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{p_{n+1}}{p_n}} + 1} = 1/2 \varlimsup_{n\to\infty} \frac{d_n}{\sqrt{p_n}},$$

поскольку $p_{n+1} - p_n = O(p_n^{\gamma})$, $\gamma < 1$ [3] и, значит, $\varlimsup_{n\to\infty} p_{n+1}/p_n = \varliminf_{n\to\infty} p_{n+1}/p_n = \lim_{n\to\infty} p_{n+1}/p_n = 1$. Используем далее более грубое по сравнению с (1) неравенство

$$d_n \ll (\ln p_n)^{\alpha}, \tag{4}$$

где $2 < \alpha < \infty$. Очевидно, существует такое α, что это неравенство выполняется для всех p_n. С помощью (4) получаем

$$M \leqslant \frac{1}{2} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{d_n}{(\ln p_n)^{\alpha}} \frac{(\ln p_n)^{\alpha}}{\sqrt{p_n}} \leqslant \frac{1}{2} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{d_n}{(\ln p_n)^{\alpha}} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{(\ln p_n)^{\alpha}}{\sqrt{p_n}} = 0,$$

так как по теореме Лопиталя при любом $\alpha < \infty$ имеем $\varlimsup_{n\to\infty} \dfrac{(\ln x)^{\alpha}}{\sqrt{x}} = 0$, а первый из пределов в силу (4) ограничен. Таким образом, $M \leqslant 0$, но поскольку при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} > 0$, то

$$M = \varlimsup_{n\to\infty} (\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}) = 0. \tag{5}$$

Вычислим нижний предел. Известно [4], что

$$\varliminf_{n\to\infty} d_n = 2,$$

поэтому

$$m = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{d_n}{\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}} \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} d_n \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}} =$$

$$= 2 \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}} = 0,$$

поскольку существует предел в обычном смысле

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}} = 0.$$

Таким образом, $m \geqslant 0$. Но так как по свойству нижних и верхних пределов и с учетом (5) $m \leqslant M = 0$, то $m = \underline{\lim}_{n\to\infty} (\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}) = 0$. Следовательно, $M = m = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}) = 0$, и теорема доказана.

Очевидно, что последовательность $\{\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}\}$ хотя и убывает к нулю, но немонотонно в силу неравномерности распределения простых чисел. Однако на основании теоремы 1 ($m = M = 0$) можно утверждать, что существует $n = n_0$ такое, что при всех $n > n_0$, т. е. для бесчисленного множества значений p_n выполняется неравенство

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1, \tag{6}$$

из которого получаем улучшенную оценку

$$d_n = p_{n+1} - p_n < 2\sqrt{p_n} + 1. \tag{7}$$

Для достаточно больших p_n эта оценка сильнее оценки (2), так как неравенство $2p_n^{1/2} + 1 < p_n^{11/20+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, на бесконечном множестве простых чисел. Если $\varepsilon = 0$, то неравенство $2x^{1/2} + 1 < x^{11/20}$ справедливо при $x \in [10^6; \infty[$. При $\varepsilon \neq 0$ левый конец этого интервала меньше 10^6. Таким образом, для значений $p_n > p_{n_0}$, $p_n \in [10^6; \infty[$, оценка (7) лучше оценки (2).

Предположим, что гипотеза (3) верна, тогда для достаточно больших n справедливо более сильное, чем (6), неравенство $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 0{,}5$. Действительно, из (3) получаем $p_{n+1} - p_n = (\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n})(\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}) < \sqrt{p_n}$, откуда

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < \frac{\sqrt{p_n}}{\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}} < \frac{\sqrt{p_n}}{2\sqrt{p_n}} = 0{,}5.$$

Можно высказать предположение о том, что неравенство (6) выполняется не только при $n > n_0$, а вообще при любом n. Действительно, на основании оценки (2) имеем

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < \frac{p_n^{11/20+\varepsilon}}{\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}} < \frac{p_n^{11/20+\varepsilon}}{2\sqrt{p_n}} \doteq \frac{1}{2} p_n^{1/20+\varepsilon} < 1,$$

откуда $p_n^{1/20+\varepsilon} < 2$ или $p_n^{1+20\varepsilon} < 2^{20} = 1\,048\,576$, где $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon = 0$ получаем, что для $p_n \in [2;\ 1\,048\,576[$ верно (6). Если $\varepsilon \neq 0$, то правый конец интервала меньше 2^{20}. Далее

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} = \frac{d_n}{\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}} < \frac{d_n}{2\sqrt{p_n}} < \frac{(\ln p_n)^\alpha}{2\sqrt{p_n}} < 1,$$

т. е. $(\ln p_n)^\alpha < 2\sqrt{p_n}$. При $\alpha = 2{,}9$ последнее неравенство справедливо при $p_n \in [10^6; \infty[$, т. е. для бесчисленного множества простых чисел. Если при выбранных ε и $\alpha \geqslant 2$ два получаемых интервала пересекаются, то наше предположение верно при любом n, если же нет, то оно остается открытым на конечном интервале, на котором возможна непосредственная проверка неравенства (6).

С помощью неравенства (6) можно доказать два утверждения, второе из которых (между числами n^2 и $(n+1)^2$ имеется по крайней мере одно простое число) до сих пор не было доказано [3, 5], в предположении, что неравенство (6) верно при $n > n_0$ или для любого n. Рассмотрим второй случай.

Теорема 2. *Если числа r и s $(r < s)$ таковы, что*

$$\sqrt{s} - \sqrt{r} \geqslant 1, \tag{8}$$

то в интервале $[r; s]$ содержатся простые числа.

Доказательство. Допустим противное, что неравенство (8) выполняется, а в интервале $[r; s]$ нет ни одного простого числа. Тогда $p_n < r < s < p_{n+1}$ или $\sqrt{p_n} < \sqrt{r} < \sqrt{s} < \sqrt{p_{n+1}}$, откуда $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} > \sqrt{s} - \sqrt{r} \geqslant 1$, что противоречит неравенству (6). Следовательно, в интервале $[r; s]$ есть хотя бы одно простое число. Теорема доказана.

Замечание. Если $\sqrt{s} - \sqrt{r} < 1$, то в интервале $[r; s]$ могут быть простые числа, а могут и не быть.

Пусть $\pi(x)$ означает количество простых чисел $p_n \leqslant x$.

Теорема 3. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\pi[(n+1)^2] - \pi(n^2) \geqslant 1, \tag{9}$$

т. е. в интервале $[n^2; (n+1)^2]$ содержится, по крайней мере, одно простое число.

Доказательство. Разобьем числовую ось на пересекающиеся между собой интервалы

$$[k; (\sqrt{k}+1)^2], \quad k = 1, 2, \dots \tag{10}$$

Поскольку $\sqrt{(k+1)^2} - \sqrt{k} = 1$, то по теореме 2 в каждом из интервалов (10) имеется хотя бы по одному простому числу. Полагая, в частности в (10) $k = n^2$, получаем интервалы $[n^2; (n+1)^2]$, в каждом из которых есть простые числа, т. е. верно неравенство (9), и теорема доказана.

Очевидно, что теорему 3 можно доказать и для промежутка $[x^2; (x+1)^2]$, где x — любое действительное число $(k = x^2)$.

1. *Riemann B.* Über die Anzahe der Primzahlen unter gegebenen Größe // Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss., Berlin.— 1859.— S. 671—680.
2. *Математическая* энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова.— М., 1984.— Т. 4.— 1216 с.
3. *Чандрасекхаран К.* Арифметические функции.— М.: Наука, 1975.— 272 с.
4. *Прахар К.* Распределение простых чисел.— М.: Мир, 1967.— 511 с.
5. *Трост Э.* Простые числа.— М.: Физматгиз, 1959.— 135 с.

Харьков. политехн. ин-т

Получено 22.11.84